第 17 卷第 5 期 2019 年 10 月
1672-6553/2019/17(5)/458-5

动 力 学 与 控 制 学 报
JOURNAL OF DYNAMICS AND CONTROL

Vol.17 No.5
Oct. 2019

基于广义分数阶算子 Birkhoff 系统 Noether 定理*

张宏彬†

（巢湖学院 电子工程学院，合肥　238000）

摘要　本文就广义分数阶导数算子,提出两个新的“变换公式”,将其应用于分数阶 Birkhoff 系统,并导出分数阶 Birkhoff 系统的 Noether 定理.这个定理提供了一个计算分数阶 Birkhoff 系统运动常数的方法,克服了先前文献研究分数阶动力学系统守恒量的一些缺陷,并在文末给出两个推论.

关键词　分数阶 Birkhoff 系统，　广义分数阶算子，　Noether 定理，　对称性

DOI：　10.6052/1672-6553-2019-064

引言

1927 年,美国数学家 Birkhoff 在他的著作中提出了一个新的积分变分原理,并给出了一个新的运动方程[1].美国物理学家 Santilli 称其为 Birkhoff 方程,并研究它的变换理论[2,3],后来 Birkhoff 动力学理论被广泛应用在:量子力学、原子和分子物理、强子物理等许多领域.1989 年苏联科学家 Galiullan 指出研究 Birkhoff 动力学是现代分析力学的一个重要发展方向[4].1992 年,梅凤翔和他的合作者率先构建了 Birkhoff 动力学的理论框架[5].并就 Birkhoff 动力学在约束力学系统中的应用开展一系列基础性研究,取得了许多重要进展[6-16].

最近,分数阶 Birkhoff 动力学理论引起许多学者的关注.罗绍凯应用联合分数阶导数的定义,提出 Pfaff-Birkhoff 原理,得到了分别包含 Riemann-Liouville、Caputo、Riesz 和 Riesz-Caputo 分数阶导数的 Birkhoff 方程[17].应用 Agrawal 提出的新算子,作者导出了广义 Birkhoff 方程[18].基于 Atanackovic 对分数阶变分问题的对称性研究理论[19],张毅率先研究了分数阶 Birkhoff 系统的对称性和守恒量,得到了经典意义上的守恒量[20],解决了 Frederico[21] 所提出的分数阶守恒量而非系统运动常数的遗憾.然而,这个守恒量的表达式却包含一个积分式子,它不是一个显式.本文中,就广义分数阶导数算子,我们提出两个新的“变换公式”,利用这两个新的“变换公式”,我们可以将先前文献中得到分数阶守恒量的表达式转换成为显式.并给出自治 Birkhoff 系统这一特殊情况下的推论.

1　广义分数阶算子的定义和性质

Agrawal 在文献[22]中提出下面三个分数阶算子.

α 阶积分算子 K_M^α 定义如下:

$$K^\alpha_{\langle t_1,t,t_2,p,q\rangle}f(t)=p\int_a^t k_\alpha(t,\tau)f(\tau)\,\mathrm{d}\tau+q\int_t^b k_\alpha(t,\tau)f(\tau)\,\mathrm{d}\tau=K_M^\alpha f(t) \tag{1}$$

两个微分算子 A_M^α 和 B_M^α 定义如下:

$$A^\alpha_{\langle t_1,t,t_2,p,q\rangle}f(t)=D^nK_M^{n-\alpha}f(t)=A_M^\alpha f(t) \tag{2}$$

$$B^\alpha_{\langle t_1,t,t_2,p,q\rangle}f(t)=K_M^{n-\alpha}D^nf(t)=B_M^\alpha f(t) \tag{3}$$

新算子 K_M^α、A_M^α 和 B_M^α 满足下面的积分关系:

$$\int_{t_1}^{t_2}g(t)K_M^\alpha f(t)\,\mathrm{d}t=\int_{t_1}^{t_2}f(t)K_{M^*}^\alpha g(t)\,\mathrm{d}t \tag{4}$$

$$\int_{t_1}^{t_2}g(t)A_M^\alpha f(t)\,\mathrm{d}t=(-1)^n\int_{t_1}^{t_2}f(t)B_{M^*}^\alpha g(t)\,\mathrm{d}t+\sum_{j=0}^{n-1}(-D)^jg(t)A_M^{\alpha-1-j}f(t)\Big|_{t_1}^{t_2} \tag{5}$$

2018-06-19 收到第 1 稿,2019-04-03 收到修改稿.
* 国家自然基金资助项目(10872037,11472063)
† 通讯作者 E-mail:zhanghongbin@ chu.edu.cn

$$\int_{t_1}^{t_2} g(t) B_M^{\alpha} f(t)\,\mathrm{d}t = (-1)^n \int_{t_1}^{t_2} f(t) A_{M^*}^{\alpha} g(t)\,\mathrm{d}t + \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j g(t) A_{M^*}^{\alpha+j-n} g(t) D^{n-1-j} f(t) \Big|_{t_1}^{t_2} \tag{6}$$

其中,$t_1<t<t_2$, $M=\langle t_1,t,t_2,p,q\rangle$ 是一个参数集,$M^*=\langle t_1,t,t_2,q,p\rangle$ 与 M 互为对偶.D 是经典的导数算子,$k_\alpha(\tau,t)$ 是依赖参数 α 的一个核,$f(t)$ 和 $g(t)$ 是两个充分光滑的函数,参数 p 和 q 是两个实数,$n-1<\alpha<n$.

若 $0<\alpha<1$,我们得出下面的积分关系:

$$\int_{t_1}^{t_2} g(t) A_M^{\alpha} f(t)\,\mathrm{d}t = g(t) K_M^{1-\alpha} f(t) \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} f(t) B_{M^*}^{\alpha} g(t)\,\mathrm{d}t$$

$$\int_{t_1}^{t_2} g(t) B_M^{\alpha} f(t)\,\mathrm{d}t = f(t) K_{M^*}^{1-\alpha} g(t) \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} f(t) A_{M^*}^{\alpha} g(t)\,\mathrm{d}t$$

2　主要结果

我们将讨论分数阶 Birkhoff 系统的 Noether 定理.

首先,我们考虑包含分数阶微分算子 A_M^α 的 Birkhoff 系统变分问题[18]

$$S_N[a(\cdot)] = \int_{t_1}^{t_2} (R_\mu(t,a) A_M^\alpha a^\mu(t) - B(t,a))\,\mathrm{d}t \to \min \tag{7}$$

满足下面的端点条件

$$a^\mu(t)\big|_{t=t_1}=a_1^\mu,\ a^\mu(t)\big|_{t=t_2}=a_2^\mu,\ (\mu=1,2,\cdots,2n)$$

其中,$0<\alpha<1$, Birkhoff 函数 $B:[t_1,t_2]\times\mathbb{R}^{2n}\to\mathbb{R}$, Birkhoff 函数组 $R_\mu:[t_1,t_2]\times\mathbb{R}^{2n}\to\mathbb{R}$ 是 C^2 函数,令 $P_A=P_A(t,a^\mu(t),A_M^\alpha a^\mu(t))=R_\mu(t,a)A_M^\alpha a^\mu(t)-B(t,a)$. $\partial_i P_A$ 表示 P_A 对第 i 变量的偏导数.

定理 1　如果 $a^\mu(t)$ 是使问题(7)取极值,则它满足下面的分数阶 Birkhoff 方程[18]

$$\frac{\partial R_\nu(t,a)}{\partial a^\mu} A_M^\alpha a^\nu - B_{M^*}^\alpha R_\mu(t,a) - \frac{\partial B(t,a)}{\partial a^\mu} = 0 \tag{8}$$

定义 1　如果泛函(7)在下面的单参数无限小变换群

$$\bar{a}^\mu(t)=a^\mu(t)+\varepsilon\xi_\mu(t,a)+o(\varepsilon) \tag{9}$$

下是不变量,当且仅当

$$\int_{t_a}^{t_b} (R_\mu(t,a) A_M^\alpha a^\mu(t) - B(t,a))\,\mathrm{d}t = \int_{t_a}^{t_b} (R_\mu(t,\bar{a}) A_M^\alpha \bar{a}^\mu(t) - B(t,\bar{a}))\,\mathrm{d}t \tag{10}$$

对任何子区间 $[t_a,t_b]\subseteq[t_1,t_2]$,则不变性的必要条件可表述为定理 2.

定理 2　如果泛函(7)在变换(9)作用下是不变量,则

$$\partial_2 P_A(t,a^\mu(t),A_M^\alpha a^\mu(t))\xi_\mu(t,a)+ \partial_3 P_A(t,a^\mu(t),A_M^\alpha a^\mu(t)) A_M^\alpha \xi_\mu(t,a)=0 \tag{11}$$

证明: 条件(10)对任何子区间 $[t_a,t_b]\subseteq[t_1,t_2]$ 都是有效的,因此,可以去掉(10)式两边的积分号,等式仍然有效.将其对 ε 微分,并令 $\varepsilon=0$,利用算子 A_M^α 的定义和性质,我们有

$$0=\partial_2 P_A(t,a^\mu(t),A_M^\alpha a^\mu(t))\xi_\mu(t,a)+ \partial_3 P_A(t,a^\mu(t),A_M^\alpha a^\mu(t)) A_M^\alpha \xi_\mu(t,a)$$

注:利用 Birkhoff 方程(8),不变性的必要条件(11)可变为

$$\partial_3 P_A(t,a^\mu(t),A_M^\alpha a^\mu(t))\xi_\mu(t,a)+ \xi_\mu(t,a) B_{M^*}^\alpha \partial_3 P_A(t,a^\mu(t),A_M^\alpha a^\mu(t))=0 \tag{12}$$

借鉴文献[23]的思路,就广义微分算子 A_M^α 和 $B_{M^*}^\alpha$,我们提出下面的变换公式.

定理 3　考虑函数 $f,g\in C^\infty([t_1,t_2];\mathbb{R})$,并满足下列条件(C):序列 $(g^{(k)}\cdot K_M^{k-\alpha}f)_{k\in\mathbb{N}\setminus 0}$ 和 $(f^{(k)}\cdot K_{M^*}^{k-\alpha}g)_{k\in\mathbb{N}\setminus 0}$ 在 $[t_1,t_2]$ 上一致收敛于零,则有下面的等式

$$g\cdot A_M^\alpha f + f\cdot B_{M^*}^\alpha g = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\sum_{r=0}^{\infty} g^{(r)}\cdot((-1)^r p K_{M_1}^{r+1-\alpha} f + q K_{M_2}^{r+1-\alpha} f)\right] + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\sum_{r=0}^{\infty}\left(f^{(r)}\cdot((-1)^r q K_{M_1}^{r+1-\alpha}(g(t)-g(t_1)) + p K_{M_2}^{r+1-\alpha}(g(t)-g(t_2)))\right)\right]$$

依据上面的讨论,我们可以得到定理 4.

定理 4　如果泛函(7)在单参数无限小变换群(9)作用下是不变量,令 $a^\mu(t)$ 是 Birkhoff 方程(8)的一个解,函数 ξ_μ 和 R_μ 满足定理 3 的条件(C):,则上面的等式成了

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\sum_{r=0}^{\infty} R_\mu^{(r)}\cdot((-1)^r p K_{M_1}^{r+1-\alpha}\xi_\mu + q K_{M_2}^{r+1-\alpha}\xi_\mu)\right] + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\sum_{r=0}^{\infty}(\xi_\mu^{(r)}\cdot((-1)^r q K_{M_1}^{r+1-\alpha}(R_\mu - R_\mu(t_1)) + p K_{M_2}^{r+1-\alpha}(R_\mu - R_\mu(t_2))))\right]=0 \tag{13}$$

证明:利用方程(12)和定理3可得(13)式.

下面我们讨论积分泛函(7)更一般意义上的不变性.

定义2 如果泛函(7)在下面单参数无限小变换群

$$\bar{t}=t+\varepsilon\tau(t,a)+o(\varepsilon) \tag{14}$$

$$\bar{a}^{\mu}(t)=a^{\mu}(t)+\varepsilon\xi_{\mu}(t,a)+o(\varepsilon) \tag{15}$$

下是不变量,当且仅当

$$\int_{t_a}^{t_b}(R_{\mu}(t,a)A_M^{\alpha}a^{\mu}(t)-B(t,a))\mathrm{d}t$$

$$=\int_{\bar{t}(t_a)}^{\bar{t}(t_b)}(R_{\mu}(\bar{t},\bar{a})A_{\bar{M}}^{\alpha}\bar{a}^{\mu}(\bar{t})-B(\bar{t},\bar{a}))\mathrm{d}\bar{t} \tag{16}$$

对任何子区间 $[t_a,t_b]\subseteq[t_1,t_2]$,其中,$\bar{M}=\langle\bar{t}_1,t,\bar{t}_2,p,q\rangle$.

下面我们将给出包含分数阶算子 A_M^{α} 的 Birkhoff 系统更一般形式的 Noether 定理.

定理5 如果泛函(7)在单参数无限小变换群(14)和(15)的作用下是不变量,令 $a^{\mu}(t)$ 是 Birkhoff 方程(8)的一个解,函数 ξ_{μ} 和 R_{μ} 满足定理3的条件(C):,则下面的等式成了

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big[\tau(P_A-\alpha\partial_3P_A\cdot A_M^{\alpha}a^{\mu})+\sum_{r=0}^{\infty}R_{\mu}^{(r)}\cdot((-1)^rpK_{M_1}^{r+1-\alpha}\xi_{\mu}+qK_{M_2}^{r+1-\alpha}\xi_{\mu})\Big]+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big[\sum_{r=0}^{\infty}(\xi_{\mu}^{(r)}\cdot((-1)^rqK_{M_1}^{r+1-\alpha}(R_{\mu}-R_{\mu}(t_1))+pK_{M_2}^{r+1-\alpha}(R_{\mu}-R_{\mu}(t_2))))\Big]=0 \tag{17}$$

证明:这里的证明是文献[24]方法的推广,对每个非自治问题(7),可将时间 t 视作一个依赖变量,而等同一个自治问题.为此,利用 Lipschitzian 变换将时间 t 重新参数化.

$$[t_1,t_2]\ni t\mapsto\sigma f(\lambda)\in[\sigma_{t_1},\sigma_{t_2}].$$

它满足

$$\text{如果 }\lambda=0,\text{则 }t'_{\sigma}=\frac{\mathrm{d}t(\sigma)}{\mathrm{d}\sigma}=f(\lambda)=1 \tag{18}$$

下面将泛函(7)在形式上转换成自治形式:

$$\bar{S}_A[t(\cdot),a^{\mu}(t(\cdot))]=\int_{\sigma_{t_1}}^{\sigma_{t_2}}P_A(t(\sigma),a^{\mu}(t(\sigma)),A_M^{\alpha}a^{\mu}(t(\sigma)))t'_{\sigma}\mathrm{d}\sigma \tag{19}$$

其中,$t(\sigma_{t_1})=t_1$,$t(\sigma_{t_2})=t_2$.利用文献[18]给出的分数阶导数的定义和性质,有:

如果 $M=M_1=\langle t_1,t,t_2,1,0\rangle$,$A_{M_1}^{\alpha}a^{\mu}(t(\sigma))=(t'_{\sigma})^{-\alpha}\,{}_{\frac{t_1}{(t'_{\sigma})^2}}D_{\sigma}^{\alpha}a^{\mu}(\sigma)$;

如果 $M=M_2=\langle t_1,t,t_2,0,1\rangle$,$A_{M_2}^{\alpha}a^{\mu}(t(\sigma))=(t'_{\sigma})^{-\alpha}_{\tilde{\omega}}D^{\alpha}_{\frac{t_2}{(t'_{\sigma})^2}}a^{\mu}(\sigma)$;

如果 $M=M_3=\langle t_1,t,t_2,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle$,$A_{M_3}^{\alpha}a^{\mu}(t(\sigma))=(t'_{\sigma})^{-\alpha}\,{}_{\frac{t_1}{(t'_{\sigma})^2}}^{R}D^{\alpha}_{\frac{t_2}{(t'_{\sigma})^2}}a^{\mu}(\sigma)$.

引进算子 $A_{M_{\sigma}}^{\alpha}$,有

$$A_M^{\alpha}a^{\mu}(t(\sigma))=(t'_{\sigma})^{-\alpha}A_{M_{\sigma}}^{\alpha}a^{\mu}(\sigma).$$

其中,$M_{\sigma}=\langle\sigma(t_1),\sigma,\sigma(t_2),p,q\rangle$.

于是,有

$$\begin{aligned}&\bar{S}_A[t(\cdot),a^{\mu}(t(\cdot))]\\&=\int_{\sigma_{t_1}}^{\sigma_{t_2}}P_A(t(\sigma),a^{\mu}(t(\sigma)),A_M^{\alpha}a^{\mu}(t(\sigma)))t'_{\sigma}\mathrm{d}\sigma\\&\doteq\int_{\sigma_{t_1}}^{\sigma_{t_2}}\bar{P}_A(t(\sigma),a^{\mu}(t(\sigma)),t'_{\sigma},A_M^{\alpha}a^{\mu}(t(\sigma)))\mathrm{d}\sigma\\&=\int_{t_1}^{t_2}P_A(t,a^{\mu}(t),A_M^{\alpha}a^{\mu}(t))\mathrm{d}t\\&=S_A[a^{\mu}(\cdot)]\end{aligned}$$

如果积分泛函(7)在变换(14)、(15)作用下是不变量,则积分泛函(19)在变换(9)作用下是不变量.由定理4,有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big[\tau\frac{\partial\bar{P}_A}{\partial t'_{\sigma}}+\sum_{r=0}^{\infty}(\partial_4\bar{P}_A)^{(r)}\cdot((-1)^rpK_{M_1}^{r+1-\alpha}\xi_{\mu}+qK_{M_2}^{r+1-\alpha}\xi_{\mu})\Big]+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big[\sum_{r=0}^{\infty}\Big(\xi_{\mu}^{(r)}\cdot((-1)^rqK_{M_1}^{r+1-\alpha}(\partial_4\bar{P}_A-\partial_4\bar{P}_A(t_1))+pK_{M_2}^{r+1-\alpha}(\partial_4\bar{P}_A-\partial_4\bar{P}_A(t_2)))\Big)\Big]=0 \tag{20}$$

若 $\lambda=0$,由条件(18),有

$$A_{M_{\sigma}}^{\alpha}a^{\mu}(t(\sigma))=A_M^{\alpha}a^{\mu}(t)$$

因此,有

$$\partial_4\bar{P}_A=\partial_3P_A \tag{21}$$

和

$$\frac{\partial\bar{P}_A}{\partial t'_{\sigma}}=P_A-\alpha\partial_3P_A\cdot A_M^{\alpha}a^{\mu} \tag{22}$$

将(21)式和(22)式代入(20)式.可得(17)式.

下面我们考虑一个特殊情况,自治分数阶 Birkhoff 变分问题,即 Birkhoff 函数 B 和 Birkhoff 函数组 R_{μ} 不显含独立变量时间 t

$$S_N[a(\cdot)]=\int_{t_1}^{t_2}(R_\mu(a)A_M^\alpha a^\mu(t)-B(a))\,\mathrm{d}t\to\min \tag{23}$$

由定理 5 可以获得下面的推论：

推论 1　对自治分数阶 Birkhoff 变分问题(23)，有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(P_A-\alpha\partial_3 P_A\cdot A_M^\alpha a^\mu)=0 \tag{24}$$

沿任何分数极值曲线 $a(\cdot)$，$t\in[t_1,t_2]$.

证明：因为 B 和 R_μ 不显含时间 t，令 $\tau=1,\xi_\mu=0$，容易验证 $A_M^\alpha a^\mu(t)=A_M^\alpha a^\mu(\bar{t})$，则不变性条件(16)满足.

其次，我们再考虑包含分数阶微分算子 B_M^α 的 Birkhoff 系统变分问题[18].

$$S_B[a(\cdot)]=\int_{t_1}^{t_2}(R_\mu(t,a)B_M^\alpha a^\mu(t)-B(t,a))\,\mathrm{d}t\to\min \tag{25}$$

满足下面的端点条件：

$$a^\mu(t)\big|_{t=t_1}=a_1^\mu,\ a^\mu(t)\big|_{t=t_2}=a_2^\mu,\ (\mu=1,2,\cdots,2n)$$

其中，$0<\alpha<1$. Birkhoff 函数 $B:[t_1,t_2]\times\mathbb{R}^{2n}\to\mathbb{R}$，Birkhoff 函数组 $R_\mu:[t_1,t_2]\times\mathbb{R}^{2n}\to\mathbb{R}$ 是 C^2 函数，令 $P_B=P_B(t,a^\mu(t),B_M^\alpha a^\mu(t))=R_\mu(t,a)B_M^\alpha a^\mu(t)-B(t,a)$. $\partial_i P_A$ 表示 P_A 对第 i 变量的偏导数.

采用类似的推导，我们容易得到下面的结果.

定理 6　如果 $a^\mu(t)$ 是使问题(23)取极值，则它满足下面的分数阶 Birkhoff 方程[18]

$$\frac{\partial R_\nu(t,a)}{\partial a^\mu}A_M^\alpha a^\nu-B_{M*}^\alpha R_\mu(t,a)-\frac{\partial B(t,a)}{\partial a^\mu}=0 \tag{26}$$

定理 7　如果泛函(23)在单参数无限小变换群(14)和(15)的作用下是不变量，令 $a^\mu(t)$ 是 Birkhoff 方程(24)的一个解，函数 ξ_μ 和 R_μ 满足定理 3 的条件(C)：，则下面的等式成了

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big[\tau(P_B-\alpha\partial_3 P_B\cdot B_M^\alpha a^\mu)+\sum_{r=0}^{\infty}(\xi_\mu)^{(r)}\cdot((-1)^r qK_{M_1}^{r+1-\alpha}R_\mu+pK_{M_2}^{r+1-\alpha}R_\mu)\Big]+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big[\sum_{r=0}^{\infty}\Big((R_\mu)^{(r)}\cdot((-1)^r pK_{M_1}^{r+1-\alpha}(\xi_\mu-\xi_\mu(t_1))+qK_{M_2}^{r+1-\alpha}(\xi_\mu-\xi_\mu(t_2)))\Big)\Big]=0 \tag{27}$$

显然，当参数 p 和 q 取不同值时，可分别获得包含 Riemann-Liouville，Caputo，Riesz 分数阶导数 Birkhoff 系统的 Noether 定理.

如果我们考虑下面的自治分数阶 Birkhoff 变分问题，

$$S_N[a(\cdot)]=\int_{t_1}^{t_2}(R_\mu(a)B_M^\alpha a^\mu(t)-B(a))\,\mathrm{d}t\to\min \tag{28}$$

由定理 7 我们可以获得下面的推论.

推论 2　对自治分数阶 Birkhoff 变分问题(28)，有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(P_B-\alpha\partial_3 P_B\cdot A_B^\alpha a^\mu)=0 \tag{29}$$

沿任何分数极值曲线 $a(\cdot)$，$t\in[t_1,t_2]$.

3　结论

本文在提出的两个“变换公式”的基础上，给出了包含广义分数阶导数 Birkhoff 系统的 Noether 定理，与先前文献得到的结果相比，其给出的守恒量是一个显式，它提供一个计算守恒量的级数算法，用此式来计算守恒量，可以得到想要的精度.

参　考　文　献

1　Birkhoff G D. Dynamical systems. Providence：AMS College Publisher，1927.

2　Santilli R M. Foundations of theoretical mechanics I. New York：Springer，1978

3　Santilli R M. Foundations of theoretical mechanics II. New York：Springer，N 1983

4　Galiullin A S，Gafarov G G，Malaishka R P，et al. Analytical dynamics of helmholtz，birkhoff and nambu systems. Moscow：UFN，1997

5　梅凤翔，史荣昌，张永发等. Birkhoff 系统动力学. 北京：北京理工大学出版社，1999（Mei F X，Shi R C，Zhang Y F，et al. Dynamics of Birkhoffian systems. Beijing：Beijing Institute of Technology Press，1999（in Chinese））

6　Mei F X. The Noether′s theory of Birkhoffian systems. *Science in China Series A*，1993，36(12)：1456～1467

7　Mei F X. On the Birkhoffian mechanics. *International Journal of Non-linear Mechanics*，2001，36(5)：817～834

8　Guo Y X，Luo S K，Shang M，et al. Birkhoffian formulations of nonlohonomic constrained systems. *Reports on Mathematical Physics*，2001，47(3)：313～322

9　Zhang Y. Poisson theory and integration method of Birkhoffian systems in the event space. *Chinese Physics B*，2010，19(8)：080301

10　Wu H B，Mei F X. Type of integral and reduction for a generalized Birkhoffian system. *Chinese Physics B*, 2011, 20(10):104501

11 Zhang H B, Chen L Q, Gu S L, et al. The discrete variational principle and the first integrals of Birkhoff systems. *Chinese Physics*, 2007,16(3):582~587

12 傅景礼,王新民. 相对论性 Birkhoff 系统的 Lie 对称性与守恒量. 物理学报, 2000,49(6):1023~1027 (Fu J L, Wang X M. Lie symmetries and conserved quantities of relativistic Birkhoff systems. *Acta Physical Sinica*, 2000, 49(6):1023~1027 (in Chinese))

13 梅凤翔,吴惠彬. Birkhoff 系统的广义梯度表示. 动力学与控制学报, 2015,13(5):329~331 (Mei F X, Wu H B. Generalized skew gradient representation for Birkhoff system. *Journal of Dynamics and Control*, 2015,13(5):329~331 (in Chinese))

14 周燕,张毅. 分数阶 Birkhoff 系统基于 Caputo 导数的对称性与守恒量. 动力学与控制学报, 2015,13(6):409~416 (Zhou Y, Zhang Y. Noether symmetry and conserved quantity for fractional Birkhoffian systems in terms of Caputo derivatives. *Journal of Dynamics and Control*, 2015,13(6):409~416(in Chinese))

15 曹秋鹏,陈向炜. 二阶自治广义 Birkhoff 系统的奇点分析. 动力学与控制学报, 2016,14(5):391~394 (Cao Q P, Chen X W. Singular points analysis for second order autouomous generalized Birkhoff systems. *Journal of Dynamics and Control*, 2016,14(5):391~394 (in Chinese))

16 刘世兴,李娜,刘畅. Birkhoff 框架下 Whittaker 方程的离散变分算法. 动力学与控制学报, 2015,13(4):246~249 (Liu S X, Li N, Liu C. Discrete variational calculation of Whittaker equation in Birkhoffian framework. *Journal of Dynamics and Control*, 2015,13(4):246~249 (in Chinese))

17 Luo S K, Xu Y L. Fractional Birkhoffian mechanics. *Acta Mechanica*, 2015,226(3):829~844

18 Zhang H B, Chen H B. Generalized variational problems and Birkhoff equations. *Nonlinear Dynamics*,2016,83(1-2):347~354

19 Atanackovic T M, Konjik S, Pilipovic S, et al. Variational problems with fractional derivatives: Invariance conditions and Noether's theorem. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 2009,71(5-6):1504~1517

20 Zhang Y, Zhai X H. Noether symmetries and conserved quantities for fractional Birkhoffian systems. *Nonlinear Dynamics*, 2015,81(1-2):469~480

21 Frederico G S F, Torres D F M. A formulation of Noether's theorem for fractional problems of the calculus of variations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2007,334(2):834~846

22 Agrawal O P. Generalized variational problems and Euler-Lagrange equations. *Computers and Mathematics with Applications*, 2010,59(5):1852~1864

23 Bourdin L, Cresson J, Greff I. A continuous/discrete fractional Noether's theorem. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2013,18(4):878~887

24 Jost J, Li-Jost X. Calaulus of Variations. Cambridge: Cambridge University Press, 1998

NOETHER´S THEOREM OF BIRKHOFFIAN SYSTEMS WITH GENERALIZED FRACTIONAL OPERATORS *

Zhang Hongbin†

(*College of Electronic Engineering*, *Chaohu University*, *Hefei* 238000, *China*)

Abstract A Noether type symmetry theorem for fractional Birkhoffian systems was proposed. Two new transformation formulas for generalized fractional derivative operators were derived, and thus, the constants of motion that are valid along Birkhoffian equations extremals were obtained. This theorem provides an explicit algorithmic way to compute a constant for any Birkhoffian systems. It overcomes some defects of existing methods for studying the conserved quantities of fractional order dynamical systems. Finally, two corollaries were given.

Key words fractional Birkhoffian systems, generalized fractional operators, Noether's theorem, symmetries

Received 19 June 2018,revised 3 April 2019.

* The project supported by the National Natural Science Foundation of China(10872037,11472063).

† Corresponding author E-mail:zhanghongbin@ chu.edu.cn