

轴向可伸缩复合材料悬臂梁的非线性振动研究^{*}

刘燕^{1†} 张伟² 龚涛涛¹

(1. 西华师范大学 物理与空间科学学院, 南充 637002)(2. 北京工业大学 机电学院, 北京 100124)

摘要 以航空领域中可变体机翼的伸缩变形过程为研究对象, 对可伸缩悬臂复合材料层合梁的时变非线性振动进行理论研究. 建立可伸缩悬臂复合材料层合梁在外载荷作用下的非线性动力学模型; 根据时变系数非线性动力学方程研究时变非线性振动特性. 分析可伸缩悬臂复合材料层合梁在外伸与收缩变形过程中的非线性动力学特性. 从数值结果上看: 模型的外伸速度、飞行速度对振动的影响较大, 初值对振动的影响较小.

关键词 轴向运动悬臂梁, 高阶剪切理论, 活塞理论, 非线性动力学

DOI: 10.6052/1672-6553-2020-038

引言

可变体机翼飞行器^[1,2]是一种可以根据不同的飞行任务而改变机翼外形以适应不同的飞行环境^[3]的飞行器. 可变体机翼的变形有伸缩翼、折叠翼、变翼型、变后掠角等多种实现方式. 轴向可伸缩机翼飞行器作为可变体机翼飞行器中的一种, 它通过变展弦比来实现机翼变形. 轴向可伸缩机翼由固定翼和可伸缩翼两部分组成, 其中, 可伸缩部分嵌套在固定翼里面. 通过一个伺服电机控制齿条运动, 进而达到伸缩的目的. 当机翼伸出时, 展弦比增大, 飞行阻力也随之增大, 可以提高飞机的低速性能和着陆性能, 当机翼缩进时, 展弦比降低, 高速飞行阻力减小, 可以提高飞机的机动性能. 目前, 在民用、军事中使用的飞行器机翼仍然采用固定翼的形式, 随着科学技术的提高, 对传统飞行器提出更高飞行要求, 例如: 在飞行器起飞、降落和巡航过程中, 希望提高飞行器的低速性能、着陆性能和巡航升阻比. 如果可伸缩机翼在飞行器起飞、降落和巡航过程中完全展开并保持稳定状态, 既形成固定翼的形式, 又提高飞行器的低速性能、着陆性能和巡航升阻比^[4-7].

但是飞行器在追求高速飞行和高机动性的同时, 飞行器会出现轻结构和大柔度的特点, 使得飞行器机翼在外界扰动下, 极易发生横向振动, 甚至是颤振^[8,9]. 在历史上, 就曾发生过机翼颤振的事故.

如果在轴向可伸缩系统设计过程中, 考虑并分析其伸缩过程的结构非线性, 以及有可能产生的空气动力非线性特性对系统振动的影响, 可以为抑制颤振现象的发生, 并为进一步的控制研究提供一些有效的依据, 这在工程应用中具有非常重要的价值. 另外, 充分研究可伸缩机翼系统的动力学特性对于开展轴向可伸缩系统的理论研究和实验分析, 以及进一步为该结构的使用与发展将会起到理论指导作用.

目前对轴向运动系统的研究受到了相关学者的广泛关注, 主要将其简化成轴向运动悬臂梁模型, 在国际上对其进行的相关研究如下:

1974 年, Tabarrok 等人^[10]对运动悬臂梁的动力学行为进行了研究. 1981 年, Taleb 等人^[11]研究了在不可压缩流体中, 等截面环形柔性细长悬臂梁的动力学问题. 1987 年, Wang 等人^[12]研究了柔性机器人手臂在外伸和回收过程中的动力学响应问题. 结果表明, 在梁外伸和回收过程中, 系统会分别出现稳定和不稳定响应. 1995 年, Yuji Matsuzaki 等人^[13]从理论分析和实验的角度对悬臂梁的外伸和回收过程中的振动进行了研究. 2000 年, Zhu 等人^[14]以建筑的高速电梯为工程背景, 根据哈密顿原理, 建立了一端带有集中质量的轴向外伸梁的动力学方程, 并从能量的角度分析了电梯的动力学稳定性以及电梯工程中影响不稳定的因素. 2007 年, Gosselin 等人^[15]研究了在不可压缩

2019-09-25 收到第 1 稿, 2019-11-05 收到修改稿.

^{*} 国家自然科学基金重点项目(10732020)和南充市科技局项目(18YFZJ0033)

[†] 通讯作者 E-mail: liuyan2004@cwnu.edu.cn

稠密流体中,等截面环形柔性悬臂梁沿轴向以恒定速度在平面内进行外伸和收缩运动时的稳定性问题.2008年,Piovan 等人^[16]研究了由功能梯度材料制成的环形截面薄壁梁轴向运动的响应问题.2010年,Chang 等人^[17]研究了轴向运动 Rayleigh 悬臂梁的响应和稳定性问题.

以航空领域中可变体机翼的伸缩变形过程为研究对象,对可伸缩悬臂复合材料层合梁的时变非线性振动进行理论研究.建立可伸缩悬臂复合材料层合梁在一阶活塞气动弹性力和外载荷作用下的非线性动力学模型.然后分析可伸缩悬臂复合材料层合梁在外伸与收缩变形过程中的非线性动力学特性.通过本课题的研究,为可伸缩系统的设计和制造起到一定的参考作用.本文是针对文献[18]的进一步讨论和研究.

1 轴向可伸缩复合材料悬臂梁动力学方程的建立

图1所示为一矩形截面复合材料层合梁,该梁左端固定,右端自由.梁的初始长度为 l_0 ,总厚度为 h , $u_0(x(t), t)$ 为梁中面沿 x 轴正方向的位移, $w_0(x(t), t)$ 为梁的中面横向位移,即沿 z 轴正方向位移,梁的瞬时长度

$$l(t) = l_0 + \int_0^t \frac{dl(t)}{dt} dt \quad (1)$$

其中, $\frac{dl(t)}{dt} = \frac{dx(t)}{dt}$,梁的外伸回收速度为 $\frac{dl(t)}{dt}$,梁的中面横向速度为 $\frac{dw_0(x(t), t)}{dt} = \frac{\partial w_0}{\partial t} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial x(t)}{\partial t}$,梁在外伸和收缩

过程中受到结构阻尼力 $F = -c \frac{dw_0}{dt}$ 和一阶活塞气

动弹性力 $\Delta p = -\frac{4q_d \gamma}{M_\infty} \frac{1}{V_{air}} \frac{dw_0}{dt}$ 的作用.其中, q_d 为动

压,具体形式为 $q_d = \frac{1}{2} \rho_{air} V_{air}^2$, ρ_{air} 为单位体积气流

密度, V_{air} 为超音速气流流速, $\gamma = \frac{M_\infty}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}}$ 为修正

系数, M_∞ 为马赫数.

考虑到模型的振动情况,利用 Reddy 高阶剪切变形理论,模型的几何方程为

$$u_1(x, z, t) = u_0(x, t) + z\varphi_x(x, t) - z^3 c_1 \left(\varphi_x + \frac{\partial w_0(x, t)}{\partial x} \right) \quad (2a)$$

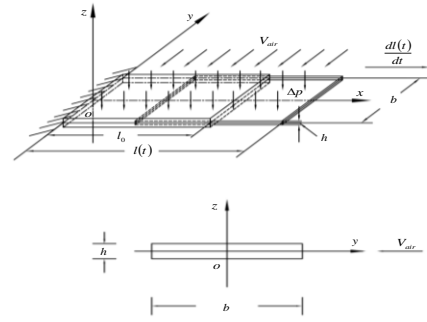


图1 轴向伸缩复合材料悬臂梁模型

Fig.1 The axially moving laminated cantilever beam

$$w(x, t) = w_0(x, t) \quad (2b)$$

其中, $x = x(t)$, $c_1 = \frac{4}{3h^2}$, $w(x, t) = w_0(x, t)$ 为梁弯曲引起的转角.

对应的应变位移关系为

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 \quad (3a)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u_0}{\partial z} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \quad (3b)$$

本构关系为

$$\sigma_{xx} = Q_{11} \varepsilon_{xx} \quad (4a)$$

$$\sigma_{xz} = Q_{13} \gamma_{xz} \quad (4b)$$

根据 Hamilton 原理

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta T - \delta U + \delta W) dt = 0 \quad (5)$$

其中,

$$\begin{aligned} \delta U &= \int_V \frac{1}{2} (\sigma_{xx} \delta \varepsilon_{xx} + \sigma_{xz} \delta \varepsilon_{xz}) dV \\ &= b \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_0^L \frac{1}{2} (\sigma_{xx} \delta \varepsilon_{xx} + \sigma_{xz} \delta \varepsilon_{xz}) dx dz \end{aligned} \quad (6)$$

$$\delta W = b \int_0^L \Delta p \delta w_0 dx - b \int_0^L c \frac{dw_0}{dt} \delta w_0 dx \quad (7)$$

$$T = \int_V \frac{1}{2} \rho \frac{d\vec{R}}{dt} \frac{d\vec{R}}{dt} dV = b \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_0^L \frac{1}{2} \rho \frac{d\vec{R}}{dt} \frac{d\vec{R}}{dt} dx dz \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \delta T &= \int_0^{l(t)} \left[\left(I_0 \frac{dx(t)}{dt} + I_0 \frac{du_0}{dt} + I_1 \frac{d\varphi_x}{dt} - c_1 I_3 \frac{d\varphi_x}{dt} \right) \delta \frac{du_0}{dt} \right. \\ &\quad + \left(I_0 \frac{dx(t)}{dt} + I_1 \frac{du_0}{dt} + I_2 \frac{d\varphi_x}{dt} - c_1 I_4 \frac{d\varphi_x}{dt} \right) \delta \frac{d\varphi_x}{dt} \\ &\quad \left. + \frac{dw_0}{dt} \delta \frac{dw_0}{dt} \right] dz dx \end{aligned} \quad (9)$$

$$I_i = \sum_{k=1}^N \int_{z_k}^{z_{k+1}} \rho^{(k)} z^i dz, (i = 0, 1, 2, \dots, 6)$$

$$J_i = I_i - c_1 I_{i+2}, K_2 = I_2 - 2c_1 I_4 + c_1^2 I_6 \quad (10)$$

对应的边界条件为

$$x = 0: \quad w_0 = \frac{\partial w_0}{\partial x} = \varphi_x = 0 \quad (11a)$$

$$x = L: \quad N_x = \bar{M}_x = \bar{Q}_x = 0 \quad (11b)$$

对应位移表示的动力学方程为

$$A_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + A_{11} \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} = I_0 \frac{d^2 x}{dt^2} + I_0 \frac{d^2 u_0}{dt^2} + J_1 \frac{d^2 \phi_x}{dt^2} - c_1 I_3 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial t^2} \quad (12a)$$

$$\begin{aligned} & A_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} \frac{\partial w_0}{\partial x} + A_{11} \frac{\partial u_0}{\partial x} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \\ & \frac{3}{2} A_{11} \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + (c_1 F_{11} - c_1^2 H_{11}) \frac{\partial^3 \phi_x}{\partial x^3} - \\ & c_1^2 H_{11} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} + (\Delta P + F) \\ & + (A_{55} - 6c_1 D_{55} + 9c_1^2 F_{55}) \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) \\ & = I_0 \frac{d^2 w_0}{dt^2} - c_1^2 I_6 \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial t^2} + c_1 I_3 \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial t^2} + c_1 J_4 \frac{\partial^3 \phi_x}{\partial x \partial t^2} \end{aligned} \quad (12b)$$

$$\begin{aligned} & (D_{11} - 2c_1 F_{11} + c_1^2 H_{11}) \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} + (c_1^2 H_{11} - \\ & c_1 F_{11}) \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^3} - (A_{55} - 2c_2 D_{55} + c_2^2 F_{55}) \left(\phi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) \\ & = K_2 \frac{d^2 \phi_x}{dt^2} - c_1 J_4 \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial t^2} \end{aligned} \quad (12c)$$

其中,

$$\begin{aligned} & (A_{11}, B_{11}, D_{11}, E_{11}, F_{11}, H_{11}) \\ & = \sum_{k=1}^N \int_{z_k}^{z_{k+1}} \bar{Q}_{11}^k (1, z, z^2, z^3, z^4, z^6) dz \\ & (A_{55}, D_{55}, F_{55}) = \sum_{k=1}^N \int_{z_k}^{z_{k+1}} \bar{Q}_{13}^k (1, z^2, z^4) dz \end{aligned}$$

由于惯性项对模型非线性振动影响较小,研究中可以忽略,忽略式(12a),(12c)的惯性项,代入(12b)可得

$$\begin{aligned} & -I_0 \frac{d^2 w_0}{dt^2} + c_1 I_4 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{d^2 w_0}{dt^2} \right) \\ & - c_1 J_4 \frac{c_1 F_{11} - D_{11}}{(A_{55} - 6c_1 D_{55} + 9c_1^2 F_{55})} \frac{\partial^4}{\partial x^4} \left(\frac{d^2 w_0}{dt^2} \right) \\ & + \frac{A_{11}}{2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} - D_{11} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} \\ & + c_1 (F_{11} - c_1 H_{11}) \frac{c_1 F_{11} - D_{11}}{(A_{55} - 6c_1 D_{55} + 9c_1^2 F_{55})} \frac{\partial^6 w_0}{\partial x^6} \end{aligned}$$

$$+ I_0 \frac{d^2 l}{dt^2} \frac{\partial w_0}{\partial x} + (\Delta P + F) \frac{\partial^6 w_0}{\partial x^6} = 0 \quad (13)$$

其中,

$$\begin{aligned} & (A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}, E_{ij}, F_{ij}, H_{ij}) \\ & = \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} (\bar{Q}_{ij})_k (1, z, z^2, z^3, z^4, z^6) dz \\ & \Delta P \text{ 为气动力, } F \text{ 为结构阻尼力, } F = -c \frac{dw_0}{dt}. \end{aligned}$$

2 含有一阶气动力的非线性方程

考虑一阶气动活塞力的作用,将一阶气动力

$$\Delta p = \frac{2q_d}{M_a} \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} + \frac{1}{V_{air}} \frac{\partial w_0}{\partial t} \right)$$

代入公式(13),并引入如下变量对方程进行无量纲化

$$\begin{aligned} t & \rightarrow \sqrt{\frac{Q_{11} I_{yz}}{I_0 b L_0^4}} t \rightarrow \tau t, x \rightarrow \frac{x}{L}, w_0 \rightarrow \frac{w_0}{h}, \\ L & \rightarrow \frac{L}{h}, I_0 \rightarrow \frac{I_0}{\rho h}, c_1 I_4 \rightarrow \frac{c_1 I_4}{\rho h^3}, c_1 J_4 \rightarrow \frac{c_1 J_4}{\rho h^3}, \\ c & \rightarrow c \left(\frac{h \tau}{Q_{11}} \right), A_{11} \rightarrow \frac{A_{11}}{Q_{11} h}, D_{11} \rightarrow \frac{D_{11}}{Q_{11} h^3}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_{11} & \rightarrow \frac{F_{11}}{Q_{11} h^5}, H_{11} \rightarrow \frac{H_{11}}{Q_{11} h^7}, A_{55} \rightarrow \frac{A_{55}}{Q_{13} h}, \\ D_{55} & \rightarrow \frac{D_{55}}{Q_{13} h^3}, F_{55} \rightarrow \frac{F_{55}}{Q_{13} h^3} \end{aligned}$$

无量纲化后的动力学方程为

$$\begin{aligned} & -A \frac{d^2 \bar{w}_0}{d\bar{t}^2} + B \frac{\partial}{\partial \bar{x}^2} \left(\frac{d^2 \bar{w}_0}{d\bar{t}^2} \right) - C \frac{\partial^4}{\partial \bar{x}^4} \left(\frac{d^2 \bar{w}_0}{d\bar{t}^2} \right) - \\ & D \frac{d \bar{w}_0}{d\bar{t}} + E \left[\frac{\partial \bar{w}_0}{\partial \bar{x}} + \left(\bar{x} - \frac{1}{2} \right) \frac{\partial^2 \bar{w}_0}{\partial \bar{x}^2} \right] - G \frac{\partial^4 \bar{w}_0}{\partial \bar{x}^4} \\ & + F \int_0^1 \left(\frac{\partial \bar{w}_0}{\partial \bar{x}} \right)^2 d\bar{x} \frac{\partial^2 \bar{w}_0}{\partial \bar{x}^2} + H \frac{\partial^6 \bar{w}_0}{\partial \bar{x}^6} = 0 \end{aligned} \quad (14)$$

为了便于对偏微分形式的非线性动力学方程进行数值求解,设方程的解为

$$\bar{w}_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(\bar{x}) \bar{w}_n(\bar{t}) \quad (15)$$

模态函数为

$$\begin{aligned} \phi_n(\bar{x}) & = [ch(\lambda_n \bar{x}) - \cos(\lambda_n \bar{x})] \\ & - \frac{(ch\lambda_n + \cos\lambda_n)}{(sh\lambda_n + \sin\lambda_n)} [sh(\lambda_n \bar{x}) - \sin(\lambda_n \bar{x})] \end{aligned}$$

其中, λ_n 可以由以下方程求得

$$1 + ch\lambda_n \cos\lambda_n = 0 \quad (16)$$

对无量纲后的控制方程做二阶 Galerkin 离散,

离散后的方程可以写成

$$\frac{d^2 w_1}{dt^2} - T_{11}^{**} \frac{dw_1}{dt} - T_{12}^{**} w_1 - T_{13}^{**} \frac{dw_2}{dt} - T_{14}^{**} w_2 - T_{15}^{**} w_1^3 - T_{16}^{**} w_1^2 w_2 - T_{17}^{**} w_2^2 w_1 - T_{18}^{**} w_2^3 = 0 \quad (17a)$$

$$\frac{d^2 w_2}{dt^2} - T_{21}^{**} \frac{dw_1}{dt} - T_{22}^{**} w_1 - T_{23}^{**} \frac{dw_2}{dt} - T_{24}^{**} w_2 - T_{25}^{**} w_1^3 - T_{26}^{**} w_1^2 w_2 - T_{27}^{**} w_2^2 w_1 - T_{28}^{**} w_2^3 = 0 \quad (17b)$$

方程中的系数 T_{1i}^{**} 和 T_{2i}^{**} ($i = 1, 2, \dots, 8$) 都是与时间有关的变量。

3 外伸悬臂复合材料层合梁的非线性振动数值分析

取初始长度 $l_0 = 2\text{m}$, 宽 $b = 0.2\text{m}$, 厚 $h = 0.001\text{m}$, 飞行速度 $V_{air} = 865\text{m/s}$, 阻尼系数 $c = 300\text{N}\cdot\text{s/m}$ 的复合材料层合梁进行研究, 对应无量纲初始条件选取如下

$$w_1 = 0.1, \frac{dw_1}{dt} = 0.01, w_2 = 0.5, \frac{dw_2}{dt} = 0.5.$$

对应拉伸弹性模量, 剪切弹性模量及密度给出如下

$$Q_{11}^{(1)} = Q_{11}^{(3)} = 3.712\text{GPa}, Q_{11}^{(2)} = 0.841\text{GPa},$$

$$Q_{13}^{(1)} = Q_{13}^{(2)} = Q_{13}^{(3)} = 0.414\text{GPa},$$

$$\rho^{(1)} = \rho^{(2)} = \rho^{(3)} = 1800\text{kg/m}^3$$

其中, $\rho^{(1)}$ 、 $\rho^{(2)}$ 和 $\rho^{(3)}$ 代表层合梁上、中、下三层材料的密度, $Q_{11}^{(1)}$ 、 $Q_{11}^{(2)}$ 和 $Q_{11}^{(3)}$ 代表梁上、中、下三层材料的拉伸弹性模量; $Q_{13}^{(1)}$ 、 $Q_{13}^{(2)}$ 和 $Q_{13}^{(3)}$ 代表梁上、中、下三层材料的剪切弹性模量。

3.1 梁加速外伸过程

图 2-图 4 表示的是给定相同初速度 $v_0 = 0.001\text{m/s}$, 不同加速度时, 梁外伸的振动图象. 其中实线表示 $V_{air} = 519\text{m/s}$, 虚线表示 $V_{air} = 1038\text{m/s}$. 对应的加速度分别为 $a_1 = 0.001\text{m/s}^2$, $a_2 = 0.002\text{m/s}^2$, $a_3 = 0.004\text{m/s}^2$. 三组图中, 梁端点振动的振幅均有增大的趋势, 并且加速度越大, 振动的振幅越大. 梁外伸的速度对振动的影响较大, 外伸速度越大, 对梁振动的影响越大; 随着时间的增长, 端点的振幅越来越大。

3.2 梁减速回收过程

图 5-图 7 表示的是给定相同初速度 $v_0 = -0.001\text{m/s}$, 不同加速度时, 梁外伸的振动图象. 其中实线表示 $V_{air} = 519\text{m/s}$, 虚线表示 $V_{air} = 1038\text{m/s}$. 对应的加速度分别为 $a_1 = -0.001\text{m/s}^2$, $a_2 = -0.002\text{m/s}^2$, $a_3 = -0.0025\text{m/s}^2$. 在梁回收过程中, 给定相同初速度, 不同减加速度, 梁端点的振动情况, 在整体上, 梁端点的振幅呈下降趋势, 减加速度越

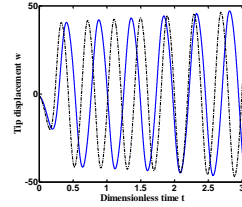


图 2 梁以 $a=0.001\text{m/s}^2$ 外伸时的振动图象

Fig.2 Tip displacement of a deploying system with acceleration $a=0.001\text{m/s}^2$

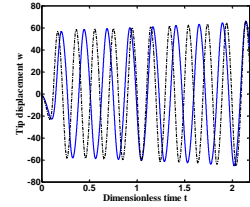


图 3 梁以 $a=0.002\text{m/s}^2$ 外伸时的振动图象

Fig.3 Tip displacement of a deploying system with acceleration $a=0.002\text{m/s}^2$

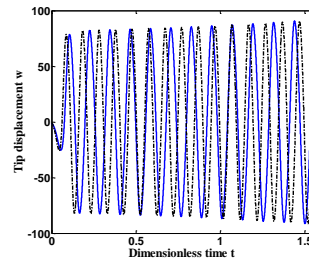


图 4 梁以 $a=0.004\text{m/s}^2$ 外伸时的振动图象

Fig.4 Tip displacement of a deploying system with acceleration $a=0.004\text{m/s}^2$

大, 回收速度减小得越快, 梁端点的振幅也衰减得越快. 梁回收的速度对振动的影响较大, 回收速度越大, 对梁振动的影响越大; 随着回收时间的增长, 端点的振幅越来越小。

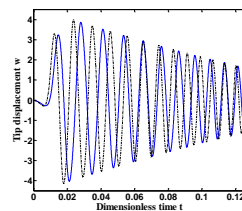


图 5 梁以 $a=-0.001\text{m/s}^2$ 回收时的振动图象

Fig.5 Tip displacement of a retraction system with acceleration $a=-0.001\text{m/s}^2$

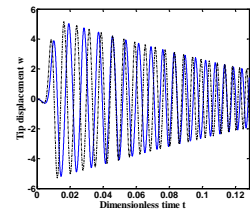


图 6 梁以 $a=-0.002\text{m/s}^2$ 回收时的振动图象

Fig.6 Tip displacement of a retraction system with acceleration $a=-0.002\text{m/s}^2$

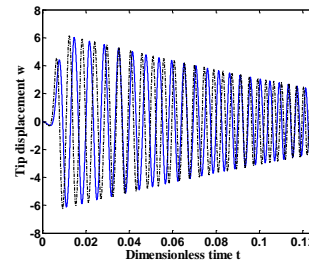


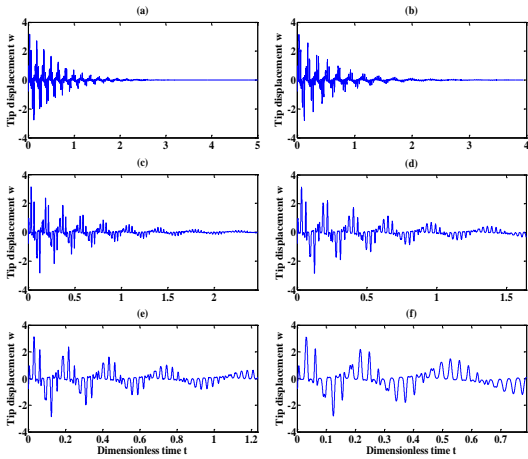
图 7 梁以 $a=-0.0025\text{m/s}^2$ 回收时的振动图象

Fig.7 Tip displacement of a retraction system with acceleration $a=-0.0025\text{m/s}^2$

3.3 飞行器在地面上气动力为 0 时,梁的振动情况

图 8 表示飞行器在地面上气动力为 0 时,即 $V_{air} = 0$ 时,梁外伸的振动图象.从图中可以看出,梁端点位移先增大,后减小;随着外伸速度的增加,梁在整个外伸过程中均处于振动状态.

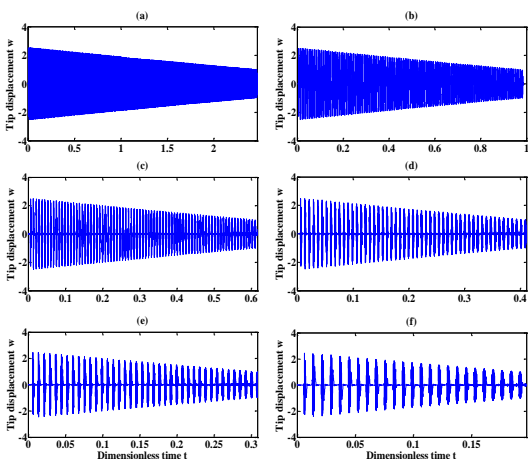
图 9 表示飞行器在地面上气动力为 0 时,即 $V_{air} = 0$ 时,梁回收的振动图.从图中可以看出,从回收开始,梁端点的振幅急剧增大,并达到最大,随后逐渐衰减;当回收速度增大时,逐渐出现大幅振动和小幅振动交替的现象.



(a) $V(0) = 0.01\text{m/s}$; (b) $V(0) = 0.025\text{m/s}$; (c) $V(0) = 0.04\text{m/s}$;
(d) $V(0) = 0.06\text{m/s}$; (e) $V(0) = 0.08\text{m/s}$; (f) $V(0) = 0.125\text{m/s}$

图 8 梁分别以(a), (b), (c), (d), (e), (f)的外伸速度外伸时系统的振动图象

Fig. 8 The nonlinear vibration of the system during extension at the extension rate (a), (b), (c), (d), (e), (f)



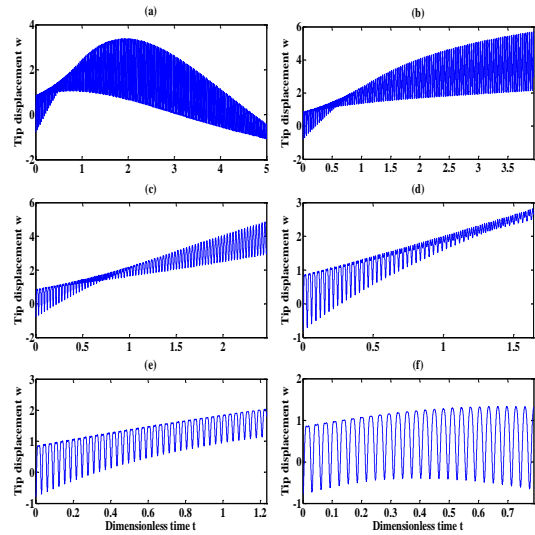
(a) $V(0) = -0.01\text{m/s}$; (b) $V(0) = -0.025\text{m/s}$; (c) $V(0) = -0.04\text{m/s}$;
(d) $V(0) = -0.06\text{m/s}$; (e) $V(0) = -0.08\text{m/s}$; (f) $V(0) = -0.125\text{m/s}$.

图 9 梁分别以(a), (b), (c), (d), (e), (f)的回收速度回收时系统的振动图象

Fig. 9 The nonlinear vibration of the system during extension at the retraction rate (a), (b), (c), (d), (e), (f)

3.4 飞行器在高空中以不同音速飞行时,飞行速度对梁振动的影响

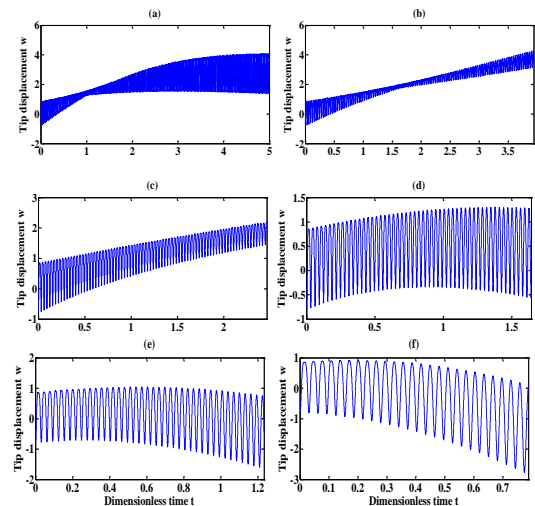
图 10-12 表示飞行器不同音速飞行时,梁外伸的振动图象,对应的音速分别为 $V_{air} = 519\text{m/s}$, $V_{air} = 865\text{m/s}$, $V_{air} = 1730\text{m/s}$.随着飞行器飞行速度的增加,梁端点的横向位移也随之增加;外伸速度达到 0.04m/s 时,端点的横向振幅达到最大,大于 0.04m/s 时,端点振幅随着速度的增大而减小.



(a) $V(0) = 0.01\text{m/s}$; (b) $V(0) = 0.025\text{m/s}$; (c) $V(0) = 0.04\text{m/s}$;
(d) $V(0) = 0.06\text{m/s}$; (e) $V(0) = 0.08\text{m/s}$; (f) $V(0) = 0.125\text{m/s}$

图 10 飞行器以音速 $V_{air} = 519\text{m/s}$ 飞行时,梁分别以(a), (b), (c), (d), (e), (f)的外伸速度外伸时系统的振动图象

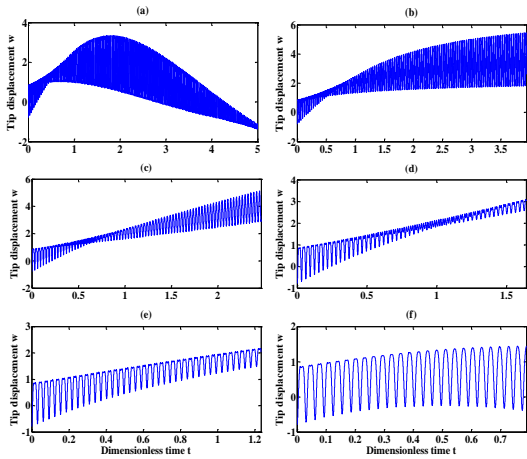
Fig. 10 The nonlinear vibration of the system during extension at the retraction rate (a), (b), (c), (d), (e), (f)



(a) $V(0) = 0.01\text{m/s}$; (b) $V(0) = 0.025\text{m/s}$; (c) $V(0) = 0.04\text{m/s}$;
(d) $V(0) = 0.06\text{m/s}$; (e) $V(0) = 0.08\text{m/s}$; (f) $V(0) = 0.125\text{m/s}$

图 11 飞行器以音速 $V_{air} = 865\text{m/s}$ 飞行时,梁分别以(a), (b), (c), (d), (e), (f)的外伸速度外伸时系统的振动图象

Fig. 11 The nonlinear vibration of the system during extension at the retraction rate (a), (b), (c), (d), (e), (f)



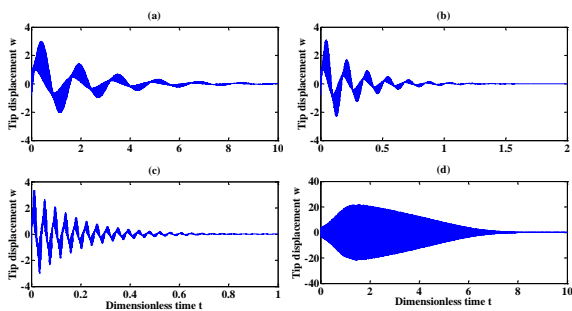
(a) $V(0) = 0.01\text{m/s}$; (b) $V(0) = 0.025\text{m/s}$; (c) $V(0) = 0.04\text{m/s}$;
(d) $V(0) = 0.06\text{m/s}$; (e) $V(0) = 0.08\text{m/s}$; (f) $V(0) = 0.125\text{m/s}$.

图12 飞行器以音速 $V_{air} = 1730\text{m/s}$ 飞行时,梁分别以(a), (b), (c), (d), (e), (f)的外伸速度外伸时系统的振动图象

Fig. 12 The nonlinear vibration of the system during extension at the retraction rate (a), (b), (c), (d), (e), (f)

3.5 速度扰动频率的取值对梁振动的影响

图13表示梁在外伸过程中,速度取 $V(t) = 0.001 + 0.001\cos(\omega t)$,对应扰动频率 ω 的取值对梁振动的影响.图14表示梁在回收过程中,速度取 $V(t) = -0.001 - 0.001\cos(\omega t)$,对应扰动频率 ω 的取值对梁振动的影响.从图13和图14中可以得出,速度扰动频率取值的不同,会对梁振动产生比较明显的影响;梁外伸时,随着扰动频率的增大,端点的振幅也随之增大,同时,端点振幅衰减的速度先变快,后减慢;梁回收时,端点振幅经历从衰减到发散的过程.设想:如果能够找到合理的速度扰动频率,对抑制颤振可能会起到一定的作用.

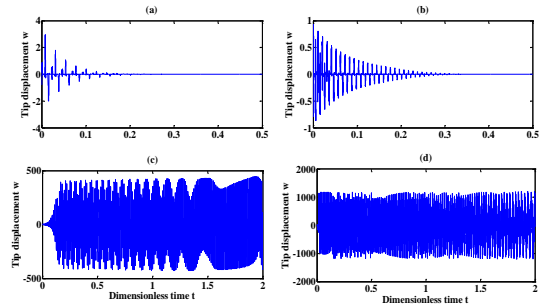


(a) $V(t) = 0.001 + 0.001\cos(20t)$; (b) $V(t) = 0.001 + 0.001\cos(60t)$;
(c) $V(t) = 0.001 + 0.001\cos(120t)$; (d) $V(t) = 0.001 + 0.001\cos(160t)$

图13 梁在外伸过程中,速度扰动频率的取值对梁振动的影响
Fig.13 Transient response of tip of the system during extension with rate: (a), (b), (c), (d)

4 小结

本文以可伸缩机翼的非线性运动控制方程,运用 Galerkin 方法分别对控制方程做二阶 Galerkin 截



(a) $V(t) = -0.001 - 0.001\cos(10t)$; (b) $V(t) = -0.001 - 0.001\cos(15t)$;

(c) $V(t) = -0.001 - 0.001\cos(20t)$; (d) $V(t) = -0.001 - 0.001\cos(30t)$

图14 梁在回收过程中,速度扰动频率的取值对机翼振动的影响
Fig.14 Transient response of tip of the system during retraction with rate: (a), (b), (c), (d)

断,得到常微分形式的非线性动力学方程.然后通过数值模拟得到以下结论:

(1)梁外伸时,相同初速度,不同加速度时,梁端点振动的振幅均有增大的趋势,并且加速度越大,振动的振幅越大.梁外伸的速度对振动的影响较大,外伸速度越大,对梁振动的影响越大;随着时间的增长,端点的振幅越来越大.梁回收过程中,给定相同初速度,不同减加速度,在整体上,梁端点的振幅呈下降趋势,减加速度越大,回收速度减小得越快,梁端点的振幅也衰减得越快.梁回收的速度对振动的影响较大,回收速度越大,对梁振动的影响越大;随着回收时间的增长,端点的振幅越来越小.

(2)飞行器在地面上气动力为0时,梁在外伸过程中,端点位移先增大,后减小;随着外伸速度的增加,梁在整个外伸过程中均处于振动状态;梁在回收过程中,从回收开始,梁端点的振幅急剧增大,并达到最大,随后逐渐衰减;当回收速度增大时,逐渐出现大幅振动和小幅振动交替的现象.

(3)飞行器在高空飞行时,飞行速度越大,机翼端点振动的位移越大.

(4)速度扰动频率取值的不同,会对梁振动产生比较明显的影响.梁外伸时,随着扰动频率的增大,端点的振幅也随之增大,同时,端点振幅衰减的速度先变快,后减慢;梁回收时,端点振幅经历从衰减到发散的过程.

参 考 文 献

- 1 Lentink D, Müller U K, Stamhuis E J, et al. How swifts control their glide performance with morphing wings. *Nature*, 2007, 446:1082~1085
- 2 Heryawan Y, Park H C, Goo N S, et al. Design and dem-

- onstration of a small expandable morphing wing. *Smart Structures and Integrated Systems*, 2005, 5764:224~231
- 3 Seigler T M, Neal D A. Modeling and flight control of large-scale morphing aircraft. *Journal of Aircraft*, 2007, 44:1077~1087
 - 4 Parker S. Development of morphing wing simulation tool using finite element modeling. *Nanotechnology and Material Systems REU*, 2007, 1~5
 - 5 Friswell M I. Morphing concepts for UAVs. In: 21st Bristol UAV Systems Conference, 2006: 13
 - 6 Smoker J, Baz A. Remote control of a morphing model aircraft with distributed sensors. *Sensors and Smart Structures Technologies for Civil, Mechanical, and Aerospace Systems*, 2007, 6529:1~12
 - 7 Michael Skillen D, William Crossley A. Modeling and optimization for morphing wing concept generation II part I. Morphing Wing Modeling and Structural Sizing Techniques, NASA/CR-2008-214902: 1~45
 - 8 Snyder M. P, Sanders B. Vibration and flutter characteristics of a folding wing. In: AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures. Structural Dynamics & Materials Conference, 2005, 1994:1~11
 - 9 Schweiger J. Review of the european research project "Active Aeroelastic Aircraft Structures" with respect to future trends for morphing aircraft design. *Nato Unclassified*, 2009, 168:1~16
 - 10 Tabarrok B, Leech C M, Kim Y I. On the dynamics of an axially moving beam. *Journal of the Franklin Institute*, 1974, 297:201~220)
 - 11 Taleb I A, Misra A K. Dynamics of an axially moving beam submerged in a fluid. *Journal of Hydraulics*, 1981, 15:62~66
 - 12 Wang P K C, Wei J. Vibration in a moving flexible robot arm. *Journal of Sound and Vibration*, 1987, 116:149~160
 - 13 Matsuzaki Y, Taki Y, Toyama M. Vibration of a cantilevered beam during deployment and retrieval: analysis and experiment. *Smart Material and Structures*. 1995, 4(4): 334~338
 - 14 Zhu W D, Ni J. Energetic and stability of translating media with an arbitrarily varying length. *Journal of Vibration and Acoustics*, 2000, 122:295~304
 - 15 Gosselin F, Paidoussis M P, Misra A K. Stability of a deploying/extruding beam in dense fluid. *Journal of Sound and Vibration*, 2007, 299:123~142
 - 16 Poivan M T, Sampaio R. Vibrations of axially moving flexible beams made of functionally graded materials. *Thin-walled Structures*. 2008, 46(2): 112~121
 - 17 Chang J R, Lin W J, Huang C J, et al. Vibration and stability of an axially moving Rayleigh beam. *Applied Mathematical Modeling*, 2010, 34(6):1482~1497
 - 18 刘燕, 张伟, 王冬梅. 可伸缩复合材料悬臂梁的非线性动力学建模及分析. *动力学与控制学报*, 2014, 12(1): 24~29 (Liu Y, Zhang W, Wang D M. Nonlinear dynamics Modeling of axially moving composite laminated cantilever beam. *Journal of Dynamics and Control*, 2014, 12(1): 24~29 (in Chinese))

MODELING AND NUMERICAL ANALYSIS OF AN AXIALLY MOVING COMPOSITE LAMINATED CANTILEVER BEAM *

Liu Yan^{1†} Zhang Wei² Gong Taotao¹

(1. Physics and Space Science College, China West Normal University, 637002, China)

(2. College of Mechanical Engineering, Beijing University of Technology, 100022, China)

Abstract Time-varying nonlinear dynamic responses of a deploying-and-retracting composite laminated cantilever rectangular beam under external excitations were studied. Firstly, the nonlinear dynamic modeling of the deployable-and-retractable laminated composite cantilever beam was established. And then, the time-varying nonlinear dynamic phenomena during the deploying and retracting process of the composite laminated cantilever beam were revealed by solving the time-varying parameter differential equations. Finally, numerical simulations were carried out to analyze the complicated nonlinear dynamics of the axially moving cantilever beam. The results indicated that the moving velocity of the beam and the flight speed of aircraft have significant impact on the dynamic behavior of the beam, while the initial conditions have little influence.

Key words composite material laminated beam, higher-order shear deformation theory, pneumatic elastic piston theory, nonlinear dynamic

Received 25 September 2019, revised 05 November 2019.

* The key project supported by the National Natural Science Foundation of China (10732020) and the Bureau of Science and Technology Nanchong City Program (18YFZJ0033).

† Corresponding author E-mail: liuyan2004@cwnu.edu.cn