

多自由度车削系统稳定性分析*

张旭 张丽†

(南京航空航天大学 航空宇航学院, 南京 210016)

摘要 车削加工是一种应用广泛的加工制造技术,如何确保加工高效率、高质量、高精度,一直是研究的热点.建立了多自由度车削模型,考虑切削宽度和主轴转速的变化,分别对单自由度、三自由度以及九自由度车削模型的稳定性进行了分析,得到了关于切削宽度和主轴转速的稳定性区域图,并通过数值方法进行了验证.结果表明:在考虑工程实际阻尼范围时,目前最常用的单自由度车刀模型所预测的关于切削宽度和主轴转速的稳定性结果,在相对较低转速区偏保守,而在高转速区的稳定性区域过大.

关键词 多自由度模型, 时滞, D 曲线, 稳定性分析, 车削系统

DOI: 10.6052/1672-6553-2019-006

引言

“中国制造 2025”是提升我国制造业发展质量和水平的重大战略部署.车削加工作为一种应用最为广泛的制造技术,是通过工件旋转,车刀在平面内作直线或曲线移动进行加工的一种切削方法.如何确保车削加工的高效率、高质量、高精度一直是研究的热点.由于刀具与工件的相互作用,加工过程中可能会发生颤振现象.该现象不但会影响加工工件的质量,还会降低加工效率和车刀的耐用度,严重时甚至可能会损坏刀具和机床,所以,关于车削加工过程的稳定性和颤振分析一直是国内外学者的关注热点^[1].美国学者 Taylor 首次发表了关于切削颤振的研究成果^[2]. Martellotti^[3]认为瞬时切削力与切削面积成正比,可以通过切削力系数与切削面积相乘确定瞬时切削力.关于切削稳定性的研究成果也是相当丰富, Altintas 和 Stepan^[4]用 D-划分法研究了铣削过程的稳定性,并得到了稳定性叶瓣图. Insperger 等^[5]采用半离散方法研究了转速以正弦曲线变化的单自由度正交切削模型,确定了其稳定区域图和颤振频率.

目前关于切削振动的相关研究中,一般假设整个车刀为一个刚体,研究其某一方向的垂直切削振动或者多个方向的正交切削振动. Yang 等^[6]采用

单自由度正交切削模型分析了车削过程中的颤振,提出了一种新的抑制颤振的方法. Turkes 等^[7]研究车削过程稳定性时同样采用了单自由度正交车削模型,通过理论结合实验对比分析了颤振频率.该类切削模型在建模求解等方面具有一定的优势,然而,在高效高精度的加工要求下,车刀作为一个连续体,可否由单自由度模型准确描述尚待研究. Yan 等^[8]建立了考虑状态依赖时滞的四自由度磨削动力学模型,研究了再生颤振和摩擦颤振对磨削过程稳定性的影响. Liu 等^[9]对考虑状态依赖时滞的高自由度钻削模型进行了稳定性分析,发现了低自由度模型所描述的动力学特性不一定准确. Insperger 等^[10]研究车削过程时考虑了状态依赖时滞的影响,结果表明与常时滞模型相比,考虑状态依赖时滞在一定参数域内对线性稳定性影响很小.故本文忽略了状态量对时滞的影响,通过考虑切削宽度和主轴转速的变化,利用 D-划分法分别对单自由度、三自由度以及九自由度常时滞车削模型的稳定性进行了分析,以期探讨这些近似模型稳定性结论的准确性以及适用性.

本文第一节建立了多自由度车削模型,确定了单自由度、三自由度和九自由度模型的等效质量和等效刚度;第二节利用 D-划分法对单自由度模型的稳定性进行了分析;第三节得到了三自由度和九

2018-09-27 收到第 1 稿,2018-11-07 收到修改稿.

* 国家自然科学基金资助项目(11772151);中央高校基本科研业务费专项资金资助(NS2017004)

† 通讯作者 E-mail: zhangli@nuaa.edu.cn

自由度模型关于主轴转速和切削宽度的稳定区域图并进行了对比;第四节为本文的总结。

1 车削模型的建立

车削模型如图1(a)所示.其中,车刀模型为一个一端固定、一端自由的均质连续杆,该杆的弹性模量为 E 、密度为 ρ 、横截面积为 A 、长度为 l , $u(x,t)$ 表示杆在 t 时刻 x 位置的轴向位移,切削力由轴向动态力 F 表示^[11]:

$$F = hw[u(0,t-\tau) - u(0,t)] \quad (1)$$

其中, h 为单位切削力系数, w 为切削宽度, $u(0,t-\tau)$ 是 $t-\tau$ 时刻自由端 ($x=0$) 处的位移 $\tau = 2\pi/\Omega$ 是工件旋转一周所用时间, Ω 表示主轴转速. $u(0,t)$ 是 t 时刻自由端 ($x=0$) 处的位移, $u(0,t-\tau) - u(0,t)$ 表示切削深度。

由于轴向力与切削速度有关,故该问题为边界条件含时滞的动力学问题^[12].关于该类问题的理论分析难度较大,一般采用多自由度近似模型,图1(b)为 n 自由度近似切削模型.该模型由 n 个等质量块通过等刚度弹簧和等阻尼器连接而成,其中各质量块的质量为 m ,弹簧的刚度系数为 k ,阻尼系数为 c .该模型的动力学微分方程为:

$$M\ddot{U} + C\dot{U} + KU = HW(U(t-\tau) - U(t)) \quad (2)$$

其中, $U = [u_1, \dot{u}_1, \dots, u_n, \dot{u}_n]^T$, $M = mI$, I 是一个 $n \times n$ 的单位矩阵, $C = (c/k)K$

$$K = \begin{bmatrix} k & -k & 0 & \dots & 0 \\ -k & 2k & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -k \\ 0 & \dots & 0 & -k & 2k \end{bmatrix}_{n \times n} \quad (3)$$

$$HW = \begin{bmatrix} hw & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}_{n \times n} \quad (4)$$

车削过程的车削力 F 的大小即为:

$$F = hw[u_1(t-\tau) - u_1(t)] \quad (5)$$

其中, $u_1(t-\tau)$ 是车刀尖在 $t-\tau$ 时刻的位移, $u_1(t)$ 是车刀尖在 t 时刻的位移。

图1(a)中杆自由端在静载 F 作用下的位移 f 为:

$$f = \frac{l}{AE}F \quad (6)$$

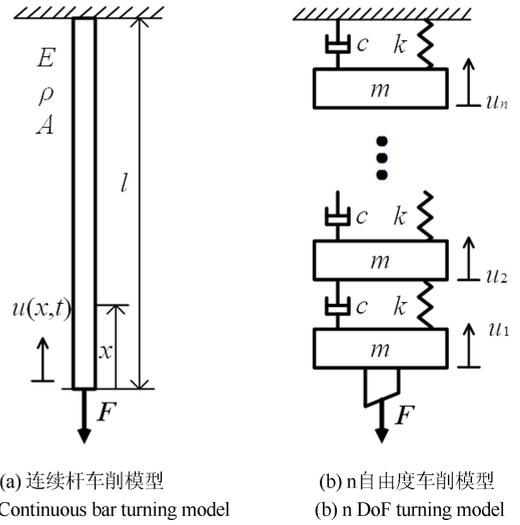


图1 车削模型
Fig.1 Turning model

在同样静载 F 作用下,等效模型刀尖处的位移 u_1 为:

$$u_1 = n \frac{F}{k} \quad (7)$$

为保证两模型在同样静载作用下变化的位移相同,即 $u_1 = f$,可确定刚度系数 k :

$$k = n \frac{AE}{l} \quad (8)$$

一端固定一端自由的轴向振动杆的一阶固有频率 ω_{n1} 为^[13]:

$$\omega_{n1} = \frac{\pi}{2l} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (9)$$

为保证等效,根据各模型的一阶固有频率 ω_{n1} 和一阶阻尼比 ζ_1 相等,可确定弹簧刚度系数 k 和阻尼系数 c .

对于单自由度模型,即 $n = 1$,根据式(7)可确定其弹簧刚度系数:

$$k_0 = \frac{AE}{l} \quad (10)$$

其固有频率为:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (11)$$

根据 $\omega_n = \omega_{n1}$,可确定其质量为:

$$m_0 = 4 \frac{\rho Al}{\pi^2} \quad (12)$$

阻尼系数则可表示为:

$$c_0 = 2 \frac{k_0}{\omega_{n1}} \zeta_1 \quad (13)$$

表1给出了单自由度、三自由度、九自由度车削模型的刚度系数 k 、阻尼系数 c 、质量 m 。

表1 等效模型的刚度系数 k 、阻尼系数 c 和质量 m

Table 1 The stiffness k , the damping ratio c and the mass m of equivalent models

n	k/k_0	c/c_0	m/m_0
1	1	1	1
3	3	3	0.5941
9	9	9	0.2456

2 单自由度模型的稳定性分析

对于单自由度模型,方程(2)可表示为:

$$m_0\ddot{u}+c_0u\dot{u}+k_0u=hw[u(t-\tau)-u(t)] \quad (14)$$

简化后,

$$\ddot{u}+2\zeta_1\omega_{n1}\dot{u}+(\omega_{n1}^2+\frac{hw}{m_0})u=\frac{hw}{m_0}u(t-\tau) \quad (15)$$

其中, ζ_1 为阻尼比($\zeta_1=c_0/2m_0\omega_{n1}$), ω_{n1} 为系统固有频率($\omega_{n1}^2=k_0/m_0$)。

把假设解 $u=e^{\lambda t}$ 代入方程(15)得到特征方程:

$$D(\lambda)=\lambda^2+2\zeta_1\omega_{n1}\lambda+(\omega_{n1}^2+\frac{hw}{m_0})=\frac{hw}{m_0}e^{-\lambda\tau} \quad (16)$$

将 $\lambda=\gamma+i\omega$ 代入方程(16),令 $\gamma=0$,即 $\lambda=i\omega_c$ 时,分离实部和虚部可得:

$$\text{Re: } -\omega_c^2+\omega_{n1}^2+\frac{hw}{m_0}=\frac{hw}{m_0}\cos\omega_c\tau \quad (17)$$

$$\text{Im: } -2\zeta_1\omega_{n1}\omega_c=\frac{hw}{m_0}\sin\omega_c\tau \quad (18)$$

解方程(17)和(18)得:

$$\frac{hw}{k_0}=\frac{(\omega_c^2/\omega_{n1}^2-1)^2+4\zeta_1^2\omega_c^2/\omega_{n1}^2}{2(\omega_c^2/\omega_{n1}^2-1)} \quad (19)$$

$$\frac{\Omega}{\omega_{n1}}=\frac{\omega_c/\omega_{n1}\pi}{j\pi-\arctan\frac{\omega_c^2/\omega_{n1}^2-1}{2\zeta_1\omega_c/\omega_{n1}}} \quad j=1,2,3\cdots \quad (20)$$

无阻尼时($\zeta_1=0$),由方程(18)可得 $\sin\omega_c\tau=0$,其解可分两种情况:

$$\textcircled{1} \quad \omega_c\tau=j\pi \quad j=2,4,6\cdots$$

$$\omega_c=\omega_n$$

$$\frac{\Omega}{\omega_{n1}}=\frac{1}{j} \quad j=2,4,6\cdots \quad (21)$$

$$\textcircled{2} \quad \omega_c\tau=j\pi \quad j=1,3,5\cdots$$

$$\frac{hw}{k_0}=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{j}{2}\frac{\Omega}{\omega_{n1}}\right)^2-1\right] \quad j=1,3,5\cdots \quad (22)$$

由公式(19),(20),(21)和(22)可确定临界D曲线。令特征根实部 γ 对 τ 的一阶导数为^[14]:

$$\gamma'_\tau:=\text{Re}\frac{d\lambda}{d\tau}\Big|_{\lambda=i\omega_c} \quad (23)$$

特征根实部 γ 对主轴转速 Ω 的一阶导数为:

$$\gamma'_\Omega:=\text{Re}\frac{d\lambda}{d\Omega}\Big|_{\lambda=i\omega_c} \quad (24)$$

因为 $\Omega=2\pi/\tau$,则 $\text{sgn}(\gamma'_\Omega)=-\text{sgn}(\gamma'_\tau)$ 。当 $\gamma'_\tau>0$ 即 $\gamma'_\Omega<0$ 时,一对特征根从复平面左半平面通过虚轴穿至右半平面,即增加了一对非稳定特征根;当 $\gamma'_\tau<0$ 即 $\gamma'_\Omega>0$ 时,一对特征根从复平面右半平面通过虚轴穿至左半平面,即减少了一对非稳定特征根^[15]。表2给出了单自由度无阻尼模型的 γ'_τ 和 γ'_Ω 的值,其中, $a=hw/m$, $b=\tau\cos\omega_c\tau$, $d=a\tau\sin\omega_c\tau-2\omega_c$ 。据表1可确定该系统的关于切削宽度和主轴转速的稳定区域,如图2所示,其中实线和虚线为由方程(21)和(22)确定的D曲线,阴影部分为稳定区域。

表2 不同D曲线上的 γ'_τ 和 γ'_Ω

Table 2 The partial derivatives γ'_τ and γ'_Ω at the critical D-curves

$\omega_c\tau$	γ'_τ	γ'_Ω
0	$0(\omega_c=0)$	$0(\omega_c=0)$
π	$\frac{a d \omega_c}{(ab)^2+d^2}>0$	$-\frac{a d \omega_c}{(ab)^2+d^2}<0$
2π	$-\frac{a d \omega_c}{(ab)^2+d^2}<0$	$\frac{a d \omega_c}{(ab)^2+d^2}>0$
3π	$\frac{a d \omega_c}{(ab)^2+d^2}>0$	$-\frac{a d \omega_c}{(ab)^2+d^2}<0$
4π	$-\frac{a d \omega_c}{(ab)^2+d^2}<0$	$\frac{a d \omega_c}{(ab)^2+d^2}>0$
\vdots	\vdots	\vdots
$j\pi$	$\frac{(-1)^{j+1}a d \omega_c}{(ab)^2+d^2} \quad j=1,2,3\cdots$	$\frac{(-1)^j a d \omega_c}{(ab)^2+d^2} \quad j=1,2,3\cdots$

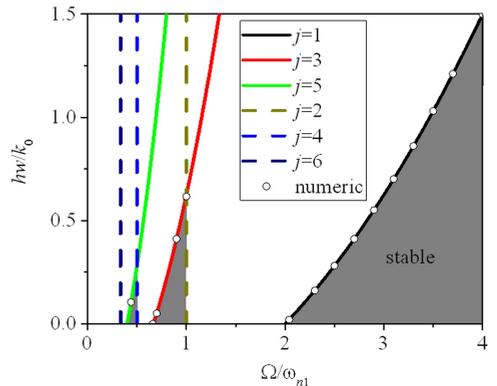


图2 单自由度无阻尼模型在参数平面(Ω/ω_{n1} , hw/k_0)的稳定区域图

Fig.2 Stability chart in (Ω/ω_{n1} , hw/k_0) plane for 1 DoF model with zero damping

图 3 为阻尼比 $\zeta_1 = 0.005$ 时,单自由度模型关于切削宽度和主轴转速的稳定区域图以及临界边界所对应的颤振频率与主轴转速之间的曲线图,阴影区域为稳定区域。

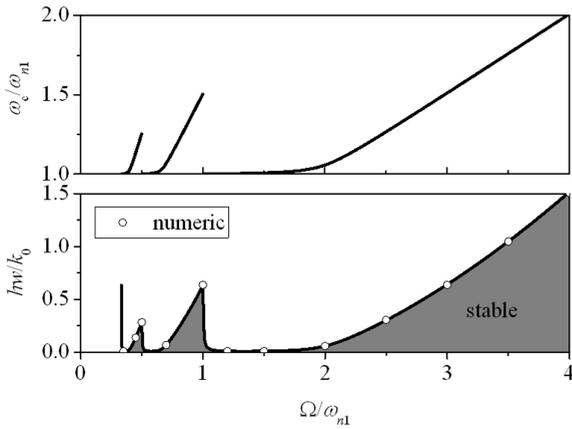


图 3 单自由度有阻尼模型在参数平面 $(\Omega/\omega_{n1}, hw/k_0)$ 的稳定区域图以及临界颤振频率曲线 ($\zeta_1 = 0.005$)

Fig.3 Stability chart in $(\Omega/\omega_{n1}, hw/k_0)$ plane of 1 DoF model and critical chatter frequency curves ($\zeta_1 = 0.005$)

3 多自由度模型的稳定图

与单自由度模型的稳定性分析过程类似,通过 D-划分法可确定三自由度模型和九自由度模型的稳定区域.图 4(a)和图 4(b)分别给出了三自由度模型和九自由度模型的 D 曲线,根据不稳定特征根的个数,可确定三自由度模型的稳定区域仅存在于高速区,即图 4(a)阴影部分,而对于九自由度模型,在图示转速范围内不再存在稳定区域.对比

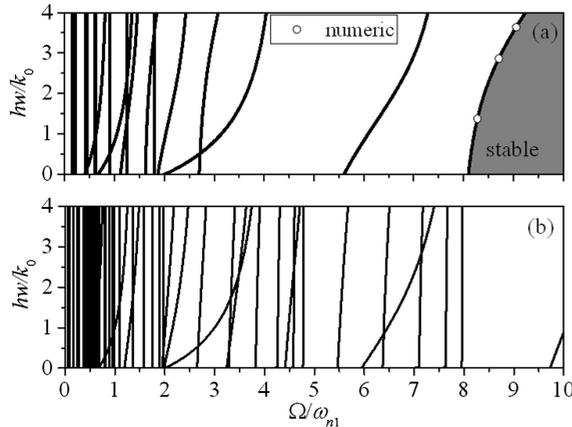


图 4 无阻尼模型在参数平面 $(\Omega/\omega_{n1}, hw/k_0)$ 的稳定区域图
(a) 三自由度模型, (b) 九自由度模型

Fig.4 Stability chart in $(\Omega/\omega_{n1}, hw/k_0)$ plane with zero damping
(a) 3DoF model, (b) 9 DoF model

图 2 和图 4 可发现,随着自由度的增加,无阻尼模型稳定区域越来越小。

考虑阻尼时,三自由度模型和九自由度模型的稳定区域有所变化.图 5 为阻尼比 $\zeta_1 = 0.005$ 时,三自由度模型的稳定区域图,在相对较低转速范围,稳定边界主要由一阶模态决定,颤振频率对应一阶频率,随着转速增加,在图示转速范围内,稳定边界将由二阶模态甚至三阶模态确定,颤振频率也对应更高阶频率。

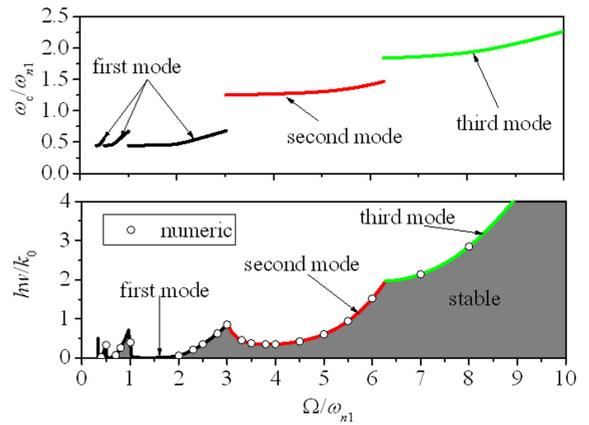


图 5 三自由度有阻尼模型在参数平面 $(\Omega/\omega_{n1}, hw/k_0)$ 的稳定区域图以及临界颤振频率曲线 ($\zeta_1 = 0.005$)

Fig.5 Stability chart in $(\Omega/\omega_{n1}, hw/k_0)$ plane of 3 DoF model and critical chatter frequency curves ($\zeta_1 = 0.005$)

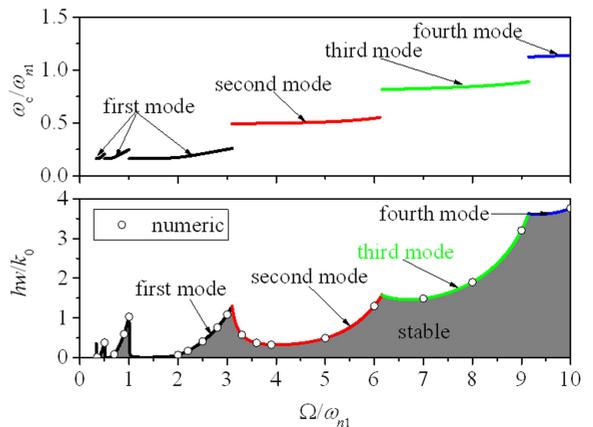


图 6 九自由度有阻尼模型在参数平面 $(\Omega/\omega_{n1}, hw/k_0)$ 的稳定区域图以及临界颤振频率曲线 ($\zeta_1 = 0.005$)

Fig.6 Stability chart in $(\Omega/\omega_{n1}, hw/k_0)$ plane of 9 DoF model and critical chatter frequency curves ($\zeta_1 = 0.005$)

考虑阻尼时,九自由度模型的稳定区域的变化趋势与三自由度类似.图 6 为阻尼比 $\zeta_1 = 0.005$ 时九自由度模型的稳定区域图,在相对较低转速范围,稳定边界主要由一阶模态决定,颤振频率对应

一阶频率,随着转速增加,在图示转速范围内,稳定边界将由二阶模态甚至四阶模态确定,颤振频率也对应更高阶频率.当阻尼比不同时,三自由度模型和九自由度模型的稳定区域随阻尼增大而增大,这种增大趋势也是在高速区更为明显,如图7所示($\zeta_1 = 0.001$ (黑线), $\zeta_1 = 0.005$ (红线), $\zeta_1 = 0.01$ (绿线)).

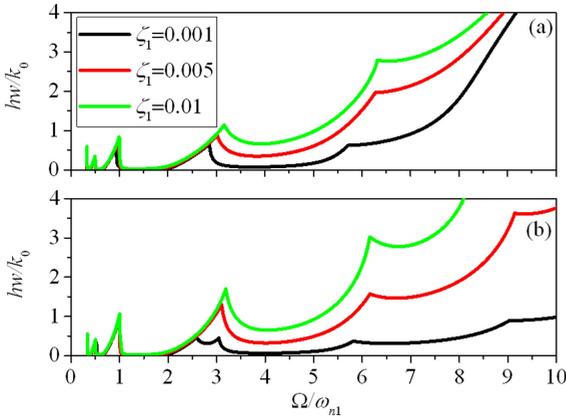


图7 不同阻尼时模型在参数平面($\Omega/\omega_{n1}, hw/k_0$)的稳定区域边界

(a) 三自由度模型, (b) 九自由度模型

Fig.7 Stability boundaries in ($\Omega/\omega_{n1}, hw/k_0$) plane with different damping ratios

(a) 3DoF model, (b) 9 DoF model

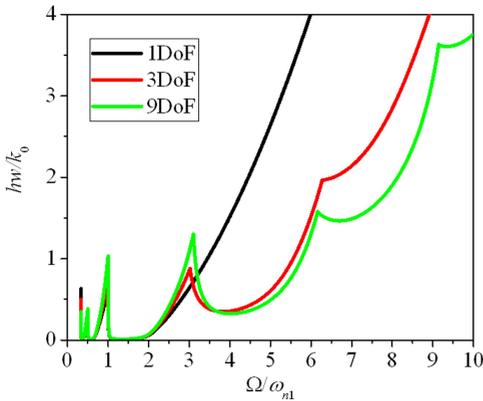


图8 阻尼比为 $\zeta_1 = 0.005$ 的不同自由度模型在参数平面

($\Omega/\omega_{n1}, hw/k_0$)的稳定区域边界对比图

Fig.8 Comparison of stability boundaries in ($\Omega/\omega_{n1}, hw/k_0$) plane of different DoF models with $\zeta_1 = 0.005$

阻尼比相同时($\zeta_1 = 0.005$),单自由度模型(黑线),三自由度模型(红线)和九自由度模型(绿线)所确定的稳定区域对比关系如图8所示,在相对较低转速范围内,稳定边界主要由一阶模态确定,随着自由度增加,稳定区域增大,但增大不明显,在高速范围,由于高阶模态决定稳定边界,随着自由

度增加,稳定区域明显减小.该现象在阻尼比 $\zeta_1 = 0.001 \sim 0.01$ 范围内均存在.此结果表明,考虑工程实际阻尼时,目前最常用的单自由度车刀模型所预测的稳定性结果在相对较低转速区偏保守,而在高转速区确定的稳定性区域过大.在当前对制造加工技术的高效率、高质量、高精度要求下,采用高自由度车削模型具有应用价值.

本文所有理论分析均经由数值验证^[16],结果吻合良好,见图2~图6.

4 小结

在高效高精度制造加工技术的发展背景下,本文通过理论分析与数值验证,对比了单自由度近似车刀模型与多自由度近似车刀模型的稳定性结论.结果表明考虑工程实际阻尼范围时,目前最常用的单自由度车刀模型所预测的关于主轴转速和切削宽度的稳定性结果,在相对较低转速区偏保守,而在高转速区的稳定性区域过大,在研究超高速车削加工问题时需要采用多自由度车削加工模型.关于高自由度模型的准确性仍待与连续体模型的分析结果进行对比验证.

参考文献

- 刘喻,张思进,殷珊. 高速切削过程中颤振现象的二自由度非光滑模型分析. 动力学与控制学报, 2018, 16(4):350~356 (Liu Y, Zhang S J, Yin S. Analysis on chatter vibration of a two-degree-of-freedom non-smooth system in high-speed cutting process. *Journal of Dynamics and Control*, 2018, 16(4):350~356 (in Chinese))
- Taylor F W. On the art of cutting metals. *Transactions of American Society of Mechanical Engineers*, 1907, 10(6):31~33
- Martellott M E. An analysis of the milling process. *Transactions of American Society of Mechanical Engineers*, 1941, 63(8):677~695
- Altintas Y, Stépán G, Merdol D, et al. Chatter stability of milling in frequency and discrete time domain. *Cirp Journal of Manufacturing Science and Technology*, 2009, 1(1):35~44
- Inspurger T, Stépán G. Stability analysis of turning with periodic spindle speed modulation via semidiscretization. *Journal of Vibration and Control*, 2004, 10(12):1835~

- 1855
- 6 Yang F L, Zhang B, Yu J Y. Chatter suppression with multiple time-varying parameters in turning. *Journal of Materials Processing Technology*, 2003, 141 (3): 431 ~ 438
- 7 Turkes E, Orak S, Neseli S, et al. Linear analysis of chatter vibration and stability for orthogonal cutting in turning. *International Journal of Refractory Metals and Hard Materials*, 2011, 29(2): 163 ~ 169
- 8 Yan Y, Xu J, Wiercigroch M. Regenerative and frictional chatter in plunge grinding. *Nonlinear Dynamics*, 2016, 86 (1): 283 ~ 307
- 9 Liu X B, Vlajic N, Long X H, et al. State-dependent delay influenced drill-string oscillations and stability analysis. *Journal of Vibration and Acoustics-Transactions*, 2014, 136(5): 051008
- 10 Insperger T, Stépán G, Turi J. State-dependent delay in regenerative turning processes. *Nonlinear Dynamics*, 2007, 47(1-3): 275 ~ 283
- 11 黄贤振, 许乙川, 张义民, 等. 车削加工颤振稳定性可靠度蒙特卡罗法仿真. 振动、测试与诊断, 2016, 36(3): 484 ~ 487 (Huang X Z, Xu Y C, Zhang Y M, et al. Reliability analysis for the stability of the CNC lathe with chatter using the monte carlo method. *Journal of Vibration, Measurement & Diagnosis*, 2016, 36(3): 484 ~ 487 (in Chinese))
- 12 Zhang L, Stepan G. Exact stability chart of an elastic beam subjected to delayed feedback. *Journal of Sound and Vibration*, 2016, 367: 219 ~ 232
- 13 Kidd M, Stepan G. Delayed control of an elastic beam. *International Journal of Dynamic and Control*, 2014, 2(1): 68 ~ 76
- 14 狄成宽. 稳定性切换点法在时滞系统的鲁棒稳定性中的应用. 动力学与控制学报, 2011, 9(2): 111 ~ 116 (Di C K. The application of stability switches point method in the robust stability of a class of time-delay system. *Journal of Dynamics and Control*, 2011, 9(2): 111 ~ 116 (in Chinese))
- 15 Stepan G, Insperger T. Semi-discretization for time-delay systems. New York: Springer, 2011: 6 ~ 15

STABILITY ANALYSIS OF MULTI DEGREE OF FREEDOM TURNING MODELS *

Zhang Xu Zhang Li[†]

(College of Aerospace Engineering, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China)

Abstract As one of the most widely used manufacturing technologies, turning has been a hot topic regarding requirements for high efficiency, high quality and high precision. This paper presents stability analysis of 1 DoF, 3 DoF, and 9 DoF turning models in the parameter plane of cutting width and spindle speed. The obtained stability charts show that when realistic damping is considered, the stability region predicted by 1 DoF model is more conservative than by higher DoF models in relatively low speed range, while in high speed range higher DoF models give much smaller stability region due to the presence of higher order vibrations.

Key words multi degree of freedom model, time delay, D curve, stability, turning

Received 27 September 2018, revised 7 November 2018.

* The project supported by the National Natural Science Foundation of China under Grants (11772151), the Fundamental Research Funds for the Central Universities (NS2017004).

[†] Corresponding author E-mail: zhangli@nuaa.edu.cn