

两自由度齿轮传动系统全局动力学研究*

周杜[†] 乐源 李高磊 吴鑫

(西南交通大学 力学与工程学院, 成都 610031)

摘要 齿侧间隙的存在,使齿轮传动系统存在着丰富的非线性动力学行为.考虑两自由度齿轮传动系统的动力学模型,利用数值方法分析系统的分岔和混沌动力学行为.通过简单胞映射方法对非线性齿轮系统进行全局分析,得到系统的吸引子,吸引域等全局特性.结果显示:随着激振频率的变化,系统存在多个周期解共存以及周期解与混沌运动共存现象.最后利用系统的相轨线图与庞加莱截面图进行对比分析,在不同的初值条件下,系统呈现出不同的周期运动或混沌运动.利用简单胞映射方法的数值计算结果可以实现在不良参数条件下,通过合理控制系统的初值条件而获得理想的系统响应.

关键词 间隙, 齿轮传动系统, 分岔, 混沌, 简单胞映射, 全局分析

DOI: 10.6052/1672-6553-2019-003

引言

齿轮系统动力学作为一门工程科学,主要研究齿轮系统在传递动力和运动过程中的动力学行为.齿轮系统是一类典型的非线性振动系统,国内外学者^[1-4]将齿轮的啮合阻尼、齿侧间隙以及时变啮合刚度等非线性因素对系统动力学行为的影响作为研究重点,研究手段包括解析方法和数值模拟.MA等^[5]运用谐波平衡法分析了含周期时变、分段非线性的刚度的齿轮系统模型,发现了齿轮系统的单周期响应和次谐波响应.唐进元等^[6]利用图胞映射对单自由度非线性齿轮模型进行了全局特性分析.王娟等^[7]在经典的间隙单齿轮副非线性动力学模型的基础上,采用了伪不动点追踪法研究了齿轮系统共存的周期解,采用胞映射方法研究了各共存周期解的全局稳定性.A.Farshidianfar^[8]利用 Melnikov 方法对非线性齿轮系统中混沌状态进行了解析预测和控制.张晨旭等^[9]建立了两自由度齿轮传动系统的动力学模型,通过数值仿真,说明齿轮传动系统中存在着倍周期分岔、Hopf 分岔和混沌等复杂的非线性现象.程欧等^[10]考虑了三自由度多间隙齿轮系统耦合振动模型,通过数值模拟分析齿轮系统的非线性动力学特性.但有关于两自由度齿轮系统的

全局特性分析的文章比较少,胞映射方法是求解非线性复杂系统全局特性的一种数值计算技术,将胞映射方法运用到齿轮传动系统中,能够实现了对系统分岔过程、奇异吸引域和混沌性态进行有效、动态和准确解析,从而深刻揭示系统的动力学特性.本文建立了两自由度齿轮系统动力学模型,通过数值模拟对齿轮系统的分岔和混沌等非线性动力学行为进行了分析研究,并在简单胞映射^[11,12]的理论基础上讨论了激振频率对齿轮系统的全局动力学的影响,通过合理控制系统的初值条件而获得良好的系统响应,为齿轮的优化设计奠定了基础.

1 力学模型及运动微分方程

图 1 为一类参数激励且具有时变啮合刚度的含间隙的两自由度齿轮传动系统的动力学模型.为了简化力学模型,文中仅考虑齿轮传动时的横向运动,轴和轴承被认为是刚性的,啮合曲线描述为直线 $2B$,接触时啮合刚度不随时间变化 $K_i \neq K_i(t)$ ($i=1,2,3,4$),粘性阻尼为 C_i ($i=1,2,3$).质量 M_1 、 M_2 的齿轮分别由刚度 K_1 、 K_3 的线性弹簧和阻尼系数 C_1 、 C_3 的线性阻尼连接于轴承.两齿轮分别受简谐激振力 $P_j(t) = P_j \sin(\Omega t + \tau)$, $j=1,2$ 而保持接触,取间隙的中点作为坐标的原点,水平向右为正方向,

2018-06-16 收到第 1 稿,2018-09-25 收到修改稿.

* 国家自然科学基金资助项目(11672249,11732014)

[†] 通讯作者 E-mail: 1079860024@qq.com

建立坐标系,当齿轮 M_1 的坐标差等于 B 或 $-B$ 时,将会与刚度 K_4 的弹簧接触(即齿轮开始啮合),经过一定时间改变速度方向后,以新的初值运动,啮合分开,然后再与刚度 K_4 的弹簧接触,如此反复。

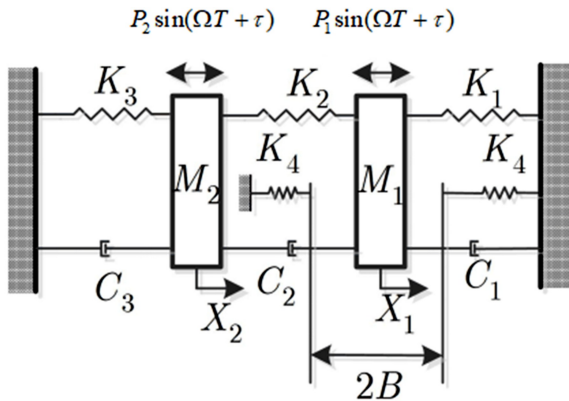


图1 两自由度齿轮传动系统的力学模型

Fig.1 Mechanical model of a two-degree-of-freedom gear transmission system

齿轮传动系统的运动微分方程为:

$$M_1 \ddot{X}_1 + (C_1 + C_2) \dot{X}_1 - C_2 \dot{X}_2 + (K_1 + K_2) X_1 - K_2 X_2 + F(X_1) = P_1 \sin(\Omega t + \tau) \quad (1)$$

$$M_2 \ddot{X}_2 + (C_2 + C_3) \dot{X}_2 - C_2 \dot{X}_1 + (K_2 + K_3) X_2 - K_2 X_1 = P_2 \sin(\Omega t + \tau) \quad (2)$$

$$F(X_1) = \begin{cases} K_4(X_1 - B) & X_1 > B \\ 0 & -B < X_1 < B \\ K_4(X_1 + B) & X_1 < -B \end{cases} \quad (3)$$

取无量纲:

$$\mu_m = M_1/M_2, f_0 = P_2/(P_1 + P_2), \gamma_i = C_i/C_2 (i=1,3),$$

$k_j = K_j/K_2 (j=1,3,4), \omega = \Omega \sqrt{M_2/K_2}, t = T \sqrt{K_2/M_2}, \zeta = C_2/2\sqrt{K_2 M_2}, \delta = BK_2/(P_1 + P_2), x_i = X_i K_2/(P_1 + P_2)$, 则式(1)、式(2)可化为无量纲方程,

$$\mu_m \ddot{x}_1 + 2\zeta(\gamma_1 + 1)\dot{x}_1 - 2\zeta\dot{x}_2 + (k_1 + 1)x_1 - x_2 + f(x_1) = (1 - f_0) \sin(\omega t + \tau) \quad (4)$$

$$\ddot{x}_2 + 2\zeta(\gamma_3 + 1)\dot{x}_2 - 2\zeta\dot{x}_1 + (k_3 + 1)x_2 - x_1 = f_0 \sin(\omega t + \tau) \quad (5)$$

$$f(x_1) = \begin{cases} k_4(x_1 - \delta) & x_1 > \delta \\ 0 & -\delta < x_1 < \delta \\ k_4(x_1 + \delta) & x_1 < -\delta \end{cases} \quad (6)$$

2 简单胞映射基本原理

简单胞映射法把连续的状态空间离散成为有限个大小的单元(称为胞),然后用表征胞的特征矢

量来描述连续的状态变量,用胞的运动轨迹描述状态空间中点的运动,这样,通过离散的胞空间的运动规律就可以研究密实的状态空间点的运动规律。

在给定的欧式状态空间中,有许多的方法可以构造胞单元,最简单的方法是画割一个一定尺寸的长方体表示一个胞。对于 N 维的状态空间 R^N , 沿坐标轴 $X_i (i=1,2,\dots,N)$ 将其分为无数个用整数 z_i 表示的小间隔,间距定为 h_i , 这样边长为 $h_i (i=1,2,\dots,N)$ 的 N 维长方体就表征一个胞单元。 $z_1, z_2, z_3, \dots, z_N$ 的笛卡尔空间即为胞 z 的状态空间, $z_i (i=1,2,\dots,N)$ 为整型数值,称为状态胞或矢量胞。整型矢量函数是在整个胞状态空间上定义的,用胞函数 $F(z)$ 表示。胞矢量 z 和状态变量 x 的关系为:

$$\left(z_i - \frac{1}{2}\right)h_i < x_i < \left(z_i + \frac{1}{2}\right)h_i \quad (i=1,2,\dots,N) \quad (7)$$

如果状态向量 x 在 $x_i (i=1,2,\dots,N)$ 轴上的投影满足(7)式,就意味着它属于胞 $z_i (i=1,2,\dots,N)$ 。这样,系统状态矢量所在的位置可用 N 维胞矢量 z 来表征,不过确定范围的状态空间,则是由大量有限个胞的集合构成。简单胞映射就是任意一个胞元素只能映射到唯一一个像胞,我们有胞变换关系式:

$$z(n+1) = C(z(n), a) \quad (8)$$

a 表示与系统有关的参数, C 表示一个映射函数,称为胞映射,式(8)这种映射关系我们称为简单胞映射动力系统。一个动力系统的特性完全取决于胞映射 C , 通过它可以讨论动力系统的周期解、吸引域以及随参数变化的动力学性质。

3 齿轮系统的分岔及混沌分析

选取系统参数: $\zeta = 0.02, \gamma_1 = 2, \gamma_3 = 2, \mu_m = 1, \delta = 0.02, f_0 = 0.5, k_1 = 5, k_3 = 5, k_4 = 30$, 系统的初始值取为 $(0, 0, 0, 0)$ 。以激励力 ω 为分岔参数,由数值仿真得出如图2所示的分岔图(图中:横坐标为激励频率;纵坐标为质块 M_1 的运动速度),揭示了齿轮传动系统丰富的动力学特性:激励频率在一定范围内变化时,非线性系统的动态特性呈现出周期运动与混沌运动交替出现的运动规律。随着参数 ω 减小,系统发生倍周期分岔,由稳定的单周期运动变为多周期运动;随着分岔参数 ω 进一步减小,系统并没有继续发生倍化分岔,而是突变为单周期运动,又经倍化分岔进入混沌,期间出现周期窗口,最后又由混沌运动变为单周期运动。

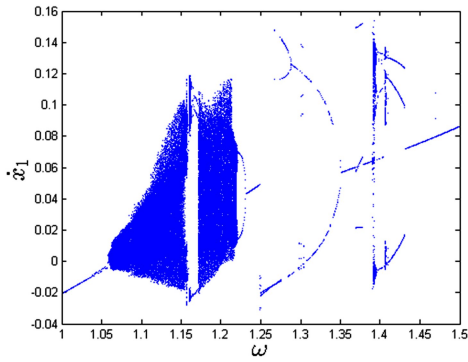


图2 系统的全局分岔图

Fig.2 System's global bifurcation diagram

4 齿轮系统全局动力学分析

在相平面中,取感兴趣的位移和速度范围为:

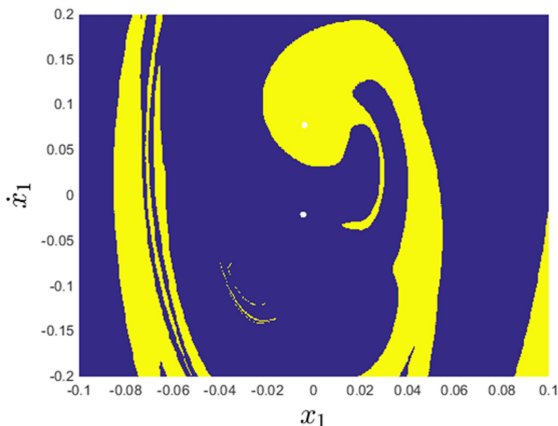
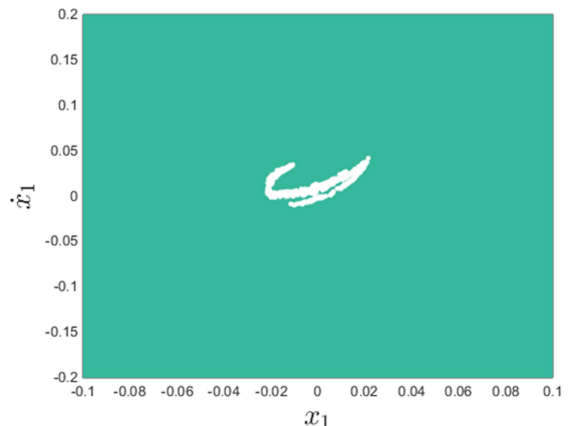
$$A_1 = \{(x_1, \dot{x}_1) \in R^2 \mid -0.1 \leq x_1 \leq 0.1, -0.2 \leq \dot{x}_1 \leq 0.2\} \quad (9)$$

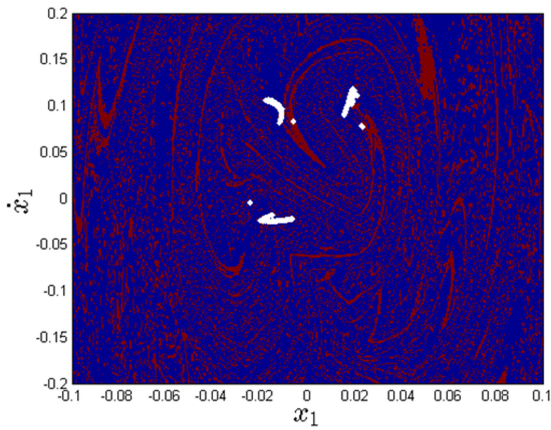
$$A_2 = \{(x_2, \dot{x}_2) \in R^2 \mid -0.1 \leq x_2 \leq 0.1, -0.2 \leq \dot{x}_2 \leq 0.2\} \quad (10)$$

对相平面 A_1 进行胞映射,区域内和区域外的胞分别为正规胞和陷胞.将区域划分成 500×500 个初值胞,探讨含间隙的两自由度齿轮系统的激振频率 ω 变化时的全局特性.系统随激振频率 ω 变化的全局吸引域如图3所示,白色的点表示吸引子,不同颜色表示不同的吸引域.图3(a)为 $\omega = 1$ 时系统的吸引域,系统有两个共存的周期1吸引子,蓝色区域表示周期1吸引子的吸引域,黄色区域表示另一个周期1吸引子的吸引域,从图中可以看出蓝色区域吸引域的面积要比黄色区域吸引域的大,这说明蓝色区域中周期1吸引子的局部稳定性要大于黄色区域中周期1吸引子.图3(b)为 $\omega = 1.1$ 时系

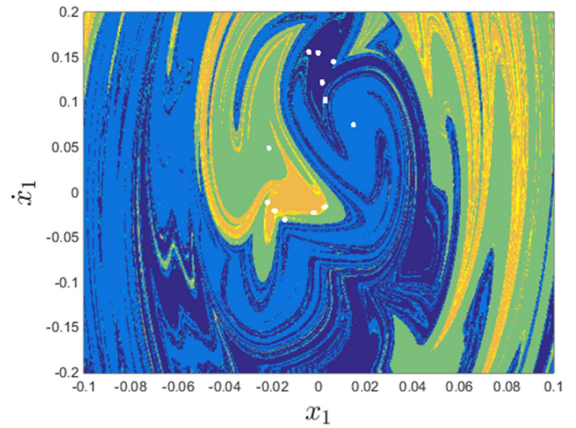
统的吸引域,系统只有一种吸引域(绿色区域),对应吸引子为混沌吸引子.图3(c)为 $\omega = 1.16$ 时系统的吸引域,此时系统为周期3解与混沌运动共存,红色区域代表周期3吸引子的吸引域,蓝色区域代表混沌吸引子的吸引域.从图中可以看出,两种吸引域相互嵌套在一起,周期3运动对初值比较敏感,非常容易失稳而进入混沌运动.图3(d)为 $\omega = 1.25$ 时系统的吸引域,系统存在六个周期运动,绿色区域表示周期1运动吸引域,蓝色区域则表示另外一个周期1运动吸引域;深蓝色区域代表周期2运动吸引域,黄色区域表示另外一个周期2运动吸引域;浅黄色区域表示周期3运动吸引域,浅蓝色区域则表示另外一个周期3运动吸引域;图中可以看出,各周期运动的吸引域散乱地交织在一起,说明系统对初值条件的敏感度较大.周期1解的吸引域面积大且连续,具备较高的局部稳定性;周期2解的吸引域面积相对较小,稳定性较低;周期3解的吸引域只是一些离散的点,这就意味着该吸引域和其他吸引子的吸引域相互嵌套到一起,运动非常容易失稳而掉入其他吸引子上.图3(e)为 $\omega = 1.32$ 时系统的吸引域,系统有两个周期解共存,蓝色区域和红色区域分别代表两个不同周期1运动吸引域.图3(f)为 $\omega = 1.48$ 时系统的吸引域,系统存在两个不同的周期1解,其中黄色区域的吸引域为几个离散的点组成,说明该区域的周期1吸引子极其不稳定,此时系统基本稳定在蓝色区域中的周期1解.

以 $\omega = 1.16$ 时齿轮系统的吸引域为例,画出不同初值条件下,系统的相图和庞加莱截面图,如图4、5所示.从图可知,在不同的初值条件下,系统呈现出不同的周期运动.当初值条件为 $(0, 0, 0, 0)$ 系统将出现

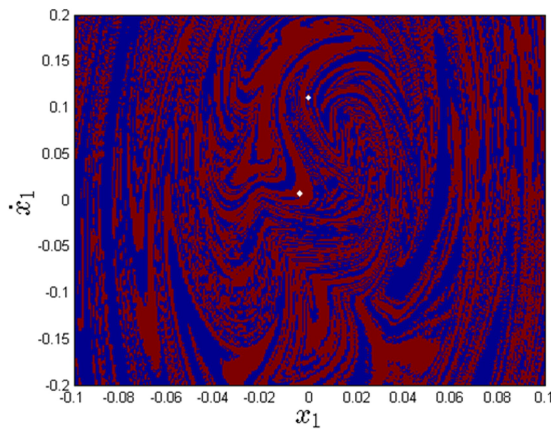
(a) $\omega=1$ 时系统的全局吸引域(a) Global attraction domain of the system for $\omega=1$ (b) $\omega=1.05$ 时系统的全局吸引域(b) Global attraction domain of the system for $\omega=1.05$



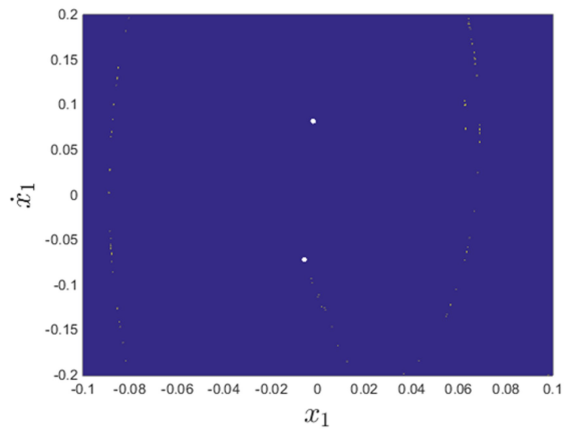
(c) $\omega=1.16$ 时系统的全局吸引域
(c) Global attraction domain of the system for $\omega=1.16$



(d) $\omega=1.25$ 时系统的全局吸引域
(d) Global attraction domain of the system for $\omega=1.25$



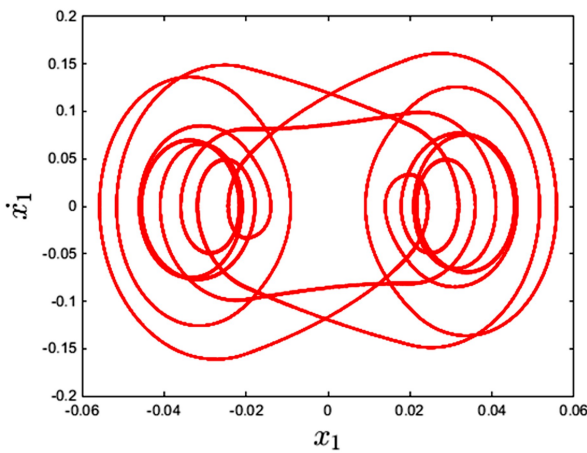
(e) $\omega=1.32$ 时系统的全局吸引域
(e) Global attraction domain of the system for $\omega=1.32$



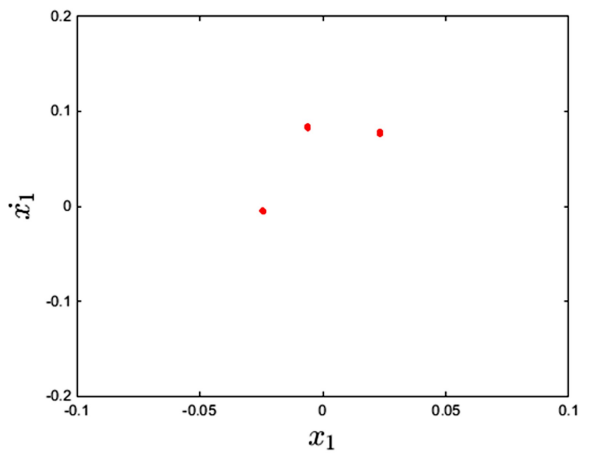
(f) $\omega=1.48$ 时系统的全局吸引域
(f) Global attraction domain of the system for $\omega=1.48$

图 3 系统随激振频率 ω 变化的全局吸引域

Fig.3 The global attraction domain of the system with the change of excitation frequency ω



(a) 相图
(a) Phase diagram



(b) 庞加莱截面
(b) Poincaré section

图 4 初值为(0.05,0.15,0.05,0.15)时系统周期 3 运动

Fig.4 Period-3 motion for the initial value (0.05,0.15,0.05,0.15)

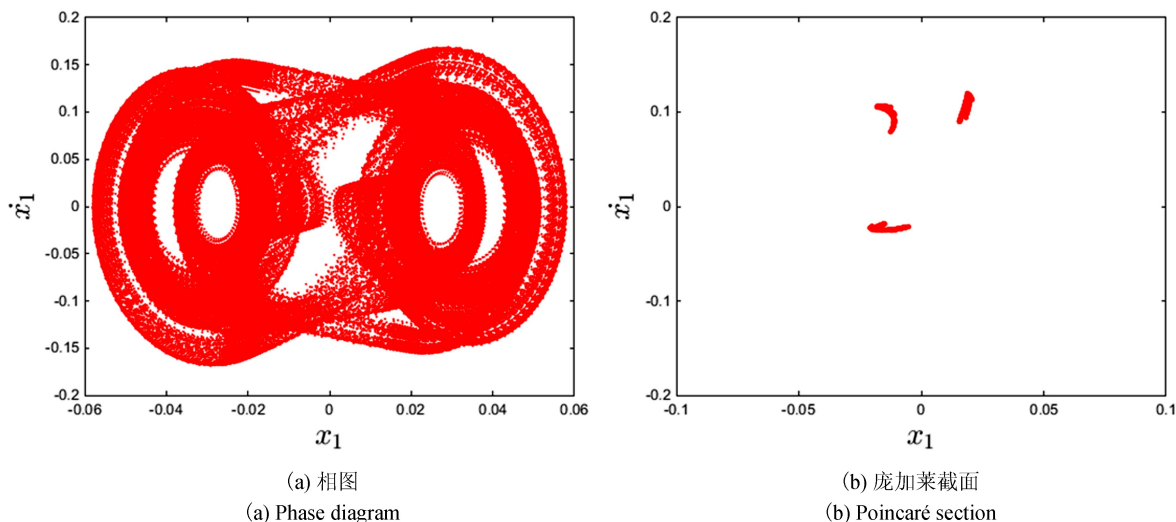


图5 初值为(0,0,0,0)时系统为混沌运动

Fig.5 Chaotic motion for the initial value (0,0,0,0)

混沌运动,这种现象容易对齿轮系统产生不利的影
响,而通过改变系统的初值条件,在图3(c)中的红色
区域中选择合适的初始值如(0.05,0.15,0.05,0.15),系
统将从混沌运动变为周期3运动,这对齿轮系统的
寿命和可靠性都是十分有利的,基于此,便可现实
在不良参数条件下,通过合理控制系统的初值条件
而获得理想的系统响应。

5 结论

(1)两自由度齿轮传动系统将会出现周期运
动、混沌运动等现象.随着激振频率的变化,系统依
次出现单周期运动,混沌运动,多周期运动,最后系
统再次进入单周期运动。

(2)利用简单胞映射方法,得到在不同激振频
率 ω 的条件下,系统的全局特性图.可以看出,系统
存在着混沌运动、多周期解共存、周期解与混沌运
动共存等现象。

(3)通过简单胞映射方法,确定齿轮系统在所
关心相平面内的吸引子的个数和位置,及其吸引域
的范围.这对了解系统的全局特性,实现在不良参
数条件下,通过合理控制系统的初值条件而获得理
想的系统响应具有重要意义。

(4)胞映射是一种以计算机为基础的求解非
线性动力学系统的有效方法,对于齿轮非线性系统
而言,胞映射方法能够实现对系统分岔过程、奇异
吸引域和混沌性态进行解析。

参 考 文 献

- 1 Kahraman A, Singh R. Non-linear dynamics of a spur gear pair. *Journal of Sound and Vibration*, 1990,142(1):49~75
- 2 Kahraman A, Singh R. Non-linear dynamics of a geared rotor-bearing system with multiple clearances. *Journal of Sound and Vibration*, 1991,144(3):469~506
- 3 李润方,王建军. 齿轮系统动力学. 北京:科学出版社, 1997 (Li R f, Wang J J. Gear system dynamics, Beijing, China Science Publishing & Media Ltd., 1997 (in Chinese))
- 4 王三民,沈允文,董海军. 含摩擦和间隙直齿轮副的混沌与分岔研究. 机械工程学报, 2002,38(9):8~11 (Wang S M, Shen Y W, Dong H J. Chaos and bifurcation of spur gears with friction and gap. *Journal of Mechanical Engineering*, 2002,38(9):8~11 (in Chinese))
- 5 Ma Q, Kahraman A. Period-one motions of a mechanical oscillator with periodically time-varying, piecewise-nonlinear stiffness. *Journal of Sound and Vibration*, 2005,284(3):893~914
- 6 唐进元,熊兴波,陈思雨. 基于胞映射方法的单自由度非线性齿轮系统全局特性分析. 机械工程学报, 2011,47(5):59~65 (Tang J Y, Xiong X B, Chen S Y. Global Characteristic analysis of single degree of freedom nonlinear gear system based on cell mapping. *Journal of Mechanical Engineering*, 2011,47(5):59~65 (in Chinese))
- 7 王娟,李同杰. 齿轮系统的共存周期运动及其吸引域.

- 机械设计研究, 2013, 29(4):48~50 (Wang J, Li T J. Coexistence periodic motion and attraction domain of gear system. *Mechanical Design and Research*, 2013, 29(4):48~50 (in Chinese))
- 8 Farshidianfar A, Saghafi A. Identification and control of chaos in nonlinear gear dynamic systems using Melnikov analysis. *Physics Letters A*, 2014, 378(46):3457~3463
- 9 张晨旭, 杨晓东, 张伟. 含间隙齿轮传动系统的非线性动力学特性的研究. *动力学与控制学报*, 2016, 14(2):115~121 (Zhang C X, Yang X D, Zhang W. Study on nonlinear dynamic characteristics of gear transmission system with gap. *Journal of Dynamics and Control*, 2016, 14(2):115~121 (in Chinese))
- 10 程欧, 苟向锋. 多自由度齿轮系统非线性动力学分析. *噪声与振动控制*, 2015, 35(6):31~35 (Cheng O, Gou X F. Nonlinear dynamics analysis of multiple-degree-of-freedom gear system. *Noise and Vibration Control*, 2015, 35(6):31~35 (in Chinese))
- 11 刘信安, 王宗笠, 蒋启华, 等. 胞映射基本理论与算法实现. *计算机与应用化学*, 2000, 17(5):427~435 (Liu X A, Wang Z L, Jiang Q H, et al. Basic Theory and algorithm realization of cell mapping. *Computer and Applied Chemistry*, 2000, 17(5):427~435 (in Chinese))
- 12 Hsu C S. Cell-to-cell mapping: a method of global analysis for nonlinear systems. New York: Springer Science & Business Media, 2013

STUDY ON GLOBAL DYNAMIC CHARACTERISTIC OF TWO-DEGREES-OF-FREEDOM GEAR TRANSMISSION SYSTEM*

Zhou Du[†] Yue Yuan Li Gaolei Wu Xin

(School of Mechanics and Engineering, Southwest Jiaotong University, Chengdu 610031, China)

Abstract The existence of tooth-side backlash in gear transmission system induces rich nonlinear dynamical behaviors. Considering the nonlinear dynamic model of a two-degrees-of-freedom gear transmission system, the bifurcation and chaos of the system were analyzed by using the simple cell mapping method. Firstly, the global characteristics of the nonlinear gear system were analyzed, and the attractor and attracting domain were obtained. The results show that, with changing excitation frequency, the system exhibits coexistence of multi-periodic solutions and coexistence of periodic and chaotic motions. Furthermore, the phase diagram of the trajectory of the system was compared with that of the Poincaré section. It is shown that, under different initial conditions, the system presents different periodic or chaotic motions. Therefore, based on the numerical results by the simple cell mapping method, ideal system responses, such as periodic motions, can be realized by reasonably selecting the initial conditions, when certain parameters make the system undergoes complicated responses.

Key words backlash, gear transmission system, bifurcation, chaos, simple cell mapping, global analysis