第 19 卷第 1 期 2021 年 2 月
1672-6553/2021/19(1)/075-05
动 力 学 与 控 制 学 报
JOURNAL OF DYNAMICS AND CONTROL
Vol.19 No.1
Feb. 2021

二维三角陀螺声子晶体的波调控研究 *

王伟能† 杨晓东 张伟
（北京工业大学 机电学院，北京 100124）

摘要 本文研究了一种二维三角陀螺声子晶体，采用拉格朗日方程对结构进行建模，推导出动力学方程．通过调节陀螺转速，可以控制结构的色散关系，并获得较大的带隙，从而可以将其用来进行振动控制和噪声抑制．从色散曲面等频截线发现波在结构中的传播方向会随频率变化，在低频时各向同等传播，高频时则出现六个集中的传播方向．通过数值计算验证了理论获得的带隙的准确性．

关键词 陀螺， 声子晶体， 带隙， 振动控制， 波调控

DOI：10.6052/1672-6553-2020-039

引言

超材料是指一些具有超常物理性质的人造材料，一般是自然界中所没有的．声子晶体作为一种新型超材料，在近些年受到广泛关注．声子晶体具有能带特性，波在能带结构通带范围内可以传播，在禁带内则被抑制[1]．振动和声音都可以通过弹性波的形式传播，因此声子晶体为振动控制和噪声抑制提供了新的方法手段，问题也可转化为对声子晶体中弹性波的调控研究．

声子晶体的概念是在周期结构的研究基础上类比光子晶体提出的．Sigalas[2]将球形散射体置于一种基体材料中并组成三维周期结构，发现弹性波在其中的传播存在带隙现象．Kushwaha[3]等在研究镍铝二维周期复合材料时首次明确提出了声子晶体的概念，并且给出了结构的弹性波带隙．对声子晶体能带结构的传统调控方法，主要是改变结构的几何构型，或使用能与其他物理场发生耦合的材料．Wang 等[4]用有限元仿真对三维周期弹性体进行了研究，通过施加外力使材料变形来改变结构的带隙范围，材料的弹性性质使得带隙的改变具有往复性．Bergamini[5]设计了一种压电陶瓷声子晶体梁，改变通过压电陶瓷的电流频率，即可获得不同的色散关系．Zhang[6]等人对力和磁场作用下的二维磁致伸缩声子晶体板进行了研究，发现增大磁场强度会拓宽原有带隙宽度并且产生新的带隙，而增加预紧力会抵消磁场对能带结构的影响．这些调控方法依赖于材料属性或其它物理场，有的调节带隙范围窄，有的调节具有延时性．而通过其它方式，如参激调节、陀螺调节，则具有实时调控的能力，且能获得较大的禁带．Yang 等[7]人研究了一维弹簧质量声子晶体，将高频振动作为参数激励提供伪刚度，实现了采用参数激励调节结构带隙．邸士杰[8]提出了一种陀螺和质量块交替连接的一维声子晶体模型，分析了陀螺转速、连接刚度等对结构带隙的影响．Brun 等[9,10]将陀螺引入二维周期晶格，发现陀螺的参数可以控制结构的色散性质，并提出用这种材料来设计屏蔽装置和指定方向的波导，但其所推导的动力学方程并不能全面地体现陀螺的影响．Zhou[11]将离散陀螺周期结构的研究拓展到了陀螺连续体，并通过连续介质力学中的 Hermit 质量密度张量建立了声学陀螺连续介质的表面方程，解释了单向波产生的原因．李夏临[12]等研究了一种无约束的二维陀螺声子晶体，发现结构的参数可以改变带隙．

本文对二维陀螺声子晶体的波进行调控研究，用拉格朗日方程推导了结构的动力学方程，根据 Bloch 定理求解色散关系，分析陀螺转速对色散关系的影响，指出波的传播方向随频率的变化趋势，并对理论带隙进行了数值验证．

2019-10-09 收到第 1 稿，2020-03-16 收到修改稿．
* 国家自然科学基金资助项目（11972050）
† 通讯作者 E-mail：wnwang666@163.com

1 二维三角陀螺声子晶体

本文所研究的二维三角陀螺声子晶体模型如图 1 所示，单元体为一个上端连接质点、下端铰接的陀螺，各个单元体通过质点间的弹性连接组成平面正三角排列周期结构，在质点运动之前陀螺转轴垂直于质点组成的平面. 每个质点的质量为 M_0，质点间的弹性连接长度为 l、刚度为 c、质量忽略不计. 假设陀螺章动角较小，质点只在平面内平移，不随陀螺自转而转动.

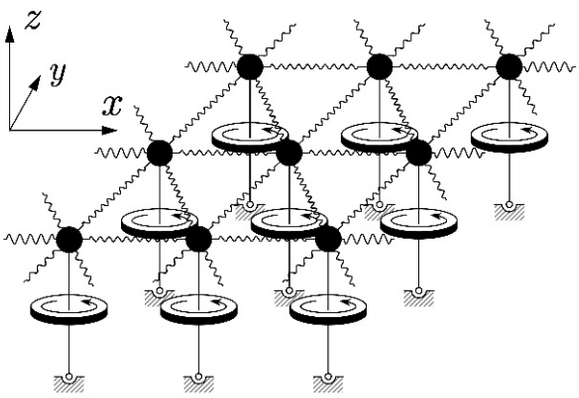


图 1 三角陀螺声子晶体

Fig.1 Triangular gyroscope phononic crystals

定义图中处于 x 方向第 m 列（列的平面方向与 x 轴成 60 度角）、y 方向第 n 行的质点 (m,n)，在 x 方向的位移为 $x_{m,n}$、y 方向的位移为 $y_{m,n}$. 取陀螺-质点单元进行运动分析，对章动角采取线性化假设，由拉格朗日方程可推得结构的动力学方程为：

$$\begin{aligned} &M\ddot{\boldsymbol{U}}_{m,n} + G\boldsymbol{R}\dot{\boldsymbol{U}}_{m,n} - \\ &c[\boldsymbol{a}_1\cdot(\boldsymbol{U}_{m+1,n} + \boldsymbol{U}_{m-1,n} - 2\boldsymbol{U}_{m,n})\boldsymbol{a}_1 + \\ &\boldsymbol{a}_2\cdot(\boldsymbol{U}_{m,n+1} + \boldsymbol{U}_{m,n-1} - 2\boldsymbol{U}_{m,n})\boldsymbol{a}_2 + \\ &\boldsymbol{a}_3\cdot(\boldsymbol{U}_{m-1,n+1} + \boldsymbol{U}_{m+1,n-1} - 2\boldsymbol{U}_{m,n})\boldsymbol{a}_3] = 0 \end{aligned} \tag{1}$$

其中，$\boldsymbol{U}_{m,n} = (x_{m,n}, y_{m,n})^{\mathrm{T}}$，$M = M_0 + I_1/h^2$，$I_1$ 为陀螺相对于横轴的转动惯量，本文中所研究的陀螺对各条横轴的转动惯量均相同，h 为陀螺转轴的长度，方程中的时变量为质点的位移、速度、加速度，因此由质点的角度看，陀螺的存在起到一个附加质量的作用. $G = I_2(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta)/h^2$ 为方程的陀螺项系数，I_2 为陀螺对转轴的转动惯量，$\dot{\psi}$ 为陀螺自转转速、$\dot{\phi}$ 为进动速度、θ 为章动角，将 $\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta$ 记为 Ω，称作陀螺的总转速，由于陀螺的自转转速相较进动速度大很多，因此 Ω 可表征其自转转速大小. $\boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ 为陀螺项耦合矩阵. $\boldsymbol{a}_1 = (1,0)^{\mathrm{T}}$、$\boldsymbol{a}_2 = (1/2, \sqrt{3}/2)^{\mathrm{T}}$ 以及 $\boldsymbol{a}_3 = (-1/2, \sqrt{3}/2)^{\mathrm{T}}$ 三个单位向量表示质点与相邻质点间的弹性力方向.

2 色散性质分析

假设质点的运动是时谐的，即：

$$\boldsymbol{U}_{m,n} = \boldsymbol{u}_{m,n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} \tag{2}$$

其中，$\boldsymbol{u}_{m,n} = (\tilde{x}_{m,n}, \tilde{y}_{m,n})^{\mathrm{T}}$，$\tilde{x}_{m,n}$ 和 $\tilde{y}_{m,n}$ 分别为质点 (m,n) 沿 x 和 y 方向的振幅，ω 为圆频率. 二维三角周期结构的 Bloch-Floquet 条件为：

$$\boldsymbol{u}_{m+b_1,n+b_2} = \boldsymbol{u}_{m,n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\mathrm{T}\boldsymbol{b}} \tag{3}$$

其中，$\boldsymbol{k} = (k_1, k_2)^{\mathrm{T}}$ 为 Bloch 波矢，k_1、k_2 分别为 x 和 y 方向的波数，$\boldsymbol{T} = (\boldsymbol{t}^1, \boldsymbol{t}^2) = \begin{pmatrix} l & l/2 \\ 0 & \sqrt{3}\,l/2 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{t}^1$ 和 $\boldsymbol{t}^2$ 是三角周期结构的基矢，$\boldsymbol{b} = (b_1, b_2)^{\mathrm{T}}$. 将式（2）和式（3）先后代入（1），根据方程的有解条件，可得二维三角陀螺声子晶体的色散关系：

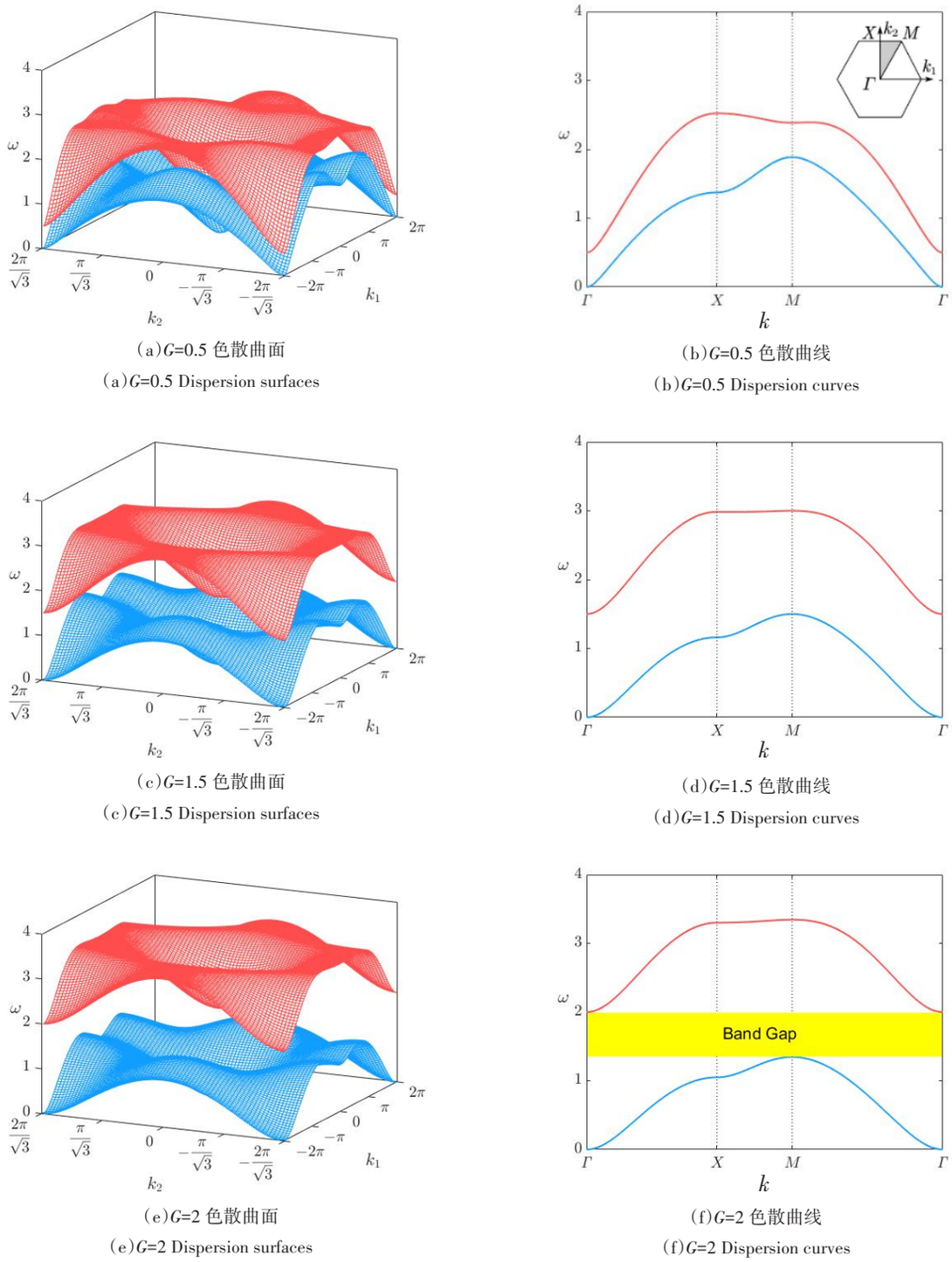
$$\det(\omega^2\boldsymbol{M} + \omega\boldsymbol{G} - \boldsymbol{C}) = 0 \tag{4}$$

其中，$\boldsymbol{M} = \mathrm{dig}[M, M]$ 为质量矩阵，$\boldsymbol{G} = \mathrm{i}G\boldsymbol{R}$ 为陀螺矩阵，$\boldsymbol{C}$ 为刚度矩阵：

$$\boldsymbol{C} = c\begin{pmatrix} C_{11} & \sqrt{3}\sin\dfrac{k_1 l}{2}\sin\dfrac{\sqrt{3}\,k_2 l}{2} \\ \sqrt{3}\sin\dfrac{k_1 l}{2}\sin\dfrac{\sqrt{3}\,k_2 l}{2} & 3-3\cos\dfrac{k_1 l}{2}\cos\dfrac{\sqrt{3}\,k_2 l}{2} \end{pmatrix}$$

$$C_{11} = 3 - 2\cos(k_1 l) - \cos\frac{k_1 l}{2}\cos\frac{\sqrt{3}\,k_2 l}{2}.$$

下面分析陀螺项系数 G 的取值对能带结构的影响，取 $M = 1$、$c = 1$、$l = 1$，图 2 为 G 分别取 0.5、1.5 和 2 时的色散曲面以及对应的沿不可约布里渊区边界的色散曲线，不可约布里渊区示意图位于 G 取 0.5 的色散曲线图右上角. 色散图中有两支色散曲面，当 G 取值较小时，两支曲面具有频率重叠部分，当 G 增大时，两支曲面逐渐分离且变得扁平，曲面间出现带隙. 由于陀螺项系数 G 正比于陀螺转速，在陀螺的转动惯量、转轴长度等固有属性确定的情况下，可以通过调节陀螺转速，控制结构禁带是否出现，以及出现时的带宽，从而通过或抑制指定频段的波.



(a)G=0.5 色散曲面

(a)G=0.5 Dispersion surfaces

(b)G=0.5 色散曲线

(b)G=0.5 Dispersion curves

(c)G=1.5 色散曲面

(c)G=1.5 Dispersion surfaces

(d)G=1.5 色散曲线

(d)G=1.5 Dispersion curves

(e)G=2 色散曲面

(e)G=2 Dispersion surfaces

(f)G=2 色散曲线

(f)G=2 Dispersion curves

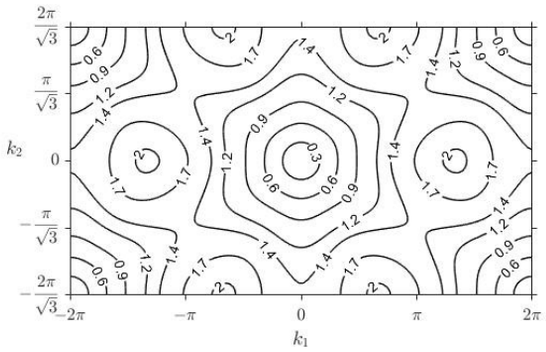
图 2　G 不同取值的色散性质

Fig.2　Dispersion properties of different value of G

图 3 是 G 取 0.5 时色散曲面的等频率截线,其中(a)对应下支,(b)对应上支,曲线的法向为对应频率的波的传播方向.当波的频率较低时,曲线为圆形,法线向四周各向同性散开,波可向各个方向同等传播.当波的频率较高时,截线法线集中于六个方向,表示波也集中在这六个方向传播.但上下曲面的高频范围的六个传播方向角度不同.

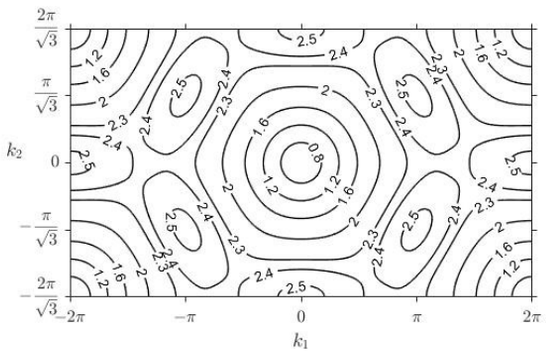
3　带隙的数值验证

二维声子晶体中波的传播方向有无数个,因此我们选定一个方向进行带隙验证,图 4 为 G 取 4 时的 x 轴方向色散曲线,两支色散曲线中间有较宽的



(a)下色散曲面截线

(a)Contours of lower dispersion surface



(a)上色散曲面截线

(a)Contours of upper dispersion surface

图3 G=0.5 色散曲面截线

Fig.3 G=0.5 Contours of dispersion surfaces

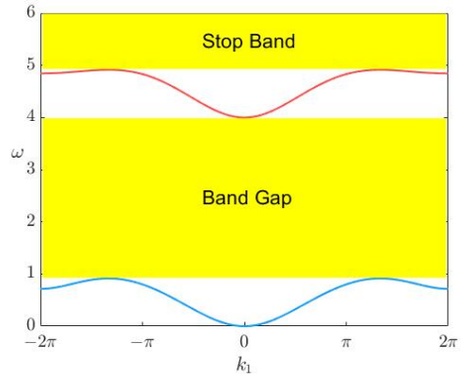


图4 G=4 x方向色散曲线

Fig.4 G=4 Dispersion curves along x direction

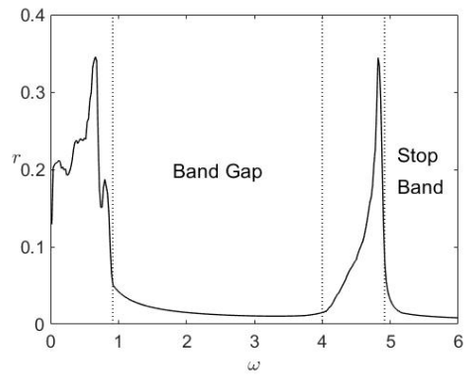


图5 不同频率的波响应曲线

Fig.5 Response of waves of different frequencies

带隙.对方程(1)使用MATLAB进行求解,在结构中间质点施加一个圆形轨迹位移激励,激励频率范围从0到6,观测x轴方向上与激励点有一定距离的一个质点在一段时间内的最大位移.由于结构是有限的,为避免波的反射,观测时间范围不超过波到达边界的时间.

图5是不同频率的激励时观测到的最大位移与激励的幅值比r的变化曲线,当波的频率处在禁带(包括带隙)范围内时,波的传播受到了明显抑制,而通带内波的传播效果明显优于禁带.从数值验证的结果来看,通过调节三角陀螺声子晶体的陀螺转速,可获得能带带隙以抑制波的传播,且波受到抑制的频率范围与理论获得的带隙吻合良好.

4 结论

本文对一种三角陀螺声子晶体进行了力学建模,得到了结构的动力学方程及色散关系,发现陀螺的存在会对二维弹簧质量声子晶体结构起到一个附加质量的作用,并对质点施加了陀螺力.存在两支色散曲面,通过对陀螺转速的调节,可以控制其间的带隙,从抑制指定频率范围的波.色散曲面等频截线表明,对应于两支曲面的波,当频率较低时,波向各个角度同等传播,当频率较高时,波有六个集中的传播方向,但上下曲面的传播方向角度不同.数值验证结果显示,波在一定频段内受到了明显抑制,频率范围与理论获得的带隙吻合良好,证明了理论获得的带隙确实存在,且精度较高.

参 考 文 献

1 温熙森,温激鸿,郁殿龙,等.声子晶体.北京:国防工业出版社,2009:2~25(Wen X S, Wen J H, Yu D L, et al. Phononic crystal. Beijing: National defense industry press,2009:2~25 (in Chinese))

2 Sigalas M M, Economou E N. Elastic and acoustic wave band structure. *Journal of Sound and Vibration*, 1992, 158(2): 377~382

3 Kushwaha M S, Halevi P, Dobrzynski L, et al. Acoustic band structure of periodic elastic composites. *Physical Review Letters*, 1993, 71(13): 2022~2025

4 Wang L, Bertoldi K. Mechanically tunable phononic band

gaps in three-dimensional periodic elastomeric structures. *International Journal of Solids & Structures*, 2012, 49 (19-20): 2881~2885

5 Bergamini A, Delpero T, Simoni L D. Phononic crystal with adaptive connectivity. *Advanced Materials*, 2014, 26 (9): 1343~1347

6 Zhang S, Shi Y, Gao Y. Tunability of band structures in a two-dimensional magnetostrictive phononic crystal plate with stress and magnetic loadings. *Physics Letters A*, 2017, 381(12): 1055~1066

7 Yang X D, Cui Q D, Qian Y J, et al. Modulating band gap structure by parametric excitations. *Journal of Applied Mechanics*, 2018, 85: 061012-1~061012-7

8 邸士杰,杨晓东,张伟.陀螺-质量声子晶体结构力学研究.动力学与控制学报,2019,17(3):288~292 (Di S J, Yang X D, Zhang W. Study on structural mechanics of a gyro-mass phononic crystal. *Journal of Dynamics and Control*, 2019, 17(3): 288~292 (in Chinese))

9 Brun M, Jones I S, Movchan A B. Vortex-type elastic structured media and dynamic shielding. *Proceedings of Royal Society A*, 2012, 468(2146): 3027~3046

10 Garau M, Carta G, Nieves M J, et al. Interfacial waveforms in chiral lattices with gyroscopic spinners. *Proceedings of Royal Society A*, 2018, 474(2215): 0132~0151

11 Zhou X M, Zhao Y C. Unusual one-way edge state in acoustic gyroscopic continuum. *Science China (Physics, Mechanics & Astronomy)*, 2019, 62(1):80~86

12 李夏临,杨晓东,张伟.二维分布式陀螺结构带隙特性研究.动力学与控制学报,2019, 17(5):425~431(Li X L, Yang X D, Zhang W. Band characteristics of 2-D gyroscope phononic crystal. *Journal of Dynamics and Control*, 2019, 17(5): 425~431 (in Chinese))

STUDY ON WAVE MANIPULATION IN 2-D TRAINGULAR GYROSCOPE PHONONIC CRYSTALS *

Wang Weineng† Yang Xiaodong Zhang Wei

(*College of Mechanical Engineering*, *Beijing University of Technology*, *Beijing* 100124, *China*)

Abstract The wave propagation and band gap tuning of 2-D triangular gyroscope phononic crystals were studied. The dynamic equations were derived through Lagrangian Equation. Dispersion properties were controlled by changing the spin rate of gyros and a sizable band gap was fulfilled, which could be used to control vibration and reduce noise. Moreover, the results showed that the wave propagation directions vary with frequencies. Waves travel in all directions at low frequencies, while in six centralized directions at high frequencies. Finally, the theoretical predication on band gap was verified by numerical simulations.

Key words gyroscope, phononic crystals, band gap, vibration control, wavs manipulation

Received 9 October 2019, revised 16 March 2020.

* The project supported by the National Natural Science Foundation of China(11972050)

† Corresponding author E-mail: wnwang666@163.com