第 17 卷第 5 期 2019 年 10 月
1672-6553/2019/17(5)/473-5
动 力 学 与 控 制 学 报
JOURNAL OF DYNAMICS AND CONTROL
Vol.17 No.5
Oct. 2019

弹性细杆弯扭度有突变时的 Lagrange 方程 *

薛纭[1†]　王鹏[2]
(1.上海应用技术大学 机械工程学院，上海　201418)(2.济南大学 土木建筑学院，济南　250022)

摘要　根据弹性细杆静力学的 Kirchhoff 动力学比拟方法，将弹性细杆截面的弯扭度和形心应变矢有突变的弹性变形比拟为动力学中的打击运动现象.分别从精确 Cosserat 弹性细杆和 Kirchhoff 弹性细杆静力学的 Lagrange方程出发，导出了弯扭度和形心应变矢有突变时的 Lagrange 方程，其形式与打击运动的 Lagrange 方程形式相同.分析了弯扭度和形心应变矢的突变对挠曲线光滑性的影响.为弹性细杆弯扭度有突变时的平衡分析提供分析力学方法.

关键词　弹性细杆，　分析力学，　弯扭度突变，　动力学比拟，　打击运动

DOI：　10.6052/1672-6553-2019-071

引言

Kirchhoff 弹性杆力学理论是研究弹性细杆大变形导致复杂力学行为的有效方法，其中起关键作用的是“Kirchhoff 动力学比拟”思想[1,2].基于弹性细杆平衡的 Kirchhoff 方程与刚体定点转动的 Euler 方程在数学形式上的相似性，刚体动力学方法用于弹性细静力学研究.由 Kovalevskaya 陀螺产生 Kovalevskaya 弹性杆[3]，还形成了弹性细杆静力学的分析力学方法[4-9].为弹性细杆力学提供了新的研究方法和思路.Kirchhoff 弹性杆静力学方程还可以表达成 Schrödinger 方程的形式[10-12]，作者建立了弹性细杆平衡与粒子波动的比拟关系[13]，可将 Schrödinger 方程的求解方法用于弹性细杆的平衡问题.

工程中存在弹性杆在微小弧段上出现弯扭度急剧变化或弹性杆中心线出现尖点的情况.刚度的局部急剧削弱，或者杆侧向载荷的突然加强(如集中力偶)都将引起弯扭度等几何量的突变，或使中心线出现尖点.按照“Kirchhoff 动力学比拟”思想，此现象可比拟为动力学中的碰撞现象，并可用碰撞方程近似描述.有两种情况，其一是截面形心的应变矢和弯扭度发生突变；其二是仅弯扭度发生突变.本文用分析力学的方法研究其静力学建模问题，分别从精确 Cosserat 弹性杆模型和 Kirchhoff 弹性杆模型下平衡的 Lagrange 方程出发，导出应变矢和弯扭度发生突变时的 Lagrange 方程，以提供近似分析的方法.

1　基于精确 Cosserat 弹性细杆模型

考虑精确 Cosserat 弹性细杆模型.设 $O-\xi\eta\zeta$ 为惯性参照系，基矢量为 $\boldsymbol{e}_\xi,\boldsymbol{e}_\eta,\boldsymbol{e}_\zeta$；$P-xyz$ 为与截面固连的形心主轴坐标系，基矢量 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ 与截面固连，$\boldsymbol{e}_3$ 为截面法矢量，指向弧坐标增加的方向.设弹性细杆中心线在变形前为直线，弧坐标为 s，变形后为曲线，弧坐标为 $S=S(s)$；在平面截面假设下，其位置用截面的 Euler 角列阵 $\boldsymbol{q}$ 和截面形心相对惯性系的矢径 $\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OP}$的坐标列阵 $\boldsymbol{r}$ 表达如下：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{q}&=[\psi(S)\quad\theta(S)\quad\varphi(S)]^T\\\boldsymbol{r}&=[\xi(S)\quad\eta(S)\quad\zeta(S)]^T\end{aligned}\tag{1}$$

为简单计，$\boldsymbol{q}$，$\boldsymbol{r}$ 的元素依次用广义坐标 q_α，$(\alpha=1,\cdots,6)$表示.截面形心的应变矢 $\boldsymbol{\gamma}$ 和弯扭度 $\boldsymbol{\omega}$ 都是以变形前弧坐标为基准；沿中心线作用有分布力 $\boldsymbol{f}(S)$ 和分布力偶 $\boldsymbol{m}(S)$(不计其因截面形心应变的影响，集中载荷或刚度突变情形可用奇异函数表达[14]).弹性细杆的挠曲线微分方程为：

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}=\boldsymbol{e}_3+\boldsymbol{\gamma}\tag{2}$$

2018-06-08 收到第 1 稿，2019-04-10 收到修改稿.
＊国家自然科学基金资助项目(11372195)
† 通讯作者 E-mail：xy@ sit.edu.cn

其中,$\boldsymbol{\gamma}$ 为截面形心即轴线的应变矢.

设弹性杆服从线性本构关系,其主轴分量表达式为:

$$F_i=K_i\gamma_i,\ m_i=B_i\omega_i,\ (i=1,2,3) \tag{3}$$

其中,K_i,B_i 为刚度系数;$\boldsymbol{F}$,$\boldsymbol{m}$ 分别为截面内力在形心的主矢和主矩.弹性细杆平衡的 Euler-Lagrang 方程为:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{\partial L}{\partial q'_\alpha}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}+G_\alpha=0,\ (\alpha=1,\cdots,6) \tag{4}$$

其中,

$$L=L^p+L^r \tag{5}$$

为弹性细杆 Cosserat 模型的 Lagrange 函数;

$$L^p=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}K_i\gamma_i^2,$$

$$L^r=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}B_i\omega_i^2 \tag{6}$$

分别为截面的弹性平移和弹性转动应变能;

$$G_\alpha=\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}s}\left(\boldsymbol{m}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{\omega}}{\partial q'_\alpha}\right),\ (\alpha=1,2,3),$$
$$G_\alpha=\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}s}\left(\boldsymbol{f}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial q_\alpha}\right),\ (\alpha=4,5,6) \tag{7}$$

为关于广义坐标 q_α 的广义力集度;$q'_\alpha=\dfrac{\mathrm{d}q_\alpha}{\mathrm{d}s}$;在应变的一次近似下可取 $\mathrm{d}S/\mathrm{d}s=1$.

设 Δs 为小量,且在中心线弧坐标为 $S_0=S(s_0)$ 和 $S_0+\Delta S=S(s_0+\Delta s)$ 的弧段内,广义坐标 q_α 变化很小,而应变矢 $\boldsymbol{\gamma}$ 和弯扭度 $\boldsymbol{\omega}$ 发生较大变化.将 $\mathrm{d}s$ 乘式(4),并从 s_0 到 $s_0+\Delta s$ 积分,再令 $\Delta s\to0$,得到

$$\lim_{\Delta s\to0}\left[\int_{s_0}^{s_0+\Delta s}\mathrm{d}\left(\frac{\partial L}{\partial q'_\alpha}\right)-\int_{s_0}^{s_0+\Delta s}\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}\mathrm{d}s+\int_{s_0}^{s_0+\Delta s}G_\alpha\mathrm{d}s\right]=0,\quad(\alpha=1,\cdots,6) \tag{8}$$

记

$$\hat{G}_\alpha=\lim_{\Delta s\to0}\int_{s_0}^{s_0+\Delta s}G_\alpha\mathrm{d}s,\quad(\alpha=1,\cdots,6) \tag{9}$$

$$\Delta\left(\frac{\partial L}{\partial q'_\alpha}\right)=\lim_{\Delta s\to0}\int_{s_0}^{s_0+\Delta s}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{\partial L}{\partial q'_\alpha}\right)\right]\mathrm{d}s=\left.\frac{\partial L}{\partial q'_\alpha}\right|_{s_0+\Delta s}-\left.\frac{\partial L}{\partial q'_\alpha}\right|_{s_0} \tag{10}$$

分别为动力学比拟意义上的"广义冲量"的负值和"广义动量"的增量. 注意到突变是在微分弧段内发生,所以有

$$\lim_{\Delta s\to0}\int_{s_0}^{s_0+\Delta s}\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}\mathrm{d}s=0,\quad(\alpha=1,\cdots,6) \tag{11}$$

综上,式(8)写作

$$\Delta\left(\frac{\partial L}{\partial q'_\alpha}\right)+\hat{G}_\alpha=0,(\alpha=1,\cdots,6) \tag{12}$$

式(12)就是基于精确 Cosserat 弹性杆模型的应变矢和弯扭度有突变时的 Lagrange 方程,与分析力学中打击运动的 Lagrange 方程形式相同[15].在已知 $(q_\alpha,q'_\alpha)|_{s_0}$, $\hat{G}_\alpha$, $(\alpha=1,\cdots,6)$ 的情况下,通过式(12)可解出 $(q'_\alpha)|_{s_0+\Delta s}$, $(\alpha=1,\cdots,6)$. 由式(2)可知,在广义坐标 q_α 都不变的情况下,q'_α, $(\alpha=1,\cdots,6)$ 在 $S_0=S(s_0)$ 处微段的突变将使弹性杆挠曲线在该点出现尖点,q'_3 的突变不影响挠曲线形状.

2 基于 Kirchhoff 弹性细杆模型

不计截面形心应变时即为弹性细杆的 Kirchhoff 模型.弹性细杆的挠曲线微分方程为

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}=\boldsymbol{e}_3 \tag{13}$$

本构方程(3)中的第 1 式不存在,本构方程的主轴分量形式为

$$m_i=B_i\omega_i,(i=1,2,3) \tag{14}$$

此时,截面姿态坐标 q_α,$(\alpha=1,2,3)$ 和内力主矢 $\boldsymbol{F}$ 为基本变量.对于除端点外,沿中心线只受集中力偶和分布力偶作用、不受力作用的弹性细杆,截面主矢 $\boldsymbol{F}$ 为常矢量,不失一般性,设

$$\boldsymbol{F}=F_0\boldsymbol{e}_\zeta \tag{15}$$

弹性细杆平衡的 Euler-Lagrange 方程为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{\partial L_K}{\partial q'_\alpha}\right)-\frac{\partial L_K}{\partial q_\alpha}+G_\alpha=0,\quad(\alpha=1,2,3) \tag{16}$$

其中,

$$L_K=L_r-V \tag{17}$$

为基于 Kirchhoff 弹性细杆模型和守恒量(15)的 Lagrange 函数;

$$L^r=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}B_i\omega_i^2,\ V=F_0\cos\theta \tag{18}$$

为截面弹性转动应变能和势能.

同前,在中心线弧坐标为 s_0 和 $s_0+\Delta s$ 的弧段内,广义坐标 q_α,$(\alpha=1,2,3)$ 变化很小,而弯扭度 $\boldsymbol{\omega}$ 发生较大变化.将 $\mathrm{d}s$ 乘式(16)两边,并从 s_0 到 $s_0+\Delta s$ 积分,再令 $\Delta s\to0$,得到

$$\lim_{\Delta s\to0}\left[\int_{s_0}^{s_0+\Delta s}\mathrm{d}\left(\frac{\partial L_K}{\partial q'_\alpha}\right)-\int_{s_0}^{s_0+\Delta s}\frac{\partial L_K}{\partial q_\alpha}\mathrm{d}s+\int_{s_0}^{s_0+\Delta s}G_\alpha\mathrm{d}s\right]=0,\quad(\alpha=1,2,3) \tag{19}$$

记

$$\hat{G}_\alpha = \lim_{\Delta s\to 0}\int_{s_0}^{s_0+\Delta s} G_\alpha \mathrm{d}s, \quad (\alpha=4,5,6) \tag{20}$$

$$\Delta\left(\frac{\partial L_K}{\partial q'_\alpha}\right) = \lim_{\Delta s\to 0}\int_{s_0}^{s_0+\Delta s}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{\partial L_K}{\partial q'_\alpha}\right)\right]\mathrm{d}s = \left.\frac{\partial L_K}{\partial q'_\alpha}\right|_{s_0+\Delta s} - \left.\frac{\partial L_K}{\partial q'_\alpha}\right|_{s_0} \tag{21}$$

分别为动力学比拟意义上的“广义冲量”的负值和“广义动量”的增量.注意到突变在微分弧段内发生,且广义坐标不变,所以有

$$\lim_{\Delta s\to 0}\int_{s_0}^{s_0+\Delta s}\frac{\partial L_K}{\partial q_\alpha}\mathrm{d}s = 0, \quad (\alpha = 1,2,3) \tag{22}$$

综上,式(19)写作

$$\Delta\left(\frac{\partial L_K}{\partial q'_\alpha}\right) + \hat{G}_\alpha = 0, \quad (\alpha=1,2,3) \tag{23}$$

式(23)就是基于 Kirchhoff 弹性细杆模型的弯扭度有突变时的 Lagrange 方程,与分析力学中打击运动的 Lagrange 方程形式相同[15].在已知$(q_\alpha, q'_\alpha)|_{s_0}$和$\hat{G}_\alpha$,$(\alpha=1,2,3)$的情况下,通过式(23)可解出$(q'_\alpha)|_{s_0+\Delta s}$,$(\alpha=1,2,3)$.由式(13)可知,在广义坐标$q_\alpha$,(1, 2, 3)不变的情况下,$q'_\alpha$, $(\alpha=1,2)$在$S_0=S(s_0)$处的突变也将影响弹性细杆挠曲线在该点的光滑性.q'_3的突变不影响挠曲线形状,但是曲线的 2 阶导数

$$\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s^2} = \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{e}_3 \tag{24}$$

在此点不光滑.

3　结语

弯扭度或截面形心应变矢有突变时的 Lagrange 方程式(12)和式(23)与打击运动的 Lagrange 方程的形式相同,可见弹性细杆截面形心和姿态的不光滑性可比拟于动力学中的打击运动或碰撞现象.完全可以用动力学中研究打击运动或碰撞现象的方法研究弹性细杆的这类变形.

参　考　文　献

1　Love A E H. Atreatise on the mathematical theory of elasticity(4th ed.), New York: Dover, 1927

2　刘延柱. 弹性细杆非线性力学——DNA 力学模型的理论基础. 北京:清华大学出版社, 2006 (Liu Y Z. Nonlinear mechanics of thin elastic rod——Theoretical basis of mechanicl model of DNA. Bejing: Tsinghua University Press, 2006 (in Chinese))

3　刘延柱. Kovalevskaya 弹性杆. 力学与实践, 2003, 25(5):21~23 (Liu Y Z. Elastic rod in Kovalevskaya case. *Mechanics in Engineering*, 2003, 25(5):21~23 (in Chinese))

4　薛纭,刘延柱,陈立群. 超细长弹性杆的分析力学问题.力学学报, 2005, 37(4):485~493 (Xue Y, Liu Y Z, Chen L Q. On Analytical mechanics for a super-thin elastic rod. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2005, 37(4):485~493 (in Chinese))

5　薛纭,曲佳乐,陈立群. Cosserat 生长弹性杆动力学的高斯最小拘束原理. 应用数学和力学, 2015, 36(7): 700~709 (Xue Y, Qu J L, Chen L Q. Gauss principle of least constraints for Cosserat growing elastic rod dynamics. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2015, 36(7): 700~709 (in Chinese))

6　刘延柱,薛纭. 基于高斯原理的 Cosserat 弹性杆动力学模型,物理学报, 2015, 64(4):044601~044605 (Liu Y Z, Xue Y. Dynamical model of Cosserat elastic rod based on Gauss principle. *Acta Physics Sinica*, 2015, 64(4): 044601~044605 (in Chinese))

7　Wang P, Xue Y. Conformal invariance of Mei symmetry and conserved quantities of Laggrange equation of thin elagstic rod. *Nonlinear Dynamics*, 2016, 83:1822

8　刘延柱. 杆网系统基于高斯原理的动力学建模. 动力学与控制学报, 2018, 16(4):289~294 (Liu Y Z. Dynamical moldeling of a net system of rods based on Gauss s principle. *Journal of Dynamics and Control*, 2018, 16(4):289~294 (in Chinese))

9　薛纭,翁德玮,陈立群. 弹性杆的 Greenhill 公式与 Kirchhoff 动力学比拟. 动力学与控制学报, 2019, 9(3), 9(3):193~196 (Xue Y, Weng D W, Chen L Q. Greenhill formula of an elastic rod and Kirchhoff kinetic analogy, *Journal of Dynamics and Control*, 2019, 9(3), 9(3):193~196 (in Chinese))

10　Shi Y, Hearst J E. The Kirchhoff elagstic rod, the nonlinear Schrödinger equation, and DNA supercoiling. *Journal of Chemical Physics*, 1994, 101:518625200

11　Xue Y, Liu Y Z, Chen L Q. The Schrödinger equation for a Kirchhoff elagstic rod with non-circular cross section. *Chinese Physics*, 2004, 13(6):794~797

12　薛纭,刘延柱,陈立群. 复弯矩表示的非圆截面杆平衡的 Schrödinger 方程及其半解析解. 力学季刊, 2004, 25(4): 463 ~ 469 (Xue Y, Liu Y Z, Chen L Q.

Schrödinger equation of equilibrium for a thin elastic rod with non-circular cross section in terms of complex beding moment and its half analytical solution. *Chinese Quarterly of Mechanics*, 2004,25(4):463~469 (in Chinese))

13 王鹏,薛纭. 弹性细杆静力学的薛定谔粒子波动比拟. 北京大学学报(自然科学版), 2016,52(4):676~680 (Wang P, Xue Y. Dynamics analogy of thin elastic rod and Schrödinger particle wave. *Acta Scientiarum Naturalium Universitatis Pekinensis*, 2016,52(4):676~680 (in Chinese))

14 薛纭,翁德玮. Kirchhoff 弹性杆不连续量的奇异表达. 北京大学学报, 2016,52(4):687~691 (Xue Y, Weng D W. Discontinuous quantities of Kirchhoff elastic rod expressed by singularity function. *Acta Scientiarum Naturalium Universitatis Pekinensis*, 2016,52(4):687~691 (in Chinese))

15 梅凤翔. 分析力学(上卷). 北京:北京理工大学出版社, 2013 (Mei F X. Analytical mechanics(Ⅰ). Bejing: Beijing Institute of Technology Press, 2013 (in Chinese))

16 刘延柱. 高等动力学(第 2 版). 北京:高等教育出, 2016 (Liu Y Z. Advanced dynamics(2th ed.). Beijing: Higher Education Press, 2016 (in Chinese))

LAGRANGE EQUATIONS OF THIN ELASTIC ROD WITH MUTATION OF CURVATURE-TWISTING VECTOR *

Xue Yun[1†] Wang Peng[2]

(1.*School of Mechanical Engineering*, *Shanghai Institute of Technology*, *Shanghai* 201418, *China*)

(2.*School of Civil Engineering and Architecture*, *University of Jinan*, *Ji'nan* 250022, *China*)

Abstract According to the Kirchhoff kinetic analogy method, the elastic deformation of a thin elastic rod with mutation of either curvature-twisting vector or strain vector at section center was analogized as the striking motion. Based on the Cosserat and Kirchhoff thin elastic rod model, respectively, the Lagrange equations of the elastic rod with mutation of curvature-twisting vector or section center strain vector were derived. It was found that the derived equations have the same forms as the Lagrange equation of striking motion. Finally, the effects of the mutation of curvature-twisting vector or strain vector at section center on the smoothness of the deflection curve were analyzed. This study provides an analytical mechanics method for the equilibrium analysis of the elastic rod with mutation of curvature-twisting vector or strain vector at section center.

Key words thin elastic rod, analytical mechanics, mutation of curvature-twisting vector, kinetic analogy, striking motion

Received 8 June 2018, revised 10 April 2019.

* The project supported by the National Natural Science Foundation of China(11372195).

† Corresponding author E-mail: xy@ sit.edu.cn

附录:弯扭度 ω 和形心应变 γ 的广义坐标表达

截面的姿态用 Euler 角表达. 记 $q_1=\psi, q_2=\theta$, $q_3=\varphi$. 弯扭度 ω 在主轴基下的矩阵式为[16]

$$\boldsymbol{\omega}=(\boldsymbol{\Theta}\boldsymbol{q}')^{\mathrm{T}}\underline{\boldsymbol{e}}^{\mathrm{P}} \tag{i}$$

其中,

$$\underline{\boldsymbol{e}}^{\mathrm{P}}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{e}_1\\ \boldsymbol{e}_2\\ \boldsymbol{e}_3\end{pmatrix},\ \boldsymbol{q}'=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\begin{pmatrix}\boldsymbol{q}_1\\ \boldsymbol{q}_2\\ \boldsymbol{q}_3\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{\Theta}=\begin{pmatrix}\sin\theta\sin\varphi & \cos\varphi & 0\\ \sin\theta\cos\varphi & -\sin\varphi & 0\\ \cos\theta & 0 & 1\end{pmatrix} \tag{ii}$$

截面形心的位置用惯性参考系 $O-\xi\eta\zeta$ 的 Descartes坐标表达. 记 $q_4=\xi, q_5=\eta, q_6=\zeta$. 形心应变的矢量式为

$$\gamma=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}-\boldsymbol{e}_3 \tag{iii}$$

矩阵形式为

$$\begin{pmatrix}\gamma_1\\ \gamma_2\\ \gamma_3+1\end{pmatrix}=\boldsymbol{Q}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\begin{pmatrix}q_4\\ q_5\\ q_6\end{pmatrix} \tag{iv}$$

其中, $\gamma_i=\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{e}_i$, $(i=1,2,3)$, $\boldsymbol{Q}$ 为主轴基在惯性基下的方向余弦矩阵,用 Euler 角表为

$$\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}c\psi c\varphi-c\theta s\psi s\varphi & c\varphi s\psi+c\psi c\theta s\varphi & s\theta s\varphi\\ -c\psi s\varphi-c\theta s\psi c\varphi & -s\varphi s\psi+c\psi c\theta c\varphi & s\theta c\varphi\\ s\psi s\theta & -c\psi s\theta & c\theta\end{pmatrix} \tag{v}$$

这里字母 s, c 分别表示正弦和余弦 sin, cos.