

# 非定常完整约束系统的线性映射方法\*

王勇<sup>†</sup> 吴兴达 曹会英

(广东医科大学 信息工程学院, 东莞 523800)

**摘要** 通过一阶线性映射可以从非定常完整约束系统的位形空间映射出一个时空  $\Pi$ , 并诱导出时空  $\Pi$  上的附加几何结构(度规和联络), 由此可以写出约束系统在时空  $\Pi$  中的运动方程. 当一阶线性映射不可积时, 时空  $\Pi$  是一个 Riemann-Cartan 空间; 当一阶线性映射可积时, 时空  $\Pi$  将退化为一个 Riemann 空间, 且此时由这种线性映射方法得到的时空  $\Pi$  中的运动方程等价于用广义坐标表示的约束系统的 Lagrange 方程.

**关键词** 一阶线性映射, 非定常完整约束, Riemann-Cartan 空间, Lagrange 方程

DOI: 10.6052/1672-6553-2019-056

## 引言

分析力学研究约束问题的重要思想之一就是  
将约束系统尽可能放在低维空间中描述, 从而减少  
运动微分方程的数目, 使问题得以简化. 目前实现  
这一思想的方法有很多, 其中最重要的是基于对称  
性和守恒量的约化方法<sup>[1-7]</sup>.

上世纪 90 年代, 德国学者 Kleinert 及其合作者  
提出了另一种使约束系统降维的方法. 这种方法通  
过构建约束系统的低维 Riemann-Cartan 位形空间,  
不仅减少了约束系统的运动微分方程数目, 而且指  
出了约束的非完整性与 Riemann-Cartan 位形空间  
挠率之间的相互联系<sup>[8-10]</sup>. 在我国学者随后的工  
作中, 将这种方法推广为约束系统位形空间之间的一  
阶线性映射方法<sup>[11,12]</sup>. 证明了当一阶线性映射可积  
时, 映射的像空间是一个无挠率的 Riemann 位形空  
间; 而当一阶线性映射不可积时, 映射的像空间一  
般来说是一个有挠率的 Riemann-Cartan 位形空间.  
当映射不满秩时, 这种一阶线性非完整映射等价于  
Kleinert 等人提出的方法, 而当映射满秩时, 一阶线  
性非完整映射则可以从平直的位形空间直接映射  
出一个同维数的 Riemann-Cartan 位形空间. 把这种  
一阶线性映射方法应用于定常约束系统(包括非完  
整约束问题和刚体问题)的研究中, 取得了一些重

要研究成果<sup>[13-16]</sup>.

本文把上述一阶线性映射方法推广至非定常  
完整约束问题的研究中. 这种推广的关键在于, 由  
于约束显含时间, 所以建立在约束系统位形空间  $M$   
上的一阶线性映射的像空间  $\Pi$  不再仅仅是一个位  
形空间, 而是一个“时空”. 通过一阶线性映射可以  
诱导出时空  $\Pi$  的几何性质(度规和联络), 并由此  
写出约束系统在时空  $\Pi$  中的运动方程. 通过算例可  
以验证这种方法的有效性.

文中采用爱因斯坦求和约定, 并对指标取值范  
围作如下规定:  $i, j, k, l = 1, 2, \dots, n$ ;  $\mu, \nu, \rho, \sigma, \lambda =$   
 $1, 2, \dots, n$ ;  $\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, \dots, n-1$ . 为方便起见, 本文  
将只讨论系统仅受到一个非定常完整约束的情形,  
相关方法和结论可以很容易地推广至系统受到多  
个完整约束时的情形.

## 1 非定常完整约束系统的一阶线性映射方法

设由  $N$  个粒子构成的约束系统的  $n$  维( $n = 3N$ )  
平直位形空间  $M$  的坐标为  $(x^1, x^2, \dots, x^n)$ , 其度规  
和联络分别为

$$g_{ij} = \delta_{ij} m_{im} [\frac{i-1}{3}] + 1, \Gamma_{ij}^k = 0 \quad (1)$$

其中, 两个相同的指标  $i$  不求和, 系统受到一个如  
下形式的非定常完整约束

$$\tilde{f}(x^i, t) = 0 \quad (2)$$

2018-06-14 收到第 1 稿, 2019-04-13 收到修改稿.

\* 国家自然科学基金资助项目(11972122, 11772144, 11572145, 11872030), 广东省自然科学基金资助项目(2015A030310178), 湛江市科技  
攻关计划项目(2013B01227)

<sup>†</sup> 通讯作者 E-mail: ksh\_wangyong@foxmail.com

不失一般性,总可以把非定常完整约束(2)写成如下形式:

$$t=f(x^i) \quad (3)$$

取非退化的一阶线性映射

$$\pi^\mu = a_i^\mu \dot{x}^i \quad (4)$$

其中,  $a_i^\mu$  是关于坐标  $x^i$  的函数,且

$$\pi^n = t \quad (5)$$

$$a_i^n = \frac{\partial f}{\partial x^i} \quad (6)$$

并记由坐标  $(\pi^1, \pi^2, \dots, \pi^n)$  所描述的空间为  $\Pi$ ,则由式(4)可以反解出

$$\dot{x}^i = b_\mu^i \pi^\mu \quad (7)$$

根据一阶线性映射方法,利用映射(7)可由平直位形空间  $M$  的度规和联络诱导出空间  $\Pi$  的度规和联络,分别为

$$g_{\mu\nu} = g_{ij} b_\mu^i b_\nu^j \quad (8)$$

$$\Gamma_{\mu\nu}^\sigma = g^{\sigma\rho} g_{ij} b_\rho^i b_{\mu,\nu}^j \quad (9)$$

其中,  $b_{\mu,\nu}^j = \frac{\partial b_\mu^j}{\partial q^\nu}$ .

由 Lagrange 乘子法可得约束系统在其平直位形空间  $M$  中的运动方程为

$$\ddot{x}^i = g^{ij} \left( F_j + \lambda \frac{\partial f}{\partial x^j} \right) \quad (10)$$

其中,  $F_j$  是系统所受主动力.由式(7)可得

$$\ddot{x}^i = b_\mu^i \dot{\pi}^\mu + b_{\mu,\nu}^i \pi^\mu \dot{\pi}^\nu \quad (11)$$

代入式(10)后可得

$$b_\mu^i \dot{\pi}^\mu + b_{\mu,\nu}^i \pi^\mu \dot{\pi}^\nu = g^{ik} \left( F_k + \lambda \frac{\partial f}{\partial x^k} \right) \quad (12)$$

再考虑到式(8)和式(9),由式(12)即得约束系统在空间  $\Pi$  中的运动方程

$$\frac{D}{dt}(\pi^\sigma) = g^{\mu\sigma} F_\mu + \lambda g^{\mu\sigma} b_\mu^k \frac{\partial f}{\partial x^k} \quad (13)$$

其中,  $F_\mu = b_\mu^i F_i$  为系统所受主动力在空间  $\Pi$  中的表达,  $(g^{\nu\sigma}) = (g_{\mu\sigma})^{-1}$ ,  $\frac{D}{dt}$  是由联络(9)所定义的协变

导数,即有

$$\frac{D}{dt}(\pi^\sigma) = \dot{\pi}^\sigma + \Gamma_{\mu\nu}^\sigma \pi^\mu \dot{\pi}^\nu \quad (14)$$

为方便讨论,我们将运动方程(13)拆分成如下两部分

$$\frac{D}{dt}(\pi^\alpha) = g^{\mu\alpha} F_\mu + \lambda g^{\mu\alpha} b_\mu^k \frac{\partial f}{\partial x^k} \quad (15)$$

$$\frac{D}{dt}(\pi^n) = g^{\mu n} F_\mu + \lambda g^{\mu n} b_\mu^k \frac{\partial f}{\partial x^k} \quad (16)$$

下面对以上结果作几点讨论:

1)由式(5)和式(6)可以看出,和定常约束系统不同,对非定常约束系统来说,由隐含约束(3)的一阶线性映射(4)所定义的空间  $\Pi$  不再仅仅是一个位形空间,而是一个“时空”.而约束系统在时空  $\Pi$  中的运动方程也相应地分成了关于空间维度的方程(15)和关于时间维度的方程(16).

2)可以看出,约束(3)并没有完全决定一阶线性映射(4),因此在解决具体问题时一阶线性映射(4)(以及由该映射所定义的时空  $\Pi$ )的选择仍然具有较大的任意性.在下面的讨论中将会看到,这种任意性将会为我们解决问题带来方便.

3)从形式上看,约束系统在时空  $\Pi$  中的运动方程(13)中仍然显含约束反力,这样做似乎并没有带来什么额外的好处.但容易证明,只要选择合适的一阶线性映射,使得诱导出的时空  $\Pi$  的度规矩阵可以写成

$$(g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} A_{(n-1) \times (n-1)} & 0_{(n-1) \times 1} \\ 0_{1 \times (n-1)} & B_{1 \times 1} \end{pmatrix} \quad (17)$$

的形式,则有

$$g^{\mu\alpha} b_\mu^k \frac{\partial f}{\partial x^k} = 0 \quad (18)$$

此时方程(15)就可以写作不显含约束力的形式

$$\frac{D}{dt}(\pi^\alpha) = g^{\mu\alpha} F_\mu \quad (19)$$

考虑式(5),由方程(16)可得

$$\Gamma_{\mu\nu}^n \pi^\mu \dot{\pi}^\nu = g^{\mu n} F_\mu + \lambda g^{\mu n} b_\mu^k \frac{\partial f}{\partial x^k} \quad (20)$$

显然,只要由方程(19)求出  $n-1$  个  $\pi^\alpha$ ,就可用式(20)直接求出乘子  $\lambda$  的表达式,并由此求出约束反力.

4)容易证明,如果一阶线性映射(4)不可积,则  $n-1$  个  $\pi^\alpha$  就构成了约束系统的一组准坐标,时空  $\Pi$  一般来说是一个有挠率的 Riemann-Cartan 空间.如果一阶线性映射(4)可积,则  $n-1$  个  $\pi^\alpha$  就退化为约束系统的一组广义坐标  $q^\alpha$ ,时空  $\Pi$  也随之退化为无挠率的 Riemann 空间  $Q$ ,此时方程(19)等价于约束系统用广义坐标表示的 Lagrange 方程.

5)以上讨论的是系统仅受到一个非定常完整约束的情形,但相关方法和结论可以很容易地推广

至系统受到多个完整约束时的情形.主要理由是:若系统受到多个非定常完整约束,则这些非定常完整约束总可以等效于一个非定常完整约束和若干个定常完整约束的组合.这样,只需将本文讨论的一阶线性映射方法和已有的 Riemann-Cartan 空间之间的一阶线性映射方法相结合,即可处理系统受到多个完整约束的情形.

## 2 算例

**例 1:**如图 1,质量为 1 的粒子约束在平面  $P$  上,在重力场中,无摩擦地运动,若平面  $P$  绕着直角坐标系  $Ox^1x^2x^3$  中的  $x^3$  轴以角速度  $\omega = 1\text{rad/s}$  匀速转动,且  $x^3$  轴与竖直方向的夹角为  $\theta$ ,求粒子的运动.

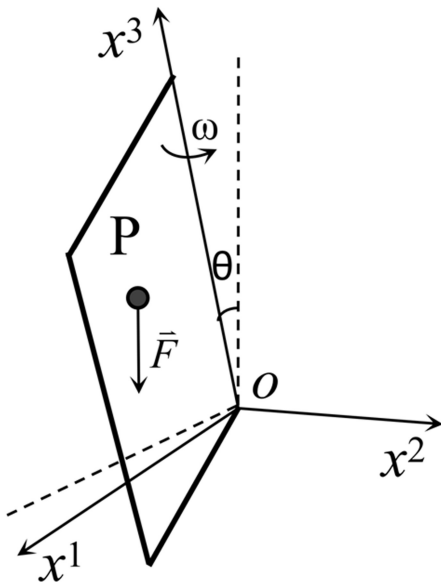


图 1 约束在平面  $P$  上的质点

Fig.1 the particle constrained on the plane  $P$

在直角坐标系  $Ox^1x^2x^3$  中平面  $P$  可以表示为

$$\frac{x^2}{x^1} = \tan\theta \quad (21)$$

所以,粒子所受非定常约束可以表示为

$$t = \arctan\left(\frac{x^2}{x^1}\right) \quad (22)$$

粒子所受主动力在直角坐标系  $Ox^1x^2x^3$  中可以表示为

$$F_1 = g\sin\theta, F_2 = 0, F_3 = -g\cos\theta \quad (23)$$

下面我们先分析力学方法求解,然后再用本文提出的一阶线性映射方法求解.可以看出两种方法所得结果是一致的.

解法一:

首先用广义坐标表示的 Lagrange 方程求解.

定义如下广义坐标

$$q^1 = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2}, q^2 = x^3 \quad (24)$$

即有

$$x^1 = q^1 \cos t, x^2 = q^1 \sin t, x^3 = q^2 \quad (25)$$

则粒子的动能和广义力分别为

$$T = \frac{1}{2} [(\dot{q}^1)^2 + (q^1)^2 + (\dot{q}^2)^2] \quad (26)$$

$$Q_1 = g\sin\theta \cos t, Q_2 = -g\cos\theta \quad (27)$$

代入 Lagrange 方程可得粒子的运动方程为

$$\ddot{q}^1 - q^1 = g\sin\theta \cos t \quad (28)$$

$$\ddot{q}^2 = -g\cos\theta$$

由此可以解得

$$q^1 = c_1 e^{-t} + c_2 e^t - \frac{1}{2} g\sin\theta \cos t \quad (29)$$

$$q^2 = -\frac{1}{2} g\cos\theta \cdot t^2 + c_3 t + c_4$$

用广义坐标表示的 Lagrange 方程不能直接求出约束反力,要想求出约束反力必须采用乘子法.由约束(22)可得粒子在直角坐标系  $Ox^1x^2x^3$  中的运动方程为

$$\ddot{x}^1 = g\sin\theta - \lambda \frac{x^2}{(x^1)^2 + (x^2)^2} \quad (30)$$

$$\ddot{x}^2 = \lambda \frac{x^1}{(x^1)^2 + (x^2)^2}$$

$$\ddot{x}^3 = -g\cos\theta$$

和约束联立后可以解得

$$\lambda = \frac{2\dot{x}^1 \dot{x}^2 ((x^1)^2 - (x^2)^2) - 2x^1 x^2 ((\dot{x}^1)^2 - (\dot{x}^2)^2)}{(x^1)^2 + (x^2)^2} + g\sin\theta \cdot x^2 \quad (31)$$

尽管式(30)无法直接求解,但考虑式(25)和式(29),由式(31)可得

$$\lambda = 2c_2^2 e^{2t} - c_2 g\sin\theta (\cos t - 2\sin t) e^t - g^2 \sin^2 \theta \cos t \sin t + c_1 g\sin\theta (\cos t + 2\sin t) e^{-t} - 2c_1^2 e^{-2t} \quad (32)$$

由此即可由约束(22)直接写出约束反力的表达式.

解法二

下面用一阶线性映射方法求解.

取如下映射关系:

$$q^1 = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2} \quad (33)$$

$$q^2 = x^3$$

$$q^3 = \arctan\left(\frac{x^2}{x^1}\right)$$

则由式(33)可得一阶线性可积映射

$$\begin{aligned} \dot{x}^1 &= \frac{x^1}{\sqrt{(x^1)^2+(x^2)^2}} \dot{q}^1 + x^2 \dot{q}^3 \\ \dot{x}^2 &= \frac{x^2}{\sqrt{(x^1)^2+(x^2)^2}} \dot{q}^1 - x^1 \dot{q}^3 \\ \dot{x}^3 &= \dot{q}^2 \end{aligned} \quad (34)$$

若将映射所得空间记作  $Q$ , 则由式(8)计算可得空间  $Q$  的度规为

$$g_{11}=g_{22}=1, g_{33}=(x^1)^2+(x^2)^2 \quad (35)$$

其它  $g_{\mu\nu}=0$ ; 由式(9)计算可得空间  $Q$  的联络为

$$\begin{aligned} \Gamma_{33}^1 &= -\sqrt{(x^1)^2+(x^2)^2} \\ \Gamma_{13}^3 &= \Gamma_{31}^3 = -\frac{1}{\sqrt{(x^1)^2+(x^2)^2}} \end{aligned} \quad (36)$$

其它  $\Gamma_{\mu\nu}^\sigma=0$ . 将以上所求空间  $Q$  的度规和联络代入式(19)和式(20), 并考虑式(23)和式(25)即得约束系统在空间  $Q$  中的运动方程

$$\begin{aligned} \ddot{q}^1 - \dot{q}^1 &= g \sin\theta \cos\theta \\ \ddot{q}^2 &= -g \cos\theta \end{aligned} \quad (37)$$

和

$$\lambda = 2\dot{q}^1 \dot{q}^1 + g \sin\theta \sin\theta \cdot \dot{q}^1 \quad (38)$$

可以看出, 方程(37)恰好就是粒子用广义坐标表示的运动方程(28); 将方程(28)的解(29)代入式(38)即可直接得出与约束(22)所对应的乘子表达式(32).

**例 2:** 在三维欧氏空间中运动的、质量为 1 的粒子, 所受理想约束为  $(x^1)^2+(x^2)^2=(t+1)^2$ , 所受主动力的三个分量分别为  $F_1=-\frac{x^2}{t+1}, F_2=\frac{x^1}{t+1}, F_3=-g$ , 求粒子的运动.

同样, 用传统分析力学方法和一阶线性映射方法分别求解, 可以看出所得结果是一致的.

解法一:

首先用广义坐标表示的 Lagrange 方程求解.

定义如下广义坐标:

$$q^1 = \arctan \frac{x^2}{x^1}, q^2 = x^3 \quad (39)$$

即有

$$x^1 = (t+1) \cos q^1, x^2 = (t+1) \sin q^1, x^3 = q^2 \quad (40)$$

则粒子的动能和广义力分别为

$$T = \frac{1}{2} [(t+1)^2 (\dot{q}^1)^2 + (\dot{q}^2)^2 + 1] \quad (41)$$

$$Q_1 = t+1, Q_2 = -g \quad (42)$$

代入 Lagrange 方程可得粒子的运动方程为

$$\begin{aligned} (t+1) \ddot{q}^1 + 2\dot{q}^1 &= 1 \\ \ddot{q}^2 &= -g \end{aligned} \quad (43)$$

由此可以解得

$$\begin{aligned} q^1 &= \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{t^2 - 2c_1}{t+1} \right) + c_2 \\ q^2 &= -\frac{1}{2} g t^2 + c_3 t + c_4 \end{aligned} \quad (44)$$

解法二:

下面用一阶线性映射方法求解.

取如下映射关系

$$\begin{aligned} q^1 &= \arctan \left( \frac{x^2}{x^1} \right) \\ q^2 &= x^3 \\ q^3 &= \sqrt{(x^1)^2+(x^2)^2} - 1 \end{aligned} \quad (45)$$

则由式(33)可得一阶线性可积映射

$$\begin{aligned} \dot{x}^1 &= -x^2 \dot{q}^1 + \frac{x^1}{\sqrt{(x^1)^2+(x^2)^2}} \dot{q}^3 \\ \dot{x}^2 &= x^1 \dot{q}^1 + \frac{x^2}{\sqrt{(x^1)^2+(x^2)^2}} \dot{q}^3 \\ \dot{x}^3 &= \dot{q}^2 \end{aligned} \quad (46)$$

若将映射所得空间记作  $Q$ , 则由式(8)计算可得空间  $Q$  的度规为

$$g_{11}=(x^1)^2+(x^2)^2, g_{22}=g_{33}=1 \quad (47)$$

其它  $g_{\mu\nu}=0$ ; 由式(9)计算可得空间  $Q$  的联络为

$$\begin{aligned} \Gamma_{13}^1 &= \Gamma_{31}^1 = \frac{1}{\sqrt{(x^1)^2+(x^2)^2}} \\ \Gamma_{11}^3 &= -\sqrt{(x^1)^2+(x^2)^2} \end{aligned} \quad (48)$$

其它  $\Gamma_{\mu\nu}^\sigma=0$ . 将以上所求空间  $Q$  的度规和联络代入式(19)并考虑式(45)即得约束系统在空间  $Q$  中的运动方程

$$\begin{aligned} (t+1) \ddot{q}^1 + 2\dot{q}^1 &= 1 \\ \ddot{q}^2 &= -g \end{aligned} \quad (49)$$

该方程恰好就是粒子用广义坐标表示的运动方程(43).

解法三:

值得一提的是, 本例还可以用一阶线性非完整映射方法求解.

取如下—阶线性非完整映射

$$\begin{aligned} \dot{x}^1 &= -\frac{x^2}{\sqrt{(x^1)^2+(x^2)^2}}\dot{q}^1 + \frac{x^1}{\sqrt{(x^1)^2+(x^2)^2}}\dot{q}^3 \\ \dot{x}^2 &= \frac{x^1}{\sqrt{(x^1)^2+(x^2)^2}}\dot{q}^1 + \frac{x^2}{\sqrt{(x^1)^2+(x^2)^2}}\dot{q}^3 \\ \dot{x}^3 &= \dot{q}^2 \end{aligned} \quad (50)$$

若将映射所得空间记作  $\Pi$ , 则由式(8)计算可得空间  $\Pi$  的度规为

$$g_{11} = g_{22} = g_{33} = 1 \quad (51)$$

其它  $g_{\mu\nu} = 0$ ; 由式(9)计算可得空间  $\Pi$  的联络为

$$\Gamma_{31}^1 = \frac{1}{\sqrt{(x^1)^2+(x^2)^2}}, \Gamma_{11}^3 = -\frac{1}{\sqrt{(x^1)^2+(x^2)^2}} \quad (52)$$

其它  $\Gamma_{\mu\nu}^\sigma = 0$ . 将以上所求空间  $\Pi$  的度规和联络代入式(19)即得约束系统在空间  $\Pi$  中的运动方程

$$\begin{aligned} (t+1)\dot{q}^1 + \dot{q}^1 &= t+1 \\ \ddot{q}^2 &= -g \end{aligned} \quad (53)$$

由该方程组可以解得

$$\begin{aligned} \dot{q}^1 &= \frac{t+1}{2} + \frac{2c_4-1}{2(t+1)} \\ \dot{q}^2 &= -gt+c_5 \end{aligned} \quad (54)$$

将式(54)代入式(50), 并考虑到  $q^3 = t$  和约束条件, 可得

$$\begin{aligned} \dot{x}^1 &= -\frac{x^2}{t+1} \left( \frac{t+1}{2} + \frac{2c_4-1}{2(t+1)} \right) + \frac{x^1}{t+1} \\ \dot{x}^2 &= \frac{x^1}{t+1} \left( \frac{t+1}{2} + \frac{2c_4-1}{2(t+1)} \right) + \frac{x^2}{t+1} \\ \dot{x}^3 &= -gt+c_5 \end{aligned} \quad (55)$$

该方程组的解为

$$\begin{aligned} x^1 &= (t+1) \left[ c_1 \sin \left( \frac{1}{2} + \frac{t^2-2c_4}{2(t+1)} \right) + c_2 \cos \left( \frac{1}{2} + \frac{t^2-2c_4}{2(t+1)} \right) \right] \\ x^2 &= (t+1) \left[ c_1 \cos \left( \frac{1}{2} + \frac{t^2-2c_4}{2(t+1)} \right) + c_2 \sin \left( \frac{1}{2} + \frac{t^2-2c_4}{2(t+1)} \right) \right] \\ x^3 &= -\frac{1}{2}gt^2+c_5t+c_3 \end{aligned} \quad (56)$$

考虑到约束条件后, 有

$$c_1^2+c_2^2=1 \quad (57)$$

容易看出, 满足约束条件的式(56)和解法一中求得的结果等价。

### 3 小结

和定常完整约束系统不同, 对非正常完整约束

系统, 通过隐含约束的线性映射所定义的空间  $\Pi$  不再是一个位形空间, 而是一个“时空”。但只要选取合适的线性映射, 使得时空  $\Pi$  的度规满足式(17)的形式, 则同样可以实现约束(或约束力)的几何化。在映射可积时, 由这种线性映射方法得到的运动方程等价于用广义坐标表示的约束系统的 Lagrange 方程。与此同时, 这种线性映射方法显然更容易推广至非完整的情形, 例 2 中的解法三就验证了这种非完整映射方法在处理非正常约束问题时的有效性。如何将这种线性映射方法推广至非正常非完整约束问题的研究中是一个值得继续研究的问题。

### 参 考 文 献

- 1 梅凤翔. 经典约束力学系统对称性与守恒量研究进展. 力学进展, 2009, 39(1): 37~43 (Mei F X. Advances in the symmetries and conserved quantities of classical constrained systems. *Advances in Mechanics*, 2009, 39(1): 37~43 (in Chinese))
- 2 张毅. 基于积分因子方法研究 Chaplygin 非完整系统的守恒律. 动力学与控制学报, 2019, 17(1): 15~20 (Zhang Y. A study of conservation laws for Chaplygin nonholonomic systems by means of integrating factors method. *Journal of Dynamics and Control*, 2019, 17(1): 15~20 (in Chinese))
- 3 周景润, 傅景礼. 约束 Hamilton 系统的积分因子及其守恒量. 力学季刊, 2018, 39(3): 554~561 (Zhou J R, Fu J L. The integrating factor and conservation quantity for constrained Hamilton system. *Chinese quarterly of Mechanics*, 2018, 39(3): 554~561 (in Chinese))
- 4 崔新斌, 傅景礼. 汽车电磁悬架系统的 Noether 对称性及其应用. 应用数学和力学, 2017, 38(12): 27~37 (Cui X B, Fu J L. Noether symmetry of automotive electromagnetic suspension systems and its application. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2017, 38(12): 27~37 (in Chinese))
- 5 王本亮, 高山, 孙宏伟等. 一种基于几何力学的机械臂末端规划算法. 动力学与控制学报, 2018, 16(5): 391~396 (Wang B L, Gao S, Sun H W, et al. An algorithm of path planning for manipulator end-effector based on geometric mechanics. *Journal of Dynamics and Control*, 2018, 16(5): 391~396 (in Chinese))
- 6 张毅. 关于 Mei 对称性与 Noether 对称性的关系—以 Birkhoff 系统为例, 动力学与控制学报, 2016, 14(1):

- 26~30 (Zhang Y. Relation between the Mei symmetry and the Noether symmetry-taking the Birkhoff system as an example. *Journal of Dynamics and Control*, 2016, 14 (1):26~30(in Chinese))
- 7 楼智美. 两自由度微扰力学系统的二阶近似守恒量. *动力学与控制学报*, 2015, 13(3):165~169 (Lou Z M. Second order approximate conserved quantities of two dimensional perturbed mechanics system. *Journal of Dynamics and Control*, 2015, 13(3):165~169 (in Chinese))
- 8 Fiziev P, Kleinert H. New action principle for classical partial trajectories in spaces with torsion. *Europhysics Letters*, 1996, 35(4):241~246
- 9 Shabanov S V. Constrained systems and analytical mechanics in spaces with torsion. *Journal of Physics A General Physics*, 1998, 31(31):5177~5190
- 10 Kleinert H, Pelster A. Autoparallels from a New Action Principle. *General Relativity & Gravitation*, 1999, 31 (9):1439~1447
- 11 Guo Y X, Wang Y, Chee G Y, et al. Nonholonomic versus vakonomic dynamics on a Riemann-Cartan manifold. *Journal of Mathematical Physics*, 2005, 46(5):062902
- 12 王勇, 郭永新. Riemann-Cartan 空间中的 d'Alembert-Lagrange 原理. *物理学报*, 2005, 54(12):5517~5520 (Wang Y, Guo Y X. d'Alembert-Lagrange principle on Riemann-Cartan space. *Acta Physica Sinica*, 2005, 54 (12):5517~5520 (in Chinese))
- 13 王勇, 郭永新, 吕群松等. 非完整映射理论与刚体定点转动的几何描述. *物理学报*, 2009, 58(8):5142~5149 (Wang Y, Guo Y X, Lv Q S, et al. Nonholonomic mapping theory and geometric formulation for the rotation of a rigid body with one fixed point. *Acta Physica Sinica*, 2009, 58(8):5142~5149 (in Chinese))
- 14 Guo Y X, Liu C, Wang Y, et al. Nonholonomic mapping theory of autoparallel motions in Riemann-Cartan space. *Science China (Physics, Mechanics & Astronomy)*, 2010, 53(9):1707~1715
- 15 Wang Y, Liu C, Xiao J, et al. Quasi-momentum theorem in Riemann-Cartan space. *Applied Mathematics & Mechanics*, 2018:1~14
- 16 王勇, 梅凤翔, 曹会英等. 场方法的改进及其在积分 Riemann-Cartan 空间运动方程中的应用. *物理学报*, 2018(3):133~139 (Wang Y, Mei F X, Cao H Y, et al. Improvement of field method and its application to integrating motion equation in Riemann-Cartan space. *Acta Physica Sinica*, 2018(3):133~139 (in Chinese))

## LINEAR MAPPING METHOD FOR HOLONOMIC RHEONOMIC SYSTEMS\*

Wang Yong<sup>†</sup> Wu Xingda Cao Huiying

(School of Information Engineering, Guangdong Medical University, Dongguan 523800, China)

**Abstract** Through first-order linear mapping, a space-time  $\Pi$  was mapped out from the configuration space of a system with a holonomic rheonomic constraint. The geometric properties (metric and connection) of the space-time  $\Pi$  were induced, and the equations of motion of the constrained system in the space-time  $\Pi$  were obtained. When the first order linear mapping is not integrable, the space-time  $\Pi$  is a Riemann-Cartan space. When the first order linear mapping is integrable, the space-time  $\Pi$  degenerates into a Riemann space. In the latter case, the equations of motion of the holonomic rheonomic system in the space-time  $\Pi$  is equivalent to the Lagrange equations described with generalized coordinates.

**Key words** first order linear mapping, holonomic rheonomic systems, Riemann-Cartan space, Lagrange equations

Received 14 June 2018, revised 13 April 2019.

\* The project supported by the National Natural Science Foundation of China(11972122, 11772144, 11572145, 11872030), the Natural Science Foundation of Guangdong Province(2015A030310178) and Zhanjiang Science and Technology Project(2013B01227).

<sup>†</sup> Corresponding author E-mail: ksh\_wangyong@foxmail.com