第 17 卷第 5 期 2019 年 10 月
1672-6553/2019/17(5)/482-5
动 力 学 与 控 制 学 报
JOURNAL OF DYNAMICS AND CONTROL
Vol.17 No.5
Oct. 2019

时间尺度上约束 Birkhoff 系统的 Noether 对称性与守恒量*

张毅†
(苏州科技大学 土木工程学院, 苏州 215011)

摘要 研究时间尺度上约束 Birkhoff 系统的 Noether 对称性.基于时间尺度上 Pfaff-Birkhoff 原理,建立了时间尺度上带乘子形式的约束 Birkhoff 方程.给出了时间尺度上的 Noether 等式,定义了时间尺度上约束 Birkhoff 系统 Noether 对称性.提出并证明了时间尺度上约束 Birkhoff 系统的 Noether 定理,该定理揭示了时间尺度上 Noether 对称性与守恒量之间的关系.给出定理的两个特例:时间尺度上 Birkhoff 系统和经典约束 Birkhoff 系统的 Noether 定理.文末给出算例以说明方法和结果的有效性.

关键词 约束 Birkhoff 系统, 时间尺度, Noether 对称性, 守恒量

DOI: 10.6052/1672-6553-2019-062

引言

时间尺度是实数集的任意非空闭子集.时间尺度微积分将连续分析、离散分析以及量子分析等统一于一体,为复杂动力学系统的研究提供了强有力的数学工具[1-3].Bartosiewicz 和 Torres 首先开展时间尺度上 Noether 对称性的研究,建立了时间尺度上的 Noether 定理[4],该定理是对以往离散和连续情形的 Noether 定理的统一和拓展.罗一平等研究了时间尺度上 Hamilton 系统的 Noether 定理[5].傅景礼等研究了时间尺度上非保守非完整系统的 Noether 对称性与守恒量[6].宋传静和张毅研究并利用时间重参法证明了时间尺度上 Birkhoff 系统的 Noether 定理[7].文献[8]基于时间重参法证明了分数阶 Birkhoff 系统的 Noether 定理.近年来,关于时间尺度上约束力学系统的 Noether 定理的研究取得了一些进展[9-16].本文将进一步研究时间尺度上约束 Birkhoff 系统的 Noether 对称性与守恒量,建立系统的 Noether 定理并采用与文献[7]不同的方法给出了相应的证明.

1 时间尺度上微积分及其基本性质

下面简单介绍文中涉及到的时间尺度上微积分的一些基本概念和基本性质.更详细的介绍建议读者参阅文献[1].

时间尺度$\mathbb{T}$是实数集$\mathbb{R}$的任意非空闭子集.函数$\sigma:\mathbb{T}\to\mathbb{T}$和$\rho:\mathbb{T}\to\mathbb{T}$分别为向前和向后跳跃算子,定义为$\sigma(t)=\inf\{s\in\mathbb{T}:s>t\}$和$\rho(t)=\sup\{s\in\mathbb{T}:s<t\}$.向前步差函数定义为$\mu(t)=\sigma(t)-t$.如果$\sigma(t)=t$,$\sigma(t)>t$,$\rho(t)=t$以及$\rho(t)<t$,则点$t\in\mathbb{T}$分别称为右稠密、右发散、左稠密和左发散的.

如果 $\sup\mathbb{T}$ 是有限且左发散的,则定义$\mathbb{T}^k=\mathbb{T}\backslash(\rho(\sup\mathbb{T}),\sup\mathbb{T}]$,否则$\mathbb{T}^k=\mathbb{T}$.

设$f:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$,$t\in\mathbb{T}^k$,如果给定任一$\varepsilon>0$,存在$t$的一个邻域$U$,使得对所有$s\in U$,都有$|f(\sigma(t))-f(s)-f^\Delta(t)(\sigma(t)-s)|\leq\varepsilon|\sigma(t)-s|$,则$f^\Delta(t)$为$f$在$t$的$\Delta$-导数.如果对所有的$t\in\mathbb{T}^k$,$f^\Delta(t)$都存在,则称$f$在$\mathbb{T}$上是$\Delta$-可微的.通常,$f^\Delta(t)$也用$\frac{\Delta}{\Delta t}f(t)$表示.

函数$f:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$称为$rd$连续的,若$f$在$\mathbb{T}$中的右稠密点连续,且在$\mathbb{T}$中所有左稠密点的左极限存在.在$\mathbb{T}$上所有$rd$连续函数的集合记作$C_{rd}=C_{rd}(\mathbb{T},\mathbb{R})$.类似地,定义在$\mathbb{T}$上的$\Delta$-可微且其$\Delta$-导数$rd$连续的函数集合记作$C_{rd}^1=C_{rd}^1(\mathbb{T},\mathbb{R})$.

函数$F:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$称为$f:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$的一个原函数,若对所有的$t\in\mathbb{T}^k$,有$F^\Delta(t)=f(t)$.那么,$f$的不定积分定义为$\int f(t)\Delta t=F(t)+C$,其中,$C$是任意常数.

2018-07-03 收到第 1 稿,2019-04-02 收到修改稿.
* 国家自然科学基金资助项目(11572212,11272227,11972241)
† 通讯作者 E-mail:zhy@mail.usts.edu.cn

f 的定积分定义为 $\int_a^b f(t)\Delta t = F(b) - F(a)$，其中，$a,b\in\mathbb{T}$.

对于 Δ-可微函数 f 和 g，以下公式成立：

$$f^{\sigma}(t)=f(t)+\mu(t)f^{\Delta}(t) \tag{1}$$

$$(fg)^{\Delta}(t)=f^{\Delta}(t)g^{\sigma}(t)+f(t)g^{\Delta}(t) \tag{2}$$

$$\int_a^b f(t)g^{\Delta}(t)\Delta t = (fg)(b) - (fg)(a) - \int_a^b f^{\Delta}(t)g^{\sigma}(t)\Delta t \tag{3}$$

其中，$f^{\sigma}(t)=f(\sigma(t))$，即 $f^{\sigma}=f\circ\sigma$.

时间尺度上 Dubois-Reymond 引理[1]：令 $g\in C_{rd}$，$g:[a,b]\to\mathbb{R}^n$，如果对一切 $\eta\in C_{rd}^1$，且有 $\eta(a)=\eta(b)=0$，都成立 $\int_a^b g^T(t)\eta^{\Delta}(t)\Delta t = 0$，则 $g(t)=C$，其中，常数 $C\in\mathbb{R}^n$.

2　时间尺度上约束 Birkhoff 方程

时间尺度上 Pfaff 作用量为

$$S(a_{\mu}(\cdot)) = \int_{t_1}^{t_2}[R_{\nu}(t,a_{\mu}^{\sigma})a_{\nu}^{\Delta} - B(t,a_{\mu}^{\sigma})]\Delta t \tag{4}$$

式中，$a_{\mu}^{\sigma}(t)=(a_{\mu}\circ\sigma)(t)$，$a_{\mu}^{\Delta}(t)$ 是 Birkhoff 变量 $a_{\mu}(t)$ 的 delta 导数；$B:\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{2n}\to\mathbb{R}$ 是 Birkhoff 函数，$R_{\mu}:\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{2n}\to\mathbb{R}$ 是 Birkhoff 函数组. 假设这些函数都是 C_{rd}^1 函数，$\mu,\nu=1,2,\cdots,2n$.

时间尺度上 Pfaff-Birkhoff 原理为[7]

$$\delta S = \delta\int_{t_1}^{t_2}(R_{\nu}a_{\nu}^{\Delta} - B)\Delta t = 0 \tag{5}$$

且满足交换关系

$$\delta a_{\mu}^{\Delta}=(\delta a_{\mu})^{\Delta},\ (\mu=1,2,\cdots,2n) \tag{6}$$

以及端点条件

$$\delta a_{\mu}\big|_{t=t_1}=\delta a_{\mu}\big|_{t=t_2}=0,\ (\mu=1,2,\cdots,2n) \tag{7}$$

由时间尺度上 Pfaff-Birkhoff 原理(5)，利用式(6)和(7)，可以得到

$$\int_{t_1}^{t_2}\left\{R_{\mu}(t,a_{\rho}^{\sigma}(t)) + \int_{t_1}^{t}\left[-\frac{\partial R_{\nu}(\tau,a_{\rho}^{\sigma}(\tau))}{\partial a_{\mu}^{\sigma}(\tau)}a_{\nu}^{\Delta}(\tau) + \frac{\partial B(\tau,a_{\rho}^{\sigma}(\tau))}{\partial a_{\mu}^{\sigma}(\tau)}\right]\Delta\tau\right\}(\delta a_{\mu})^{\Delta}\Delta t = 0 \tag{8}$$

如果 a_{μ} 是相互独立的，则由时间尺度上 Dubois-Reymond 引理，由式(8)可得到时间尺度上自由 Birkhoff 方程

$$\frac{\partial R_{\nu}(t,a_{\rho}^{\sigma})}{\partial a_{\mu}^{\sigma}}a_{\nu}^{\Delta}-R_{\mu}^{\Delta}(t,a_{\rho}^{\sigma})-\frac{\partial B(t,a_{\rho}^{\sigma})}{\partial a_{\mu}^{\sigma}}=0,$$

$$(\mu,\nu,\rho=1,2,\cdots,2n) \tag{9}$$

如果 a_{μ} 不是相互独立的，而受到约束

$$f_{\beta}(t,a_{\rho}^{\sigma})=0\quad(\beta=1,2,\cdots,g;\rho=1,2,\cdots,2n) \tag{10}$$

将式(10)取变分，得

$$\frac{\partial f_{\beta}}{\partial a_{\rho}^{\sigma}}\delta a_{\rho}^{\sigma}=0\quad(\beta=1,2,\cdots,g) \tag{11}$$

将式(11)的每一个方程乘以约束乘子 λ_{β}，然后对 β 求和并积分，得

$$\int_{t_1}^{t_2}\lambda_{\beta}\frac{\partial f_{\beta}}{\partial a_{\rho}^{\sigma}}\delta a_{\rho}^{\sigma}\Delta t = 0 \tag{12}$$

由式(12)，并利用时间尺度上分部积分公式和端点条件(7)以及交换关系(6)，我们得到

$$0 = \int_{t_1}^{t_2}\lambda_{\beta}\frac{\partial f_{\beta}}{\partial a_{\rho}^{\sigma}}\delta a_{\rho}^{\sigma}\Delta t = \left(\delta a_{\rho}\int_{t_1}^{t}\lambda_{\beta}\frac{\partial f_{\beta}}{\partial a_{\rho}^{\sigma}}\Delta\tau\right)\Bigg|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2}\left(\int_{t_1}^{t}\lambda_{\beta}\frac{\partial f_{\beta}}{\partial a_{\rho}^{\sigma}}\Delta\tau\right)(\delta a_{\rho})^{\Delta}\Delta t$$

即

$$\int_{t_1}^{t_2}\left(\int_{t_1}^{t}\lambda_{\beta}\frac{\partial f_{\beta}}{\partial a_{\rho}^{\sigma}}\Delta\tau\right)(\delta a_{\rho})^{\Delta}\Delta t = 0 \tag{13}$$

将式(8)和式(13)相加，得

$$\int_{t_1}^{t_2}\left\{R_{\mu}(t,a_{\rho}^{\sigma}(t)) + \int_{t_1}^{t}\left[-\frac{\partial R_{\nu}(\tau,a_{\rho}^{\sigma}(\tau))}{\partial a_{\mu}^{\sigma}(\tau)}a_{\nu}^{\Delta}(\tau) + \frac{\partial B(\tau,a_{\rho}^{\sigma}(\tau))}{\partial a_{\mu}^{\sigma}(\tau)} + \lambda_{\beta}\frac{\partial f_{\beta}(\tau,a_{\rho}^{\sigma}(\tau))}{\partial a_{\mu}^{\sigma}(\tau)}\right]\Delta\tau\right\}(\delta a_{\mu})^{\Delta}\Delta t = 0 \tag{14}$$

由 Lagrange 乘子法，并利用时间尺度上 Dubois-Reymond 引理，由式(14)得到

$$R_{\mu}(t,a_{\rho}^{\sigma}(t)) + \int_{t_1}^{t}\left[-\frac{\partial R_{\nu}(\tau,a_{\rho}^{\sigma}(\tau))}{\partial a_{\mu}^{\sigma}(\tau)}a_{\nu}^{\Delta}(\tau) + \frac{\partial B(\tau,a_{\rho}^{\sigma}(\tau))}{\partial a_{\mu}^{\sigma}(\tau)} + \lambda_{\beta}\frac{\partial f_{\beta}(\tau,a_{\rho}^{\sigma}(\tau))}{\partial a_{\mu}^{\sigma}(\tau)}\right]\Delta\tau = C \tag{15}$$

利用时间尺度上不定积分存在定理[1]，由式(15)得到

$$\frac{\partial R_{\nu}(t,a_{\rho}^{\sigma})}{\partial a_{\mu}^{\sigma}}a_{\nu}^{\Delta}-R_{\mu}^{\Delta}(t,a_{\rho}^{\sigma})-\frac{\partial B(t,a_{\rho}^{\sigma})}{\partial a_{\mu}^{\sigma}} =\lambda_{\beta}\frac{\partial f_{\beta}(t,a_{\rho}^{\sigma})}{\partial a_{\mu}^{\sigma}},\ (\mu,\nu,\rho=1,2,\cdots,2n) \tag{16}$$

方程(16)是时间尺度上带乘子形式的约束 Birkhoff 方程. 如果系统非奇异，则由式(10)和(16)，可解出 $\lambda_{\beta}=\lambda_{\beta}(t,a_{\rho}^{\sigma})$. 于是方程(16)可写为

$$\frac{\partial R_\nu}{\partial a_\mu^\sigma}a_\nu^\Delta - R_\mu^\Delta - \frac{\partial B}{\partial a_\mu^\sigma} = \Lambda_\mu,\ (\mu = 1,2,\cdots,2n) \tag{17}$$

其中,

$$\Lambda_\mu = \lambda_\beta(t,a_\rho^\sigma)\frac{\partial f_\beta(t,a_\rho^\sigma)}{\partial a_\mu^\sigma} \tag{18}$$

是与约束(10)相应的约束反力.方程(17)可称为与时间尺度上约束 Birkhoff 系统(10),(16)相应的自由 Birkhoff 系统的 Birkhoff 方程.

3 时间尺度上约束 Birkhoff 系统的 Noether 对称性

引进时间尺度上关于时间 t 和变量 a^μ 的无限小变换

$$\bar{t} = t + \tilde{\Delta} t,\ \bar{a}_\mu(\bar{t}) = a_\mu(t) + \tilde{\Delta} a_\mu,\ (\mu = 1,2,\cdots,2n) \tag{19}$$

其中,$\tilde{\Delta}$ 表示非等时变分.式(19)的展开式为

$$\bar{t} = t + \varepsilon\xi_0(t,a_\rho),\ \bar{a}_\mu(\bar{t}) = a_\mu(t) + \varepsilon\xi_\mu(t,a_\rho),\ (\mu,\rho = 1,2,\cdots,2n) \tag{20}$$

其中,ε 是无限小参数,ξ_0 和 ξ_μ 是无限小生成元.

Birkhoff 系统的 Noether 对称性是指 Pfaff 作用量(4)在无限小变换(19)下的不变性.类似于文献[7],对于时间尺度上约束 Birkhoff 系统,如果存在规范函数 $G_N(t,a_\rho^\sigma)$ 使得无限小生成元 ξ_0 和 ξ_μ 满足 Noether 等式

$$\left(\frac{\partial R_\nu}{\partial t}a_\nu^\Delta - \frac{\partial B}{\partial t}\right)\xi_0 + \left(\frac{\partial R_\nu}{\partial a_\mu^\sigma}a_\nu^\Delta - \frac{\partial B}{\partial a_\mu^\sigma}\right)\xi_\mu^\sigma + R_\mu\xi_\mu^\Delta - B\xi_0^\Delta - \Lambda_\mu\,(\xi_\mu - a_\mu^\Delta\xi_0)^\sigma + G_N^\Delta = 0 \tag{21}$$

则对称性是相应自由 Birkhoff 系统(14)的 Noether 对称性.如果还满足限制方程

$$\frac{\partial f_\beta}{\partial a_\rho^\sigma}(\xi_\mu - a_\mu^\Delta\xi_0)^\sigma = 0 \quad (\beta = 1,2,\cdots,g) \tag{22}$$

则对称性是时间尺度上约束 Birkhoff 系统(10),(16)的 Noether 对称性.

4 时间尺度上约束 Birkhoff 系统的 Noether 定理

对于时间尺度上约束 Birkhoff 系统,由 Noether 对称性可直接找到 Noether 守恒量,有如下结果.

定理 1. 对于时间尺度上约束 Birkhoff 系统(10),(16),如果无限小变换(20)相应于系统的 Noether 对称性,则

$$I_N = R_\mu\xi_\mu - B\xi_0 - \mu(t)\left(\frac{\partial R_\mu}{\partial t}a_\mu^\Delta - \frac{\partial B}{\partial t}\right)\xi_0 + G_N \tag{23}$$

是该系统的 Noether 对称性导致的守恒量.

证明:由于

$$\frac{\Delta}{\Delta t}I_N = R_\mu^\Delta\xi_\mu^\sigma + R_\mu\xi_\mu^\Delta - B^\Delta\xi_0^\sigma - B\xi_0^\Delta - \frac{\Delta}{\Delta t}\left[\mu(t)\left(\frac{\partial R_\mu}{\partial t}a_\mu^\Delta - \frac{\partial B}{\partial t}\right)\right]\xi_0^\sigma - \mu(t)\left(\frac{\partial R_\mu}{\partial t}a_\mu^\Delta - \frac{\partial B}{\partial t}\right)\xi_0^\Delta + G_N^\Delta \tag{24}$$

文献[17]证明了如下第二 Euler-Lagrange 方程

$$\frac{\Delta}{\Delta t}\left(-L + \frac{\partial L}{\partial q^\Delta}q^\Delta + \mu(t)\frac{\partial L}{\partial t}\right) = -\frac{\partial L}{\partial t} \tag{25}$$

其中,$L = L(t,q^\sigma(t),q^\Delta(t))$ 是时间尺度上 Lagrange 函数.实际上,方程(25)是能量方程.类似于方程(25)的证明,易知

$$\frac{\Delta}{\Delta t}\left[B + \mu(t)\left(\frac{\partial R_\mu}{\partial t}a_\mu^\Delta - \frac{\partial B}{\partial t}\right)\right] = -\frac{\partial R_\mu}{\partial t}a_\mu^\Delta + \frac{\partial B}{\partial t} - \Lambda_\mu a_\mu^{\Delta\sigma} \tag{26}$$

将方程(26)和 Noether 等式(21)代入式(24),并利用方程(17),得到

$$\begin{aligned}\frac{\Delta}{\Delta t}I_N &= R_\mu^\Delta\xi_\mu^\sigma + R_\mu\xi_\mu^\Delta - B\xi_0^\Delta + \left(\frac{\partial R_\mu}{\partial t}a_\mu^\Delta - \frac{\partial B}{\partial t} + \Lambda_\mu a_\mu^{\Delta\sigma}\right) - \\ &\quad \mu(t)\left(\frac{\partial R_\mu}{\partial t}a_\mu^\Delta - \frac{\partial B}{\partial t}\right)\xi_0^\Delta - \left(\frac{\partial R_\mu}{\partial t}a_\mu^\Delta - \frac{\partial B}{\partial t}\right)\xi_0 - \\ &\quad R_\mu\xi_N^\Delta + B\xi_0^\Delta + \Lambda_\mu(\xi_\mu - a_\mu^\Delta\xi_0)^\sigma \\ &= R_\mu^\Delta\xi_\mu^\sigma - \left(\frac{\partial R_\nu}{\partial a_\mu^\sigma}a_\nu^\Delta - \frac{\partial B}{\partial a_\mu^\sigma}\right)\xi_\mu^\sigma + \Lambda_\mu\xi_\mu^\sigma = 0\end{aligned} \tag{27}$$

因此,式(23)是该系统的守恒量.证毕.

定理 1 可称为时间尺度上约束 Birkhoff 系统的 Noether 定理.

如果约束(10)不存在,则定理 1 给出时间尺度上自由 Birkhoff 系统的 Noether 定理,有

定理 2. 对于时间尺度上自由 Birkhoff 系统(9),如果存在规范函数 $G_N = G_N(t,a_\rho^\sigma)$ 使得无限小生成元 ξ_0 和 ξ_μ 满足 Noether 等式

$$\left(\frac{\partial R_\nu}{\partial t}a_\nu^\Delta - \frac{\partial B}{\partial t}\right)\xi_0 + \left(\frac{\partial R_\nu}{\partial a_\mu^\sigma}a_\nu^\Delta - \frac{\partial B}{\partial a_\mu^\sigma}\right)\xi_\mu^\sigma + R_\mu\xi_\mu^\Delta - B\xi_0^\Delta + G_N^\Delta = 0 \tag{28}$$

则系统的 Noether 对称性导致守恒量(23).

定理 2 中,如取 $G_N \equiv 0$,则给出文献[6]的结果.

如取 $\mathbb{T} = \mathbb{R}$,则 $\sigma(t) = t$,$\mu(t) = 0$,此时方程(16)给出

$$\frac{\partial R_\nu(t,a_\rho)}{\partial a_\mu}\dot{a}_\nu-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}R_\mu(t,a_\rho)-\frac{\partial B(t,a_\rho)}{\partial a_\mu}=\lambda_\beta\frac{\partial f_\beta(t,a_\rho)}{\partial a_\mu}\tag{29}$$

方程(29)是经典的约束 Birkhoff 方程[18].此时,定理 1 退化为如下定理.

定理 3. 对于经典约束 Birkhoff 系统(10),(29),如果无限小变换(20)相应于系统的 Noether 对称性,则系统存在守恒量,形如

$$I_N=R_\mu\xi_\mu-B\xi_0+G_N=\text{const.}\tag{30}$$

定理 3 是经典约束 Birkhoff 系统的 Noether 定理,已由文献[18]给出.

5 算例

例. 设时间尺度为

$$\mathbb{T}=\{3^{m+1}:m\in\mathbb{N}\}\tag{31}$$

系统的 Birkhoff 函数和 Birkhoff 函数组分别为

$$B=\frac{1}{2}[(a_1^\sigma)^2+(a_3^\sigma)^2+(a_4^\sigma)^2],$$
$$R_1=a_3^\sigma,R_2=a_4^\sigma,R_3=R_4=0\tag{32}$$

约束方程为

$$f_1=a_1^\sigma a_3^\sigma-c_1^2=0,f_2=a_1^\sigma+a_4^\sigma-c_2=0\tag{33}$$

试研究系统的 Noether 对称性与守恒量.

首先,计算前跳算子 $\sigma(t)$ 和步差函数 $\mu(t)$.由时间尺度(31),设 $t=3^{m+1}\in\mathbb{T}$,则

$$\sigma(t)=\inf\{3^{k+1}:3^{k+1}>3^{m+1},k\in\mathbb{N}\}=3^{m+2}=3t\tag{34}$$

于是

$$\mu(t)=\sigma(t)-t=2t\tag{35}$$

其次,建立系统的运动微分方程.时间尺度上约束 Birkhoff 方程(16)给出

$$-(a_3^\sigma)^\Delta-a_1^\sigma=\lambda_1a_3^\sigma+\lambda_2,-(a_4^\sigma)^\Delta=0,$$
$$a_1^\Delta-a_3^\sigma=\lambda_1a_1^\sigma,a_2^\Delta-a_4^\sigma=\lambda_2\tag{36}$$

由方程(33)和(36),可求得

$$\lambda_1=-\frac{a_3^\sigma}{a_1^\sigma}+\frac{a_1^\sigma-a_1}{2ta_1^\sigma},\ \lambda_2=-a_1^\sigma+\frac{(a_3^\sigma)^2}{a_1^\sigma}-\frac{a_1^\sigma a_3^\sigma-a_1a_3^\sigma}{2ta_1^\sigma}\tag{37}$$

由式(18),得到约束反力为

$$\Lambda_1=-a_1^\sigma,\Lambda_2=0,\Lambda_3=-a_3^\sigma+\frac{a_1^\sigma-a_1}{2t},$$
$$\Lambda_4=-a_1^\sigma+\frac{(a_3^\sigma)^2}{a_1^\sigma}-\frac{a_1^\sigma a_3^\sigma-a_1a_3^\sigma}{2ta_1^\sigma}\tag{38}$$

Noether 等式(21)给出

$$-a_1^\sigma\xi_1^\sigma+(a_1^\Delta-a_3^\sigma)\xi_3^\sigma+(a_2^\Delta-a_4^\sigma)\xi_4^\sigma+a_3^\sigma\xi_1^\Delta+a_4^\sigma\xi_2^\Delta-B\xi_0^\Delta-\Lambda_1(\xi_1-a_1^\Delta\xi_0)^\sigma-\Lambda_3(\xi_3-a_3^\Delta\xi_0)^\sigma-\Lambda_4(\xi_4-a_4^\Delta\xi_0)^\sigma+G_N^\Delta=0\tag{39}$$

方程(39)有解

$$\xi_0^1=0,\xi_1^1=1,\xi_2^1=\xi_3^1=\xi_4^1=0,G_N^1=0\tag{40}$$
$$\xi_0^2=0,\xi_1^2=0,\xi_2^2=1,\xi_3^2=\xi_4^2=0,G_N^2=0\tag{41}$$

生成元(40)和(41)都相应于系统的 Noether 对称性.由定理 1 得

$$I_N^1=a_3^\sigma=\text{const.}\tag{42}$$
$$I_N^2=a_4^\sigma=\text{const.}\tag{43}$$

式(42)和(43)是与生成元(40),(41)相应的 Noether 守恒量.

6 结论

时间尺度理论由于其统一性和拓展性特征,已经在科学和工程的诸多领域得到广泛应用.本文提出并研究了时间尺度上约束 Birkhoff 系统的 Noether 对称性与守恒量,建立了时间尺度上约束 Birkhoff 系统的 Noether 定理.时间尺度上 Birkhoff 系统和经典约束 Birkhoff 系统的 Noether 定理都是该定理的推论.由于时间尺度和 Birkhoff 系统的一般性,因此,文章方法和结果具有普遍意义.

参 考 文 献

1 Bohner M, Peterson A. Dynamic equations on time scales: an introduction with applications. Boston: Birkhäuser, 2001

2 Bohner M, Peterson A. Advances in dynamic equations on time scales. Boston: Birkhäuser, 2003

3 韩振来,孙书荣. 时间尺度上动态方程振动理论. 山东:山东大学出版社, 2014 (Han Z L, Sun S R. Vibration theory of dynamic equation on time scales. Shandong: Shandong University Press, 2014 (in Chinese))

4 Bartosiewicz Z, Torres D F M. Noether's theorem on time scales. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2008, 342(2): 1220~1226

5 Peng K K, Luo Y P. Dynamics symmetries of Hamiltonian system on time scales. *Journal of Mathematical Physics*, 2014, 55(4): 042702

6 Cai P P, Fu J L, Guo Y X. Noether symmetries of the nonconservative and nonholonomic systems on time scales. *Science China: Physics, Mechanics & Astronomy*, 2013, 56(5): 1017~1028

7 Song C J, Zhang Y. Noether theorem for Birkhoffian sys-

tems on time scales. *Journal of Mathematical Physics*, 2015,56(10):102701

8 周燕,张毅. 分数阶 Birkhoff 系统基于 Caputo 导数的 Noether 对称性与守恒量. 动力学与控制学报, 2015, 13(6):409~416 (Zhou Y, Zhang Y. Noether symmetry and conserved quantity for fractional Birkhoffian systems in terms of Caputo derivatives. *Journal of Dynamics and Control*, 2015,13(6):409~416 (in Chinese))

9 Martins N, Torres D F M. Noether′s symmetry theorem for nabla problems of the calculus of variations. *Applied Mathematics Letters*, 2010,23(12):1432~1438

10 Malinowska A B, Sidi Ammi M R. Noether′s theorem for control problems on time scales. *International Journal of Difference Equations*, 2014,9(1):87~100

11 Song C J, Zhang Y. Noether theory for Birkhoffian systems with nabla derivatives. *Journal of Nonlinear Sciences and Applications*, 2017,10(4):2268~2282

12 Zhai X H, Zhang Y. Noether theorem for non-conservative systems with time delay on time scales. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2017, 52:32~43

13 Song J, Zhang Y. Noether symmetry and conserved quantity for dynamical system with non-standard Lagrangianson time scales. *Chinese Physics B*, 2017,26(8):084501

14 Zu Q H, Zhu J Q. Noether theorem for nonholonomic nonconservative mechanical systems in phase space on time scales. *Journal of Mathematical Physics*, 2016, 57(8): 082701

15 Tian X, Zhang Y. Noether symmetry and conserved quantity for Hamiltonian system of Herglotz type on time scales. *Acta Mechanica*, 2018,229(9):3601~3611

16 张毅. 关于 Mei 对称性与 Noether 对称性的关系——以 Birkhoff 系统为例. 动力学与控制学报, 2016,14(1): 26~30 (Zhang Y. Relation between the Mei symmetry and the Noether symmetry——taking the Birkhoff system as an example. *Journal of Dynamics and Control*, 2016, 14(1):26~30 (in Chinese))

17 Bartosiewicz Z, Martins N, Torres D F M. The second Euler-Lagrange equation of variational calculus on time scales. *European Journal of Control*, 2011,17(1):9~18

18 梅凤翔. 李群李代数对约束力学系统的应用. 北京:科学出版社, 1999 (Mei F X. Applications of Lie groups and Lie algebras to constrained mechanical systems. Beijing:Science Press, 1999 (in Chinese))

NOETHER SYMMETRIES AND CONSERVED QUANTITIES OF CONSTRAINED BIRKHOFFIAN SYSTEMS ON TIME SCALES *

Zhang Yi†

(*College of Civil Engineering*, *Suzhou University of Science and Technology*, *Suzhou* 215011, *China*)

Abstract The Noether symmetries of constrained Birkhoffian systems on time scales were studied. Based on the principle of Pfaff-Birkhoff on time scales, the Birkhoff′s equations with multipliers on time scales for a constrained Birkhoffian system were established. The Noether identity on time scales was given, and the Noether symmetry of the constrained Birkhoffian system on time scales was defined. The Noether′s theorem of the constrained Birkhoffian system on time scales was proposed and proved, which revealed the relationship between the Noether symmetry and conserved quantity. Two special cases of the Noether′s theorem were given for a free Birkhoffian system on time scales and a classical constrained Birkhoffian system. Finally, a numerical example was presented to illustrate the effectiveness of this method.

Key words constrained Birkhoffian system, time scale, Noether symmetry, conserved quantity

Received 3 July 2018, revised 2 April 2019.

* The project supported by the National Natural Science Foundation of China(11572212,11272227,11972241).

† Corresponding author E-mail:zhy@mail.usts.edu.cn