第 17 卷第 5 期 2019 年 10 月
1672-6553/2019/17(5)/478-4
动力学与控制学报
JOURNAL OF DYNAMICS AND CONTROL
Vol.17 No.5
Oct. 2019

Lagrange 原著与广义动能原理

龙运佳†
（中国农业大学 力学系，北京 100083）

摘要 自古以来,学派林立,齐鸣共荣,殊途同归,如 Newton 派与非 Newton 派,又如多自由度系统动力学方法的微分派与非微分派,本文提出运动微分概念,得到与 Lagrange 原著失衡速度兼容的广义动能原理 GPT (Generalized Principle of Kinetic Energy),T 为动能 Kinetic Energy,并阐明其在空天力学与地面力学中的应用,GPT 是多自由度变参量系统动力学,实在、简便,一般的原理.

关键词 运动微分, 动力学, 动能, 功率, 失衡速度

DOI: 10.6052/1672-6553-2019-061

1 Lagrange 失衡速度

Lagrange 的分析力学原著——Analytical Mechanics[1].日人译成解析力学[2],数学家范会国曾在其理论力学[3]中称为解析动力学.

Lagrange 在书的第 1 卷第 I 部第 16 节給出了一个任何人都必须理解的重要概念:“任何人都必须(原文 must)将 virtuel 速度这个概念理解为物体平衡状态终止时,即物体发生运动的第一瞬间之速度”, 故 virtuel(英语为 virtual)速度为失衡速度.

他在第 1 卷第 I 部第 17 节,接着给出失衡速度原理:“任意数量之质点或物体组成的任何系统,当在任意力的作用下而处于平衡时,若系统受到无限小扰动,系统中各点移过代表其失衡速度之无限小距离,则各力与沿其作用方向移过的相应距离之乘积的总和恒为零,而顺力作用方向移过的微小距离为正,逆力作用方向移过的微小距离为负”.

18 世纪 80 年代,还没有矢量点积,导致其失衡速度原理只能通过力乘以代表失衡速度之微小距离的代数运算来表达.

19 世纪 80 年代,J.W.Gi-bbs 和 O.Heavside 创立了矢量点积理论[4],失衡速度原理实质上可直接表述为:任意数量之质点或物体组成的任何系统,当在任意力的作用下处于平衡时,若系统受到无限小扰动,则各力与其作用点失衡速度的点积之和恒为零.

基于失衡速度的概念,作者用运动微分算子,获得多自由度变参量系统动力学的广义动能原理.

2 GPT (Generalized Principle of Kinetic Energy)

本文提出运动微分(即排除对变或不变的系统参数的一切运算,仅剩对运动量微分)概念,得到多自由度理想约束系统解析动力学[5]的 GPT:

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}S=\frac{\partial}{\partial q_j}T \quad (j=1,2,\cdots,N)$$

其中,S 为系统的运动控制函数,T 为动能 Kinetic Energy

$$S=\frac{\dot{T}}{2}+L-\frac{P}{2}$$

功率 $P=\sum_{i=1}^{n}F_i\cdot v_i$,而 F_i,v_i 分别为各力矢(包括非理想约束力,质量变化引发的力[6])及其作用点速度矢.

$\dot{q}_j$为所设广义坐标 q_j对时间 t 之导数. 它們之间有约束方程

$$l_k(q_j,\dot{q}_j,t)=0 \quad (k=1,2,\cdots,h) \tag{1}$$

引入约束函数 $L=\{l_k\}_h\{\lambda_k\}_h^T$,其中 λ_k是待定乘子.

[证]:将方程 (1) 乘以 λ_k 后, 对 $\dot{q}_j$ 取偏导得

$$\lambda_k\frac{\partial l_k(q_j,\dot{q}_j t)}{\partial \dot{q}_j}=0 \tag{2}$$

$$(k=1,2,\cdots,h;\ j=1,2,\cdots,N)$$

2018-06-20 收到第 1 稿,2019-04-04 收到修改稿.
† 通讯作者 E-mail:yjlong@ cau.edu.cn

累加方程(2)得

$$\frac{\partial L}{\partial \dot q_j}=0,\ (j=1,2,\cdots,N)$$

因

$$\frac{\partial \dot T}{\partial \dot q_j}=\frac{\partial P}{\partial \dot q_j}=\sum_{i=1}^{n}F_i\cdot\frac{\partial v_i}{\partial \dot q_j}+\sum_{i=1}^{n}m_i\frac{\partial \dot v_i}{\partial \dot q_j}\cdot v_i$$

用附录 1 得

$$\frac{\partial \dot T}{\partial \dot q}=\sum_{i=1}^{n}F_i\cdot\frac{\partial v_i}{\partial \dot q}+2\sum_{i=1}^{n}m_i\frac{\partial v_i}{\partial \dot q}\cdot v_i=\sum_{i=1}^{n}F_i\cdot\frac{\partial v_i}{\partial \dot q}+2\frac{\partial T}{\partial q_j}$$

故

$$\frac{\partial}{\partial \dot q_j}S=\frac{1}{2}\frac{\partial \dot T}{\partial \dot q_j}-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}F_i\cdot\frac{\partial v_i}{\partial \dot q_j}+\frac{\partial L}{\partial \dot q_j}=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}F_i\cdot\frac{\partial v_i}{\partial \dot q_j}+\frac{1}{2}\cdot 2\frac{\partial T}{\partial q_j}-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}F_i\cdot\frac{\partial v_i}{\partial \dot q_j}+0=\frac{\partial T}{\partial q_j}$$

3　GPT 静力学

对动能在时空中变化率驱于零($\dot T\to 0,\frac{\partial T}{\partial q_j}\to 0$)的状态,有$\frac{\partial S}{\partial \dot q_j}=0,S=L-\frac{P}{2}$,对多自由度完整系统,变为$\frac{\partial P}{\partial \dot q_j}=0$. P 为各力与其作用点 Lagrange 失衡速度的点积之和.

4　GPT 在空天力学中的应用(交会,反导等)

当目标航天器轨道近似为圆时,用 GPT 求交会航天器相对目标航天器的线性化运动微分方程.

4.1　广义坐标 q_1,q_2,q_3(见附录 2)

4.2　算 T,S

质量为 m 的交会航天器动能为

$$T=\frac{m}{2}[(\dot x)^2+(\dot y)^2+(\dot z)^2]$$

系统的运动控制函数 S 为

$$S=\frac{\dot T}{2}+0-\frac{P}{2}=\frac{\dot T}{2}-\frac{P_1+P_2}{2}$$

其中,P_1 为助推器各类(包括因质量变化引发的)推力 F_{q_1},F_{q_2},F_{q_3}的功率

$$P_1=F_{q_1}\dot q_1+F_{q_2}\dot q_2+F_{q_3}\dot q_3$$

P_2 为地心引力 $N=\frac{\mu m}{x^2+y^2+z^2}$的功率,$\mu$ 为地球的引力系数

$$P_2=(N_x i+N_y j+N_z k)\cdot(\dot x i+\dot y j+\dot z k)=-\frac{\mu m}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}(x\dot x+y\dot y+z\dot z)$$

4.3　代入 GPT

得交会航天器对轨道近似圆之目标航天器的运动微分方程为线性化 C-W 方程[7]

$$\ddot q_1+2n\dot q_2=a_{q_1}$$
$$\ddot q_2-2n\dot q_1-3n^2q_2=a_{q_2}$$
$$\ddot q_3+n^2q_3=a_{q_3}$$

其中,$a_{q_1}=\frac{F_{q_1}}{m},a_{q_2}=\frac{F_{q_2}}{m},a_{q_3}=\frac{F_{q_3}}{m},n=\sqrt{\frac{\mu}{(R+H)^3}}$

5　GPT 在地面力学中的应用

在地面振动 $A\sin(\omega t)$时,具质量 m ,转动惯量为 J 的车辆,在坡度为 α 的冰坡上滑移, 可用 GPT 得其运动微分方程组和平衡时的 α 角,解法如下:

5.1　设广义坐标:q_1,q_2,q_3

q_1 为水平坐标,q_2 为坡面上与 q_1 垂直的坐标,q_3 为车辆质心速度与 q_1 间的角度

5.2　建 l_k

$$\because \frac{\dot q_2}{\dot q_1}=\tan(q_3)\quad \therefore\ k=1,$$

$$l_k=\dot q_2\cos(q_3)-\dot q_1\sin(q_3)$$

5.3　算 T,S

$$T=\frac{1}{2}m\{(\dot q_1)^2+[\dot q_2+A\omega\cos(\omega t)\sin(\alpha)]^2+[A\omega\cos(\omega t)\cos(\alpha)]^2\}+\frac{1}{2}J(\dot q_3)^2$$

$$S=\frac{1}{2}\{\dot T+mg\dot q_2\sin(\alpha)+mA\omega^2\sin(\omega t)\sin(\alpha)\}+\lambda(\dot q_2\cos(q_3)-\dot q_1\sin(q_3))$$

5.4　用 GPT 得

$$m\ddot q_1+\lambda\sin(q_3)=0 \tag{3}$$

$$m\ddot q_2-\lambda\cos(q_3)=-m[g+A\omega^2\sin(\omega t)]\sin(\alpha) \tag{4}$$

$$\ddot q_3=0 \tag{5}$$

方程(3),(4),(5)组成车辆的运动微分方程

与 Lagrange 方程所得结果一致.

5.5 用 GPT 静力学求平衡时的 α 角

$$S=L-\frac{P}{2}=\lambda(\dot{q}_2\cos(q_3)-\dot{q}_1\sin(q_3))+\frac{1}{2}mg\dot{q}_2\sin(q_3)$$

因$\frac{\partial}{\partial\dot{q}_j}S=0$，当 $j=1$，得 $\lambda sin(q_3)=0$，因 $q_3\neq0$，得 $\lambda=0$.

当$j=2$,$\lambda\cos(q_3)+\frac{1}{2}mg\sin(\alpha)=0$,得 $\sin(\alpha)=0$

故平衡时 $\alpha=0$.

6 结论

用运动微分概念得到与 Lagrange 原著兼容的 GPT,并阐明其在地面力学与空天力学在交会反导中的应用. GPT 不用广义力,变分,用了 Lagrange Equations (LE) 没有的运动微分,故 GPT 与 LE 完全不相关,其基本概念虽源于 Lagrange 原著,但 GPT 比 LE 更实在,更简便,更一般.

GPT 的重要性还在于:可用于新一代军用或民用之变参量系统,如变循环,变推力,变力矩,变质量,变传动,变刚度,变阻尼系统等.当参数变化时,保障系统运动控制的可靠性.

参 考 文 献

1 Lagrange J L. Analytical mechanics (Translated from the Mecanique analytique). Holland: Kluwer Academic Publishers, 1997

2 園田久. 解析力学. 朝仓书店, 1982 (Yamada. Analytical mechanics. Chaokang Bookstore, 1982 (in Chinese))

3 范会国. 理论力学. 龙门联合书局, 1944 (Fan H G. Theoretical mechanics. Longmen United Press, 1982 (in Chinese))

4 Roger L. Cooke. The history of mathematics. John Wiley & Sons, 2013

5 龙运佳. 解析动力学. 中国工程机械学报, 2012, 10 (1): 29~31 (Long Y J. Dissecting dynamics. *Chinese Journal of Construction Machinery*, 2012, 10(1): 29~31 (in Chinese))

6 马尔契夫. 理论力学. 李俊峰,译. 北京:高等教育出版社, 2006 (Markeyev A P. Theoretical mechanics. Li J F. Beijing: Higher Education Press, 2006 (in Chinese))

7 Clohessy W H, Wiltshire R S. Terminal guidance system for satellite rendezvous. *Journal of the Astronautical Science*, 1960, 27(9): 653~678

LAGRANGE ORIGINAL & GENERALIZED PRINCIPLE OF KINETIC ENERGY

Long Yunjia†

(*Mechanics Department*, *China Agricultural University*, *Beijing* 100083, *China*)

Abstract Since the ancient times, schools of thought stands like a forest, prosperity and air views together, and different ways lead to the same goal, such as Newton and non-Newton schools, and differential and non-differential schools in dynamics. In this paper, the concept of kinetic differential was proposed, and the generalized principle of kinetic energy (GPT) was obtained, which is compatible with the virtual velocity in Lagrange′s original work (Analytical Mechanics). Its applications in aerospace dynamics and ground mechanics were expounded, which indicated that the GPT is an actual, easy and general principle of dynamics in the multi-degree of freedoms (MDF) systems with variable parameters.

Key words kinetic differential, dynamics, kinetic energy, power, virtual velocity

Received 20 June 2018, revised 4 April 2019.

† Corresponding author E-mail: yjlong@cau.edu.cn

附录 1

$$\frac{\partial \dot{v}_i}{\partial \dot{q}_j}=2\frac{\partial v_i}{\partial q_j}$$

[证]

$$\begin{aligned}\frac{\partial \dot{v}_i}{\partial \dot{q}_j} &= \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}\left(\sum_{S=1}^{N}\frac{\partial r_i}{\partial q_S}\ddot{q}_S+\sum_{j=1}^{N}\sum_{S=1}^{N}\frac{\partial^2 r_i}{\partial q_j\partial q_S}\dot{q}_j\dot{q}_S+2\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial^2 r_i}{\partial q_j\partial t}\dot{q}_j+\frac{\partial^2 r_i}{\partial t^2}\right)\\ &= 2\sum_{S=1}^{N}\frac{\partial^2 r_i}{\partial q_j\partial q_S}\dot{q}_S+2\frac{\partial^2 r_i}{\partial q_j\partial t}=2\frac{\partial}{\partial q_j}\left(\sum_{S=1}^{N}\frac{\partial r_i}{\partial q_S}\dot{q}_S+\frac{\partial r_i}{\partial t}\right)\\ &= 2\frac{\partial v_i}{\partial q_j}\end{aligned}$$

附录 2

惯性坐标系 $Oxyz$:

原点在地心 O 处,Ox 在赤道平面 Oxy 上指向春分点,Oz 垂直于 Oxy 指向北极星.

$Oxyz$ 为右手直角坐标系,交会航天器在其中坐标为 x,y,z.

轨道坐标系 $Cq_1q_2q_3$:

原点在目标航天器质心 C 处,Cq_1 与 Cq_3 分别沿 OC 与 Oz,Cq_1 与 x 间的角度为 θ,

$Cq_1q_2q_3$ 为右手直角坐标系,交会航天器在其中的坐标 q_1,q_2,q_3 为广义坐标.

坐标系间的关系:

$$\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(q_1+R+H)cos\theta-q_2sin\theta\\(q_1+R+H)sin\theta+q_2cos\theta\\q_3\end{bmatrix}$$

其中 $H=OC-R$,R 为地球半径.