

车辆系统的非线性行驶动力学响应*

韩彦伟^{1†} 张子建²

(1.河南科技大学 土木工程学院,洛阳 471023)(2.南京航空航天大学 航天学院,南京 210016)

摘要 深入研究车辆在粗糙路面行驶而激励引起的非线性振动响应,对揭示复杂动态响应机理和提升动力学性能具有重要的理论意义与工程价值.首先,本文利用运动非线性机制,建立质心垂向平移和绕质心俯仰的两自由度车辆系统的力学模型,利用拉格朗日方程导出系统的非线性运动微分方程,分析自由振动系统的非线性回复力、势能曲线特性及平衡点稳定性.其次,针对自由振动系统,分析线性近似系统的频率比随参数的变化规律,又利用谐波平衡法分析非线性近似系统的幅频曲线特性.最后,针对强迫振动系统,利用数值方法得到系统的阻尼、路面波长及波幅对幅频响应曲线的影响规律.结果表明,新型车辆模型具有复杂非线性动力学特性,为行驶车辆系统提供参数设计和揭示振动机理提供理论参考.

关键词 车辆系统, 行驶动力学, 非线性恢复力, 振幅比, 幅速响应

DOI: 10.6052/1672-6553-2020-048

引言

随着汽车、高铁、轨道交通等车辆系统的运行速度大幅提高,导致行驶车辆的非线性振动演化与机理问题引起国内外学者的广泛关注.在车辆的道路行驶过程中,由于路面不平会引起车体的振动,如垂向振动、前后俯仰振动及左右摇摆振动等,这些振动会降低车辆的操作稳定性、乘坐舒适性、驾驶的安全性,增加油耗、减少使用寿命.当车辆高速行驶时,车体的振动越加强烈,导致各项性能愈来愈差.为解决这些问题,一种方法是通过提升路面的平顺度,从而减少路面激励输入;另一种方法是在轮胎与车身之间安装弹簧阻尼悬架系统,实现对路面激励的隔离,从而实现减震和降噪.其中非线性悬架模型研究与应用是非常重要的方法,成为了车辆工程领域的学术焦点之一.

非线性车辆悬架系统的复杂非线性振动特性得到许多学者的广泛关注.李韶华^[1]研究了具有非线性刚度和 Bingham 阻尼的单自由度悬架系统亚谐共振和奇异性.孙蓓蓓^[2]分析了橡胶悬架两自由度立方非线性刚度车辆系统的幅频响应、转迁集及分岔等非线性动力学特性.高大威^[3]考虑双频激励

作用下的三次非线性刚度与阻尼单自由度悬架系统的混沌运动及混沌追踪控制方法.朱峰^[4]给出了五次阻尼非线性单自由度非线性系统的混沌特性及其对稳定性的影响.丁继斌^[5]利用 AMEsim 仿真方法研究了油气悬架模型两自由度车辆系统的亚谐波和超谐波共振特性.牛治东^[6]得到了随机激励作用下迟滞非线性单自由度悬架系统的混沌振动及混沌振动临界条件.

综上所述,现有研究多集中在单、两自由度系统的垂直方向振动特性,而对垂向与俯仰方向的非线性耦合振动较少涉及^[7-9].另外,立方刚度非线性与立方阻尼非线性均是对原系统的近似逼近,无法实现对非线性车辆系统的精确描述.因此,本文基于运动非线性机制,建立大幅振动条件下垂向和俯仰耦合的精确非线性动力学模型,基于该模型可精确研究非线性车辆系统的复杂振动响应.

1 力学模型

1.1 动力学模型

如图 1 所示,行驶车辆系统模拟在不平道路上行驶车辆的振动动力学简图.关于力学模型中参数设定如下:车辆的簧载质量为 m ,相对质心 O 的俯仰转动惯量为 I_c ,前、后悬架弹簧支撑刚度分别为 k_1 和 k_2 ,

2019-09-02 收到第 1 稿,2020-02-21 收到修改稿.

* 国家自然科学基金资助项目(51705241)

† 通讯作者 E-mail: yanweihan@haust.edu.cn

前、后悬架阻尼器的阻尼系数分别为 c_1 和 c_2 , 车辆行驶速度为 v , 汽车质心横坐标和纵坐标分别为 x 和 y , 转动角为 θ , 质心 O 到前、后轴的距离分别为 l_1 和 l_2 , 轴距为 $l=l_1+l_2$, 路面波长为 l_3 , 路面波幅 h_0 .

车辆前轮和后轮的垂向位移分别为 y_1 和 y_2 , 假

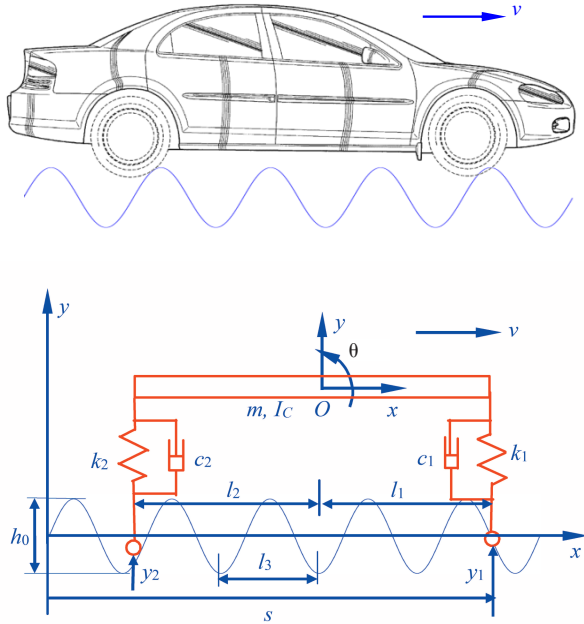


图1 两自由度车辆模型

Fig.1 The model of two degree-of-freedom vehicle

设路面波形状为:

$$y_1 = h_0 \sin\left(\frac{2\pi s}{l_3}\right), y_2 = h_0 \sin\left(\frac{2\pi(s-l)}{l_3}\right) \quad (1)$$

式中, $s = vt$ 为行驶距离.

表1给出车辆系统参数的取值范围^[10,11], 包括汽车簧载质量、汽车转动惯量、悬架刚度、悬架阻尼、轴距、速度、路面波幅和波长及几何尺寸等.

设车辆系统的动能、势能及瑞利耗散函数分别为:

$$E_k = \frac{1}{2} m \dot{y}^2 + \frac{1}{2} I_c \dot{\theta}^2 \quad (2a)$$

$$E_p = \frac{1}{2} k_1 (y - l_1 \sin\theta - y_1)^2 + \frac{1}{2} k_2 (y + l_2 \sin\theta - y_2)^2 + mgy \quad (2b)$$

$$\Psi = \frac{1}{2} c_1 \left(\frac{dy}{dt} - l_1 \frac{d\theta}{dt} \sin\theta \right)^2 + \frac{1}{2} c_2 \left(\frac{dy}{dt} + l_2 \frac{d\theta}{dt} \sin\theta \right)^2 \quad (2c)$$

$$Q_1 = k_1 y_1 + k_2 y_2 + mgy \quad (2d)$$

$$Q_2 = -k_1 l_1 y_1 + k_2 l_2 y_2 \quad (2e)$$

其中, $\dot{y} = dy/dt$, $\dot{\theta} = d\theta/dt$ 分别为车辆质心的垂向速度和转动角速度; Q_1 和 Q_2 分别为垂向广义力和转向的广义力矩.

表1 汽车系统的参数列表

Table 1 Parameters of vehicle system

Symbols	Value	Units	Physical parameters
m	1000—2000	kg	Total mass of car body
I_c	1000—2000	kg·m ²	Rotational inertia
k_1	20—40	kN/m	Stiffness coefficient of front suspension
k_2	20—40	kN/m	Stiffness coefficient of back suspension
c_1	1000—2000	N·s/m	Damping coefficient of front suspension
c_2	1000—2000	N·s/m	Damping coefficient of back suspension
l_1	1—1.5	m	Displacement between front wheel and the center of mass
l_2	1—1.5	m	Displacement between back wheel and the center of mass
l_3	4—100	m	Wavelength of the road
h_0	0—0.2	m	Amplitude of the road
v	0—33	m/s	Velocity of car

引入 Lagrange 函数:

$$\Pi = E_k - E_p$$

既有保守力又有非保守力的 Lagrange 方程为:

(3)

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \frac{\partial \Pi}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial \Pi}{\partial y} + \frac{\partial \Psi}{\partial \dot{y}} = Q_1 \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial \Pi}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial \Pi}{\partial \theta} + \frac{\partial \Psi}{\partial \dot{\theta}} = Q_2 \end{cases} \quad (4)$$

将函数表达式(3)代入 Lagrange 方程(4)式, 建立车辆行驶系统的两自由度非线性运动微分方程:

$$\begin{cases} m\ddot{y} + c_1(\dot{y} - l_1\dot{\theta}\sin\theta) + c_2(\dot{y} + l_2\dot{\theta}\sin\theta) + \\ k_1(y - l_1\sin\theta - y_1) + \\ k_2(y + l_2\sin\theta - y_2) + mgy = 0 \\ I_c\ddot{\theta} + c_1l_1\sin\theta(\dot{y} - l_1\dot{\theta}\sin\theta) + \\ c_2l_2\sin\theta(\dot{y} + l_2\dot{\theta}\sin\theta) - \\ k_1l_1(y - l_1\sin\theta - y_1)\cos\theta + \\ k_2l_2(y + l_2\sin\theta - y_2)\cos\theta = 0 \end{cases} \quad (5)$$

采用如下无量纲参数变换关系式:

$$\begin{aligned} Y &= \frac{y}{l_1}, \omega_1^2 = \frac{k_1}{m}, \omega_2^2 = \frac{k_2}{m}, \omega_1 t = T, \\ \xi_1 &= \frac{c_1}{2\sqrt{k_1 m}}, \xi_2 = \frac{c_2}{2\sqrt{k_2 m}}, \alpha = \frac{I_c}{ml_1^2}, \\ \beta &= \frac{l_2}{l_1}, \gamma = \frac{k_2}{k_1}, \rho = \frac{mg}{kl_1}, \lambda = \frac{l_3}{l_1}, \\ a &= \frac{h_0}{l_1}, Y_1 = \frac{y_1}{l_1}, Y_2 = \frac{y_2}{l_1}, V = \frac{v}{l_1\omega_1} \\ Y_1 &= a \sin\left(\frac{2\pi(VT - 1 - \beta)}{\lambda}\right), \\ Y_2 &= a \sin\left(\frac{2\pi VT}{\lambda}\right) \end{aligned} \quad (6)$$

将车辆振动系统(5)进行无量纲参数处理, 得到非线性车辆系统的无量纲运动方程:

$$\begin{cases} Y'' + 2\xi_1(Y' - \theta'\sin\theta) + 2\xi_2(Y' + \beta\theta'\sin\theta) + \\ (Y - \sin\theta - Y_1) + \gamma(Y + \beta\sin\theta - Y_2) + \rho = 0 \\ \alpha\theta'' + 2\xi_1\sin\theta(Y' - \theta'\sin\theta) + \\ 2\xi_2\beta\sin\theta(Y' + \beta\theta'\sin\theta) - \\ (Y - \sin\theta - Y_1)\cos\theta + \gamma\beta(Y + \beta\sin\theta - Y_2)\cos\theta = 0 \end{cases} \quad (7)$$

其中, $Y' = dY/dT, \theta' = d\theta/dT$ 分别为汽车质心的无量纲竖向速度与无量纲转动角速度.

令 $Y' = U, \theta' = \omega$, 方程(7)可变换为如下二阶方程组的形式:

$$\begin{cases} Y' = U \\ U' = -[2\xi_1(Y' - \theta'\sin\theta) + 2\xi_2(Y' + \beta\theta'\sin\theta) + \\ (Y - \sin\theta - Y_1) + \gamma(Y + \beta\sin\theta - Y_2) + \rho] \\ \theta' = \omega \\ \omega' = -[2\xi_1\sin\theta(Y' - \theta'\sin\theta) + \\ 2\xi_2\beta\sin\theta(Y' + \beta\theta'\sin\theta) - \\ (Y - \sin\theta - Y_1)\cos\theta + \gamma\beta(Y + \beta\sin\theta - Y_2)\cos\theta] \end{cases} \quad (8)$$

系统(8)是一个带有正弦和余弦三角函数的非线性振动耦合系统, 具有复杂的非线性动力学响应

行为.

1.2 非线性恢复力、势能及相图分析

系统(8)的无量纲非线性恢复力包括: 垂直方向的恢复力 f_F 和转动方向的恢复力矩 f_M , 其分别为:

$$\begin{aligned} f_F &= \frac{1}{k_1 l_1} \frac{\partial E_P}{\partial Y} \\ &= (Y - \sin\theta - Y_1) + \gamma(Y + \beta\sin\theta - Y_2) + \rho \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} f_M &= \frac{1}{k_1 l_1^2} \frac{\partial E_P}{\partial \theta} = -(Y - \sin\theta - Y_1)\cos\theta + \\ &\quad \gamma\beta(Y + \beta\sin\theta - Y_2)\cos\theta \end{aligned} \quad (10)$$

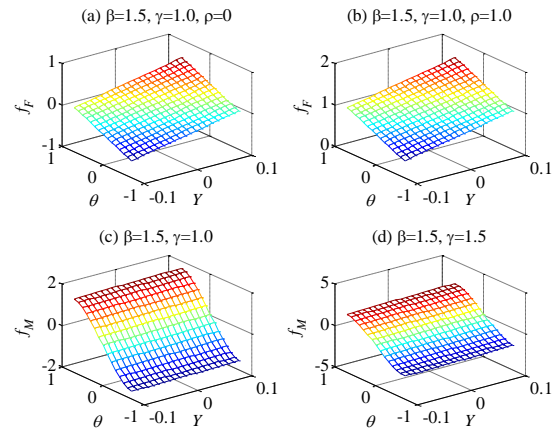


图 2 非线性力曲面图. (a, b) 垂向恢复力, (c, d) 转动力矩
Fig.2 Nonlinear forces. (a, b) vertical force, (c, d) rotational torque

如图 2 所示, 给出了非线性力函数(9)的曲面图, 当参数 β, γ 和 ρ 的不同取值, 图 2(a, b) 给出了回复力 f_F 与俯仰角 θ 和垂向为 Y 之间为曲面关系, 表明在两个振动方向上有较强的耦合回复力关系. 图 2(c, d) 给出了力矩 f_M 与俯仰角 θ 和垂向为 Y 之间也是曲面关系, 但是在两个振动方向上的耦合力矩较弱.

系统(8)的无量纲势能函数为:

$$\begin{aligned} E_{PN} &= \frac{1}{2} [(Y - \sin\theta - Y_1)^2 + \\ &\quad \gamma(Y + \beta\sin\theta - Y_2)^2] + \rho Y \end{aligned} \quad (11)$$

图 3 给出了无量纲势能函数(11)的曲面图. 图 3(a) 为不考虑重力的势能曲面特性图, 图 3(b) 给出了有重力情况下的势能曲面.

积分车辆系统运动方程(8), 可得到自由振动系统相轨迹方程为:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \dot{y}^2 + \frac{1}{2} \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} (Y - \sin\theta - Y_1)^2 + \\ \frac{1}{2} \gamma (Y + \beta\sin\theta - Y_2)^2 + \rho Y = E \end{aligned} \quad (12)$$

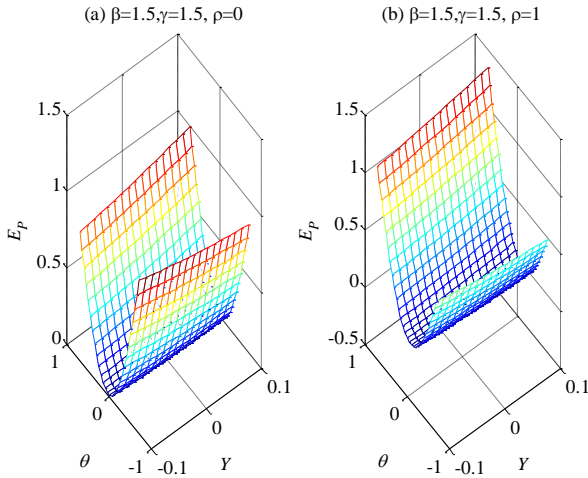


图3 势能曲线图

Fig.3 Potential energy swryaces

其中积分常数 E 为系统的总机械能,不同的机械能 E 对应于不同的相轨迹超曲面.

1.3 平衡点稳定性

令速度、加速度、角速度与角加速度均为零,定义平衡点集为:

$$E_0 = \{(Y_0, \dot{Y}_0, \theta_0, \dot{\theta}_0) | f_F = 0, \dot{Y}_0 = 0, f_M = 0, \dot{\theta}_0 = 0\} \quad (13)$$

在平衡点 $(x_0, \dot{x}_0, \theta_0, \dot{\theta}_0)$ 处的矩阵为:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 E_{PN}}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 E_{PN}}{\partial x \partial \theta} \\ \frac{\partial^2 E_{PN}}{\partial \theta \partial x} & \frac{\partial^2 E_{PN}}{\partial \theta^2} \end{bmatrix}_{E_0} = \begin{bmatrix} 1 + \gamma & \gamma\beta - 1 \\ \gamma\beta - 1 & 1 + \gamma\beta^2 \end{bmatrix} \quad (14)$$

对应的本征值方程为:

$$\begin{vmatrix} \lambda^2 E + A \\ \lambda^2 + 1 + \gamma & \gamma\beta - 1 \\ \gamma\beta - 1 & \alpha\lambda^2 + 1 + \gamma\beta^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (15)$$

展开上式,得到:

$$\alpha\lambda^4 + (\alpha(1 + \gamma) + (1 + \gamma\beta^2))\lambda^2 + \alpha(1 + \gamma)(1 + \gamma\beta^2) - (\gamma\beta - 1)^2 = 0 \quad (16)$$

令其系数分别为:

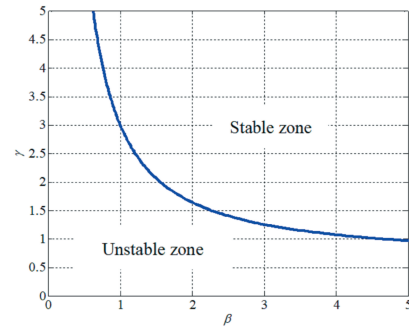
$$\begin{aligned} a_0 &= \alpha, a_1 = \alpha(1 + \gamma) + (1 + \gamma\beta^2), \\ a_2 &= \alpha(1 + \gamma)(1 + \gamma\beta^2) - (\gamma\beta - 1)^2 \end{aligned} \quad (17)$$

根据稳定性条件和Routh-Hurwitz判据,计算行列式:

$$\begin{cases} \Delta_1 = \alpha > 0, \\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ 0 & a_2 \end{vmatrix} = (\alpha(1 + \gamma) + (1 + \gamma\beta^2))^2 \\ -\alpha(1 + \gamma)(1 + \gamma\beta^2)(\gamma\beta - 1)^2 > 0 \end{cases} \quad (18)$$

利用式(18),可以分析系统参数对平衡点稳定性

的影响规律.图4给出了参数平面 (β, γ) 中稳定区域与不稳定区域的分界曲线.当参数 (β, γ) 取值在曲线的上部为稳定区域,而在曲线的下部则为不稳定区域.

图4 参数 (β, γ) 平面中稳定区域图Fig.4 Stability diagram in parameters (β, γ) plane

2 自由振动

2.1 近似线性系统自由振动

针对非线性车辆系统(8)的自由振动,只保留 y, θ 及其导数得一次项,化简得到自由振动系统的线性运动微分方程为:

$$\begin{cases} Y'' + (1 + \gamma)Y - (1 - \gamma\beta)\theta - Y_1 - Y_2 + \rho = 0 \\ \alpha\theta'' - (1 - \gamma\beta)Y + (1 + \gamma\beta^2)\theta + Y_1 - \gamma Y_2 = 0 \end{cases} \quad (19)$$

或者写为矩阵形式:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y'' \\ \theta'' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & -b \\ -c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (20)$$

其中 $a = 1 + \gamma, b = c = 1 - \gamma\beta, d = 1 + \gamma\beta^2$.

令系统(20)的解为:

$$\begin{pmatrix} Y \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} \cos(\omega t - \psi) \quad (21)$$

将式(21)代入方程(20),得到特征行列式:

$$\begin{vmatrix} a - \omega^2 & -b \\ -c & d - \alpha\omega^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (22)$$

式(22)给出了振动频率与系统参数之间的确定性关系,是关于 ω^2 的二次代数方程,称为系统的特征方程,可以解出两个根为:

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{1}{2}(a + d) \mp \frac{1}{2}\sqrt{(a + d)^2 - 4(ad - bc)^2} \quad (23)$$

一阶固有频率 ω_1 和二阶固有频率 ω_2 由 a, b, c, d 确定,其中 a, b, c, d 由系统参数 β, γ 唯一确定.

将 ω_1 和 ω_2 分别代入系统(22),得到振幅比为:

$$\begin{cases} r_1 = \frac{A_2^{(1)}}{A_1^{(1)}} = \frac{a - \omega_1^2}{b} = \frac{c}{d - \omega_1^2} \\ r_2 = \frac{A_2^{(2)}}{A_1^{(2)}} = \frac{a - \omega_2^2}{b} = \frac{c}{d - \omega_2^2} \end{cases} \quad (24)$$

得到一阶和二阶振型分别为

$$\begin{cases} \{A^{(1)}\} = \begin{cases} A_1^{(1)} \\ A_2^{(1)} \end{cases} = \begin{cases} 1 \\ c \\ d - \omega_1^2 \end{cases} \\ \{A^{(2)}\} = \begin{cases} A_1^{(2)} \\ A_2^{(2)} \end{cases} = \begin{cases} 1 \\ c \\ d - \omega_2^2 \end{cases} \end{cases} \quad (25)$$

图 5(a) 为振幅比随参数 β 的变换趋势图, 容易看出, 系数 β 等于 1 是一个模态转换点. 图 5(b) 为振幅比随参数 γ 的变换趋势图, 同样, 系数 γ 等于 1 是一个模态转换点. 图 5(c) 为振幅比 r_1 与参数 β, γ 关系图, 图 5(d) 为振幅比 r_2 与参数 β, γ 关系图.

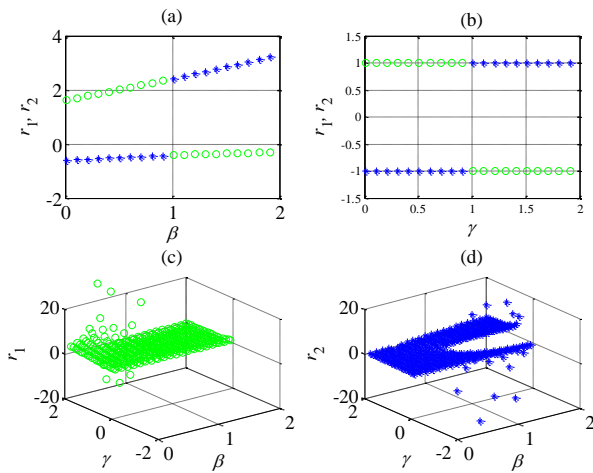


图 5 振幅比与参数的关系. \circ 代表 r_1 , $*$ 代表 r_2

Fig.5 Relationship of ratio of amplitude and parameters. \circ denoted r_1 , $*$ denoted r_2

2.2 非线性近似系统的自由振动

针对车辆系统(8)的自由振动, 如果保留 x, θ 及其导数得三次项, 化简为非线性自由振动系统:

$$\begin{cases} Y'' + (1 + \gamma)Y + (\gamma\beta - 1)\left(\theta - \frac{1}{6}\theta^3\right) = 0 \\ \alpha\theta'' + (\gamma\beta - 1)Y + (1 + \gamma\beta)\left(\theta - \frac{1}{6}\theta^3\right) = 0 \end{cases} \quad (26)$$

利用谐波平衡法, 令系统(26)的一阶谐波解近似解为:

$$\begin{pmatrix} Y \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} \cos \omega t \quad (27)$$

将解(27)代入非线性自由振动方程(26), 得到振幅 A_1, A_2 与自由振动频率之间的关系, 即幅频方程为:

$$\begin{cases} -\omega^2 A_1 + (1 + \gamma)A_1 + (\gamma\beta - 1)\left(A_2 - \frac{1}{8}A_2^3\right) + \dots = 0 \\ -\omega^2 \alpha A_2 + (\gamma\beta - 1)A_2 + (1 + \gamma\beta^2)\left(A_2 - \frac{1}{8}A_2^3\right) + \dots = 0 \end{cases} \quad (28)$$

其中, 省略号 \dots 代表高于 A_2^3 的高次谐波项. 在方程组(28)中, 引入模态参数:

$$\phi = \frac{A_2}{A_1} \quad (29)$$

将式(29)代入方程(28), 得到:

$$\begin{cases} -\omega^2 A_1 + (1 + \gamma)A_1 + (\gamma\beta - 1)\left(\phi A_1 - \frac{1}{8}\phi A_1^3\right) = 0 \\ -\alpha\phi\omega^2 A_1 + (\gamma\beta - 1)A_1 + (1 + \gamma\beta^2)\left(\phi A_1 - \frac{1}{8}\phi A_1^3\right) = 0 \end{cases} \quad (30)$$

给定 ϕ 的值, 可以得到振动频率 ω 、振幅 A_1 和 A_2 , 导出如下:

$$\begin{cases} A_1 = 2\sqrt{2} \sqrt{\frac{(1 + \gamma) + (\gamma\beta - 1)\phi - \frac{\gamma\beta - 1}{\alpha\phi} - \frac{1 + \gamma\beta^2}{\alpha}}{(\gamma\beta - 1) - \frac{1 + \gamma\beta^2}{\alpha}}} \\ A_2 = 2\sqrt{2} \phi \sqrt{\frac{(1 + \gamma) + (\gamma\beta - 1)\phi - \frac{\gamma\beta - 1}{\alpha\phi} - \frac{1 + \gamma\beta^2}{\alpha}}{(\gamma\beta - 1) - \frac{1 + \gamma\beta^2}{\alpha}}} \end{cases} \quad (31)$$

设定系统参数为 $\alpha=1, \beta=0.5, \gamma=0.5$, 并且令 ϕ 在适当的取值范围, 图 6 给出了系统的幅频响应曲线, 结果显示, 非线性汽车振动系统的固有频率 ω 和模态参数均随振幅的变化而变化, 得到 $\omega=0.75$ 和 $\omega=1.45$ 两个固有频率.

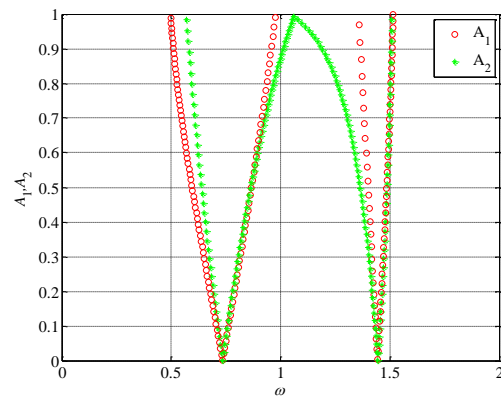


图 6 振幅与自由振动频率的关系图

Fig.6 Relationship of amplitude and frequency of free vibration

3 强迫振动

当考虑到路面对车辆的激励作用, 导出强迫振动车辆系统的非线性动力学方程:

$$\begin{cases} Y'' + 2\xi_1(Y' - \theta' \sin\theta) + 2\xi_2(Y' + \beta\theta' \sin\theta) + \\ (Y - \sin\theta) + \gamma(Y + \beta \sin\theta) + \rho \\ = a \sin\left(\frac{2\pi(VT - 1 - \beta)}{\lambda}\right) + \gamma a \sin\left(\frac{2\pi VT}{\lambda}\right) \\ \alpha\theta'' + 2\xi_1 \sin\theta(Y' - \theta' \sin\theta) + 2\xi_2 \beta \sin\theta(Y' + \beta\theta' \sin\theta) - \\ (Y - \sin\theta)\cos\theta + \gamma\beta(Y + \beta \sin\theta)\cos\theta \\ = \left[a \sin\left(\frac{2\pi VT - 1 - \beta}{\lambda}\right) + \gamma a \sin\left(\frac{2\pi VT}{\lambda}\right) \right] \cos\theta \end{cases} \quad (32)$$

车辆系统(32)是一个复杂的非线性耦合动力学方程,无法直接用理论方法进行求解,本文利用数值积分的方法研究系统的振幅-速度响应特性图。

3.1 阻尼对响应的影响

设定汽车系统参数分别为 $m=1200\text{kg}$, $I_c=1500\text{kg}\cdot\text{m}^2$, $k_1=k_2=20\text{kN/m}$, $l_1=1.2\text{m}$, $l_2=1.3\text{m}$, $l_3=60\text{m}$, $h_0=0.1\text{m}$, 容易得到无量纲参数为 $\omega_1=\omega_2=19.90\text{ rad/s}$, $\alpha=0.868$, $\beta=1.08$, $\gamma=1.0$, $\lambda=41.667$, $\rho=0.049$, $\xi_1=\xi_2=0.0484$, $a=0.0833$ 。

图7给出将阻尼分别设定为 $c_1=c_2=1000$ (红色圆圈○代表 A_1 , 红色加号+代表 A_2), $c_1=c_2=1500$ (绿色三角形△代表 A_1 , 绿色星形*代表 A_2), $c_1=c_2=2000$ (蓝色方形□代表 A_1 , 蓝色五角星★代表 A_2), 得到速度振幅响应图。研究表明,振幅 A_1 最大值分别为 0.9, 0.6 和 0.45, 增大阻尼可以有效的减小振幅 A_1 ; 而对振幅 A_2 则减小效果较小, 最大振幅分别为 0.45, 0.29 和 0.28。

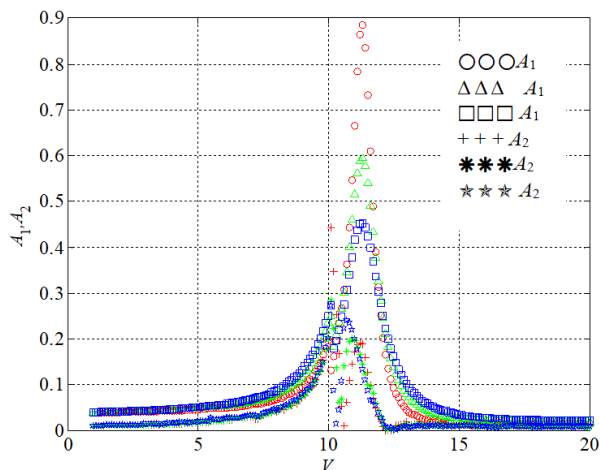


图7 振幅与速度关系图

Fig.7 Relationship of amplitude and velocity

3.2 路面波幅对响应的影响

设定参数分别为 $m=1200\text{kg}$, $I_c=1500\text{kg}\cdot\text{m}^2$, $k_1=k_2=20\text{kN/m}$, $c_1=c_2=1500\text{Ns/m}$, $l_1=1.2\text{m}$, $l_2=1.3\text{m}$, $l_3=$

$=50\text{m}$, 得无量纲参数为 $\omega_1=\omega_2=19.90\text{rad/s}$, $\alpha=0.868$, $\beta=1.08$, $\gamma=1.0$, $\lambda=41.667$, $\rho=0.049$, $\xi_1=\xi_2=0.0484$ 。

图8给出波幅分别为 $h_0=0.05$ (红色圆圈○代表 A_1 , 红色加号+代表 A_2), $h_0=0.1$ (绿色三角形△代表 A_1 , 绿色星形*代表 A_2), $h_0=0.15$ (蓝色方形□代表 A_1 , 蓝色五角星★代表 A_2) 的速度振幅响应图, 结果显示: 增大路面波幅 h_0 将导致振幅 A_1 增大, 最大振幅分别为 0.3, 0.6 和 0.9; 同样导致振幅 A_2 的, 增大振幅分别为 0.18, 0.29 和 0.38。

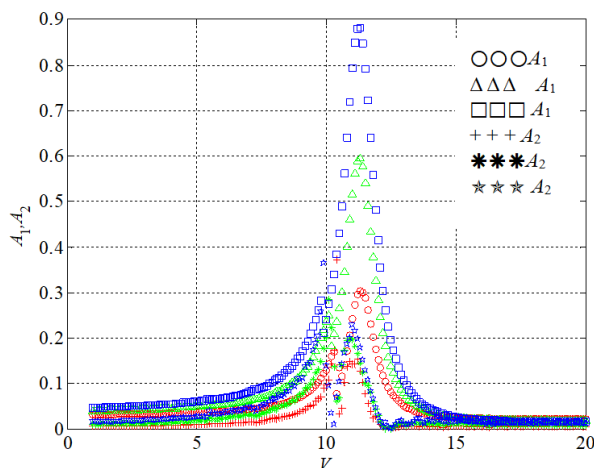


图8 振幅与速度关系图

Fig.8 Relationship of amplitude and velocity

3.3 路面波长对响应的影响

设参数分别为 $m=1200\text{kg}$, $I_c=1500\text{kg}\cdot\text{m}^2$, $k_1=k_2=20\text{kN/m}$, $c_1=c_2=1500\text{Ns/m}$, $l_1=1.2\text{m}$, $l_2=1.3\text{m}$, $h_0=0.1\text{m}$, 则无量纲参数为 $\omega_1=\omega_2=12.90\text{ rad/s}$, $\alpha=0.868$, $\beta=1.08$, $\gamma=1.0$, $\lambda=83.333$, $\rho=0.049$, $\xi_1=\xi_2=0.0484$, $a=0.0833$ 。

图9给出不同路面波长时, 即 $l_3=30$ (红色圆圈○代表 A_1 , 红色加号+代表 A_2), $l_3=60$ (绿色三角形△代表 A_1 , 绿色星形*代表 A_2), $l_3=90$ (蓝色方形□代表 A_1 , 蓝色五角星★代表 A_2), 分别得到速度振幅响应图。容易发现, 增大路面波长对振幅 A_1 减和振幅 A_2 的影响, 振幅 A_1 共振速度分别为 $V=6, 11$ 及 17 , 振幅 A_2 共振速度分别为 $V=5, 10$ 及 15 , 结果表明, 路面波长越大共振速度越大, 这与工程实际是相符的。

4 小结

针对行驶中的车辆系统, 建立了新型两自由度非线性耦合振动车辆系统, 通过理论分析与数值研

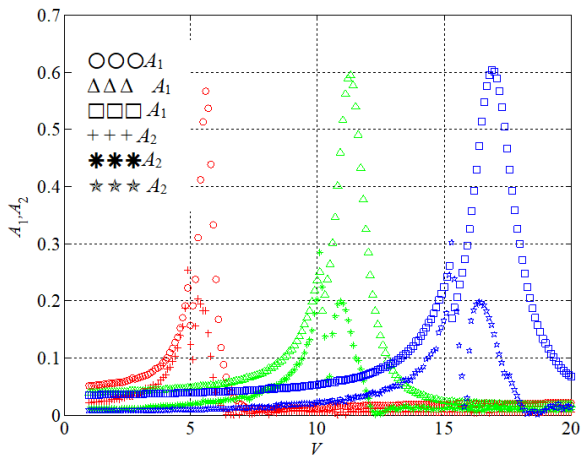


图9 振幅与速度的关系图

Fig.9 Relationship of amplitude and velocity

究得到如下结论:

(1)在运动非线性机制基础上,建立了上下沉浮和前后俯仰的车辆力学模型,利用Lagrange方程推导出系统的精确运动微分方程,带有三角函数的非线性方程可以精确地刻画车辆系统的非线性特性.

(2)对于线性系统的自由振动,分析得到振幅比随系统参数的变换曲线,发现振幅比在1处有一个转换点;对于非线性近似系统的自由振动,利用谐波平衡法得到幅频响应曲线,发现在0.75和1.45处两个固有频率.

(3)针对车辆系统的非线性动力学系统,利用数值仿真分析系统的振幅-速度响应关系图,研究表明:阻尼越大振幅响应越小、路面波幅越大响应振幅越大及系路面波长越大共振速度越大.

参 考 文 献

- 李韶华,杨绍普.一种非线性汽车悬架的亚谐共振及奇异性.振动工程学报,2007,20(2):168~173(Li S H, Yang S P. Subharmonic resonance and singularity of a nonlinear automobile suspension. *Journal of Vibration Engineering*, 2007, 20(2): 168~173 (in Chinese))
- 孙蓓蓓,周长峰,张晓阳,等.工程车辆橡胶悬架系统的非线性动力学特性.东南大学学报(自然科学版),2007,37(6):974~979(Sun B B, Zhou C F, Zhang X Y, et al. Nonlinear dynamic characteristics of rubber suspension system for engineering vehicles. *Journal of Southeast University (Natural Science Edition)*, 2007, 37(6): 974~979(in Chinese))
- 高大威,崔玲,王昊.追踪控制双频激励下汽车悬架系
- 统的混沌运动.振动与冲击,2010,29(5):58~61(Gao D W, Cui L, Wang H. Tracking and controlling chaotic motion of automobile suspension system under dual-frequency excitation. *Journal of Vibration and Shock*, 2010, 29(5): 58~61(in Chinese))
- 丁继斌.油气悬架车辆振动非线性特性分析与仿真研究.南京工业职业技术学院学报,2015,15(1):1~4(Ding J B. Analysis and simulation of nonlinear characteristics of oil and gas suspension vehicle vibration. *Journal of Nanjing Institute of Industry and Technology*, 2015, 15(1): 1~4(in Chinese))
- 牛治东,吴光强.随机激励下汽车非线性悬架系统的混沌研究.振动与冲击,2016,35(17):39~43(Niu Z D, Wu G Q. Chaos study of automotive nonlinear suspension system under random excitation. *Journal of Vibration and Shock*, 2016, 35(17): 39~43(in Chinese))
- 朱峰,赵文礼.阻尼非线性条件下汽车悬架的混沌研究.杭州电子科技大学学报,2013,33(3):65~68(Zhu F, Zhao W L. Chaos study of automobile suspension under damping nonlinear conditions. *Journal of Hangzhou Dianzi University*, 2013, 33(3): 65~68(in Chinese))
- 喻凡,李道飞.车辆动力学集成控制综述.农业机械学报,2008,39(6):1~7(Yu F, Li D F. Review of integrated control of vehicle dynamics. *Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery*, 2008, 39(6): 1~7 (in Chinese))
- 徐达,苏忠亭,韩小平,等.步兵战车行驶动力学模型仿真与修正.系统仿真学报,2014,26(2):470~474(Xu D, Su Z T, Han X P, et al. Simulation and modification of dynamic model of infantry fighting vehicles. *Journal of System Simulation*, 2014, 26(2):470~474(in Chinese))
- 朱培,任兴民,秦卫阳.移动车辆桥梁系统中的振动能量获取.动力学与控制学报,2018,16(4):361~369(Zhu P, Ren X M, Qin W Y. Piezoelectric energy harvesting in moving-vehicle bridge system. *Journal of Dynamics and Control*, 2018, 16(4):361~369(in Chinese))
- 李志明.国际平整度指数与路面波长及波幅数值计算分析.交通与运输(学术版),2010(1):92~95(Li Z M. Numerical calculation of the relationship between international roughness index and pavement wavelength and wave amplitude. *Traffic and transportation (Academic Edition)*, 2010(1): 92~95(in Chinese))
- 李韶华,张兵,黄玉亭.刚柔耦合重型汽车建模及通过连续减速带的平顺性分析.动力学与控制学报,2018,16(5):397~402(Li S H, Zhang B, Huang Y T. Modeling of rigid-flexible coupled heavy-duty vehicle and ride comfort analysis when passing through continuous speed bumps. *Journal of Dynamics and Control*, 2018, 16(5): 397~402 (in Chinese))

RESEARCH ON NONLINEAR DRIVING DYNAMICS OF A VEHICLE SYSTEM *

Han Yanwei^{1†} Zhang Zijian²

(1.School of Civil Engineering, Henan University of Science and Technology, Luoyang 471023, China)

(2.College of Astronautics, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China)

Abstract The nonlinear vibration of a moving vehicle system excited by the incentives of the road roughness was investigated to reveal the mechanism of complicated dynamic behaviors and to improve the dynamic performance. First of all, considering the up and down translational motion and the pitch rotation around the center of mass, a two degrees-of-freedom nonlinear dynamic model of the vehicle system was established, and then the nonlinear equations of motion were derived by Lagrange's Equation. The nonlinear restoring force, the characteristics of potential energy and the stability of equilibrium point were analyzed. Secondly, for the free vibration, the effects of parameters on the amplitude ratio of the linearized system were discussed, and the amplitude-frequency characteristics of the nonlinear system were revealed by using the harmonic balance method. Finally, for the forced vibration, the complicated nonlinear responses were obtained by numerical simulations, and the effects of the damping and road roughness on the amplitude-velocity responses were studied. The results show that this nonlinear vehicle dynamic model can effectively explore the complicated dynamic behaviors, which provides a theoretical guideline for the design of a vehicle system.

Key words vehicle system, driving dynamics, nonlinear restoring force, amplitude ratio, amplitude-velocity response

Received 2 September 2019, revised 21 February 2020.

* The project supported by the National Natural Science Foundation of China (51705241)

† Corresponding author E-mail: yanweihan@haust.edu.cn