第 17 卷第 5 期 2019 年 10 月
1672-6553/2019/17(5)/453-5

Vol.17 No.5
Oct. 2019

分析力学研究应当重视物理意义的讨论*

丁光涛† 陶松涛
(安徽师范大学 物理与电子信息学院, 芜湖 241003)

摘要 分析力学研究主要包括两个方面:物理意义的探究和数学方法的应用,两者应当协调发展.以拉格朗日力学逆问题为例,以量纲分析为依据,指出分析力学研究应当重视物理意义的讨论:一是新的研究结果是否具有正确的物理意义;二是有些新的结果和方法是否与物理规律相矛盾.举例说明得到的结论.

关键词 分析力学, 逆问题, 等效的拉格朗日函数, 物理意义, 量纲

DOI: 10.6052/1672-6553-2019-058

引言

力学是物理学、天文学和许多工程科学的基础,它的概念、规律和方法,它的理论体系,奠定了经典物理学;对 20 世纪新物理学,由力学发展起来的最小作用量原理和对称与守恒理论等,仍然起着基础性作用.从另一方面说,经典力学与分析数学一直是相伴而生同步发展的,到了 20 世纪力学理论发展依然与数学进步密切相关,近年来分析力学研究仍然取得一系列的重要成果,而数学的推动是重要的动因.然而,这种情况也造成一种值得注意的倾向,即在分析力学研究中偏重于问题的数学方法的应用和发展,在一定程度上忽视了物理意义的分析和讨论.

例如,把力学中的拉格朗日力学逆问题与数学中的变分法逆问题几乎看作一个概念,多种多样的构造拉格朗日函数的数学方法被提出来,得到了各种各样的函数形式的拉格朗日函数,进而导出了相应的哈密顿函数,但是,对这些函数并没有深入地讨论,它们是否真的具有分析力学所要求的物理意义.另一方面,逆问题的发展以及得到的新结果,对传统的分析力学理论产生多方面的影响和冲击,不少传统的观念被突破,结论需要修正,但是,对这种情况也没有进行全面深入系统地分析和讨论.

本文将以拉格朗日力学逆问题为中心,通过两个实例说明,分析力学研究与应用数学的研究应当有所区别,前者应当重视物理意义的分析和讨论.为了使讨论简单明晰,下面主要以量纲来代表问题的物理方面,所以,在第一节给出量纲理论的简要回顾;第二节给出谐振子运动方程、第一积分,以及相应的拉格朗日函数和哈密顿函数;第三节讨论一个二维系统的拉格朗日函数族;第四节讨论由等效的拉格朗日函数引起的一些问题;第五节是小结.

1 量纲及其法则要点

物理学中存在诸多不同的物理量,可以分成基本量和导出量,在确定了单位制后,一个导出量能够用若干个基本量的乘方之积表示出来,这个表达式称为该物理量的量纲式[1,2].量纲是物理学中的一个重要问题,可以表征物理量的性质(类别),如力学中的时间、长度、质量、动量、能量等.量纲分析是物理科学中一种重要的研究方法,它根据各种量所必须具有的形式来分析判断事物间数量关系所遵循的一般规律,简而言之,就是可以在量纲法则的原则下,分析和探求物理量之间关系.通过量纲分析可以检查反映物理现象规律的方程在计量方面是否正确,甚至可提供寻找物理现象某些规律的线索,以指导在物理领域中建立数学模型或进行实验.基本的量纲法则有两条:1)只有量纲相同的物理量,才能彼此相加、相减和相等;2)指数函数、对数函数和三角函数等函数的宗量应当是纯数量,即其量纲应当为 1.量纲法则是量纲分析的基础,对力

2018-04-29 收到第 1 稿,2019-04-07 收到修改稿.
* 国家自然科学基金资助项目(11472063)
† 通讯作者 E-mail:dgt695@ sina.com

学和物理学问题,若导出的公式不符合量纲法则,那就应当深入讨论.下面讨论的实例,局限于力学范围内,所以基本量仅有时间、长度和质量.

2 谐振子第一积分和拉格朗日函数的量纲分析

质量 m 的小球和倔强系数 k 的弹簧构成的谐振子,其运动微分方程为

$$m\ddot{x}+kx=0 \tag{1}$$

通常将上述方程改写为

$$\ddot{x}+\omega_0^2x=0 \tag{2}$$

式中,$\omega_0^2=\dfrac{k}{m}$.方程(2)可以看作单位质量小球构成的振子的运动方程.方程(1)和(2)是实际的物理方程,它们中各项量纲必须相同,这就是说 ω_0 的量纲是[T^{-1}].容易得到方程(2)的多个不同的积分[3],例如能量积分

$$I_1=\frac{1}{2}(\dot{x}^2+\omega_0^2x^2) \tag{3}$$

与之对应的拉格朗日函数是

$$L_1=\frac{1}{2}(\dot{x}^2-\omega_0^2x^2) \tag{4}$$

从数学上,还可以构造其它积分,包括不显含时间的积分,如

$$I_2=\ln(\dot{x}^2+\omega_0^2x^2) \tag{5}$$

下面利用文献[4]中钱德拉塞卡等提出的方法,从 I_2 构造振子的拉格朗日函数.设对应的拉格朗日函数为 L_2,由于 I_2 与时间无关,直接取作雅可比积分,即存在如下关系式

$$I_2=\frac{\partial L_2}{\partial\dot{x}}\dot{x}-L_2=p_2\dot{x}-L_2 \tag{6}$$

进而导出

$$\frac{\partial I_2}{\partial\dot{x}}=\frac{\partial p_2}{\partial\dot{x}}\dot{x}$$

$$p_2=\int^{\dot{x}}\frac{1}{\dot{x}}\frac{\partial I_2}{\partial\dot{x}}\mathrm{d}\dot{x}$$

解出 p_2 后,代入式(6),即得到待求的拉格朗日函数

$$L_2=p_2\dot{x}-I_2 \tag{7}$$

从数学理论上,解出的 p_2 应当加上任意函数 $f(x)$,代入式(7)后,相当于得到一族规范等效的拉格朗日函数,为了简化讨论,没有考虑任意函数 $f(x)$.

文献[7]对钱德拉塞卡等提出的方法进行了研究,并说明其理论基础是诺特定理的逆问题,同时指出这种方法存在局限性.在对式(6)I_2 进行上述程序的运算后,得到

$$p_2=\frac{2}{\omega_0x}\mathrm{arctg}\,\frac{\dot{x}}{\omega_0x} \tag{8}$$

$$L_2=\frac{2\dot{x}}{\omega_0x}\mathrm{arctg}\,\frac{\dot{x}}{\omega_0x}-\ln(\dot{x}^2+\omega_0^2x^2) \tag{9}$$

上面谐振子的两个拉格朗日函数,如果从基本的量纲法则分析,则可以表明第一个解是符合量纲法则的,I_1 和 L_1 的量纲是能量量纲,L_1 是标准形式的拉格朗日函数,它对时间积分的量纲是作用量量纲.但是,第二个解在物理上是存在问题的.首先,I_2 表达式不符合量纲法则,对数函数的宗量不是无量纲的数,而是具有能量量纲;其次,p_2 的量纲也不是通常的力学动量量纲;再者,L_2 是非标准形式的拉格朗日函数,而且其表达式前一项量纲为 1 的纯数,后一项是能量量纲宗量的对数,它对时间的积分不具有力学(物理学)作用量的量纲,这就是说,在传统的力学意义上,第二个解是不符合物理学要求的.

根据第一个解,谐振子哈密顿函数为

$$H_1=\frac{1}{2}(p_1^2+\omega_0^2x^2)\quad\left(p_1=\frac{\partial L_1}{\partial\dot{x}}=\dot{x}\right) \tag{10}$$

在此基础上,可以进一步讨论其他物理问题,例如谐振子量子化.但是,根据第二个解,导出的谐振子的哈密顿函数为

$$H_2=\ln\left[\omega_0^2x^2\sec^2\left(\frac{1}{2}\omega_0xp_2\right)\right] \tag{11}$$

显然,它也不符合量纲法则,不是物理量,更不能由此讨论系统的量子化等.

3 一个二维系统拉格朗日函数的量纲分析

研究二维非线性非保守系统[5-7]

$$\begin{aligned}&m\ddot{q}_1+\gamma(q_1\dot{q}_1^2+2q_2\dot{q}_1\dot{q}_2-q_1\dot{q}_2^2)=0\\&m\ddot{q}_2+\gamma(q_2\dot{q}_2^2+2q_1\dot{q}_1\dot{q}_2-q_2\dot{q}_1^2)=0\end{aligned} \tag{12}$$

取变量 q_1,q_2 为长度,量纲为[L],m 为质量,量纲为[M],那么,根据量纲法则,系数 γ 的量纲应为[ML^{-2}].方程(12)存在一个第一积分

$$I=\ln(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2)+\frac{\gamma}{m}(q_1^2+q_2^2) \tag{13}$$

由此积分可以得到系统的一个拉格朗日函数族

$$\bar{L}=F(I)=F\left[\ln(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2)+\frac{\gamma}{m}(q_1^2+q_2^2)\right] \tag{14}$$

函数 F 是其宗量的任意连续可微函数.这个函数族包括任意多个不同函数形式的系统拉格朗日函数,例如

$$L_1=\ln(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2)+\frac{\gamma}{m}(q_1^2+q_2^2) \tag{15}$$

$$L_2=\exp\left[\frac{\gamma}{m}(q_1^2+q_2^2)\right]\frac{m}{2}(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2) \tag{16}$$

从物理上来说,L_2 是标准形式的拉格朗日函数,它是带有修正系数的动能,而且修正系数是指数函数,其指数为坐标的函数,且量纲为 1,符合量纲法则.与它对应的,有一个雅可比积分

$$I_2=\exp\left[\frac{\gamma}{m}(q_1^2+q_2^2)\right]\frac{m}{2}(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2) \tag{17}$$

事实上,这个积分可以从式(13)导出,即

$$I_2=\frac{m}{2}\exp(I) \tag{18}$$

式(17)I_2 也符合量纲法则,可以解释为质量与位置相关粒子的动能.L_2 可以直接从 I_2 导出.

然而,式(13)却不符合量纲法则,I 只是作为数学上微分方程(12)的一个第一积分,但没有物理意义,严格说来,不能称为系统(12)的一个守恒量.L_1 是非标准形式的拉格朗日函数,式(15)不符合量纲法则,它没有确切的量纲,更不是能量的量纲,只是一个数学上的函数;它对时间的积分不是物理上的作用量,只是一个数学上的泛函.从微分方程(12)导出函数(15),再从这个函数得到的泛函导出运动微分方程,其根据是数学上的变分法及其逆问题理论,严格说来,不是根据物理(力学)上的最小作用量原理及其逆问题理论.

4　与等效的拉格朗日函数相关问题的讨论

拉格朗日力学逆问题理论和方法得到的成果,拓宽了拉格朗日系统的范围,使得很多非保守系统运动微分方程能够写成拉格朗日方程形式;证明了一个系统存在多种等效的拉格朗日函数;拉格朗日函数可以写成动能项与势能项之差的标准形式,还有各种各样非标准形式等.这些分析力学的新发展使得经典力学某些原有的结论需要重新认识,内容需要修正.

例如,在以文献[9]为代表的一些经典力学著作中,讨论力学系统的对称性和守恒量时,是以拉格朗日函数在某些变换下的不变性来定义对称性的,其中时–空变换的对称性特别受到关注,因为这些对称性对应着一些重要的物理量(能量、动量和角动量)守恒.下列类似于准定理的陈述常见于某些早期力学著作中:若 $\frac{\partial L}{\partial t}=0$,则系统的广义能量 $H=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\dot{q}_k-L$ 守恒;若 $\frac{\partial L}{\partial q_l}=0$,则系统对应的广义动量 $p_l=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l}$ 守恒等.这里不去讨论系统广义能量和广义动量在什么样的条件下是系统机械能量和机械(角)动量,而是针对上述陈述提出如下问题:

若 $\frac{\partial L}{\partial t}\neq 0$,广义能量 $h=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\dot{q}_k-L$ 是否一定不守恒?

仍然利用上述实例来讨论,引入谐振子系统 L_1 的一个规范等效函数

$$L'_1=\frac{1}{2}(\dot{x}^2-\omega_0^2x^2)+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}\omega_0^2x^2t\right)=\frac{1}{2}\dot{x}^2+\omega_0^2x\dot{x}t \tag{19}$$

显然,$\frac{\partial L'_1}{\partial t}\neq 0$,但是,利用诺特定理,引入规范函数,容易证明式(3)能量积分仍然成立,即谐振子系统仍然存在能量守恒.相反地,式(9)L_2 不显含时间,对应的积分是式(5)中的 I_2,前面已经指出它只是谐振子的一个运动积分,不是一个严格意义上的物理量,不是系统能量守恒的表达式.

文献[7]多次指出,逆问题得到的结果使得对原来力学著作中关于对称性与守恒量的论述应当修正.上述例 2 是其中一个典型例子,说明式(16)中的拉格朗日函数 L_2 虽然具有旋转对称性,但是系统的物理角动量

$$J=m(q_1\dot{q}_2-q_2\dot{q}_1) \tag{20}$$

却不是守恒量.为了便于讨论,q_1 和 q_2 看作平面直角坐标,引入平面极坐标 r 和 θ,利用坐标变换可以将式(16)中的 L_2 写成

$$L_2=\exp\left(\frac{\gamma}{m}r^2\right)\frac{m}{2}(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2) \tag{21}$$

显然坐标 θ 是循环坐标,导出的对应的积分是

$$J'=\exp\left(\frac{\gamma}{m}r^2\right)mr^2\dot{\theta} \tag{22}$$

它不是系统的物理角动量表达式,类似于式(17)的理解,式(22)可以解释为质量与坐标(位置)相

关的粒子的角动量.

文献[11]讨论了对拉格朗日系统诺特对称性的两种不同的理解,一种是拉格朗日函数的不变性,另一种是哈密顿作用量的不变性,且明确指出后一种理解是合理的.在早期经典力学某些著作和教材中,往往是根据前一种理解来讨论对称性与守恒量的.分析力学新的发展,上述实例的讨论,支持文献[11]的结论,同时说明严格区分广义能量积分(雅可比积分)与力学系统的物理能量守恒,区分广义动量积分(循环积分)与力学系统的物理动量和角动量守恒是必要的.

5 小结

(1)上面以谐振子和二维非线性阻尼运动为例,讨论了相关的变分法逆问题的结果,以及所带来的力学研究范围的拓展.值得注意的是,如果仅从数学方面来考虑,将力学系统运动方程看作纯粹的微分方程,那么,上面导出的第一积分、拉格朗日函数等数学表达式等都是被容许的,利用这样的拉格朗日函数和哈密顿函数,应用分析力学中的方法能够得到方程的解,事实上这种途径已经推广到求解更为复杂的微分方程[4,8].但是,从力学物理学方面来看,这个过程中出现的多种数学结果都应当认真从力学角度去讨论其意义,以区分出真正具有物理意义的量,以及能够表达真实物理规律的数学表达式.量纲法则是超越具体物理过程的基本物理规律,适合利用这个法则来检验讨论中的数学表达式,检验的结果表明有些表达式是违背量纲法则的,这种表达式不具有物理意义,不能进一步讨论某些物理学力学问题,例如量子化问题.

(2)讨论力学物理学问题时出现数学方法与物理意义之间的矛盾是不可避免的.例如,实际存在的物理量不可能是复值的,但是,当代力学物理学研究中已经无法不利用复数了.应当重视的是,在处理力学物理学问题时,对利用数学方法导出的多种结果,要根据物理规律有所鉴别和选择,重视物理意义的分析和物理规律的论证.还要利用新的结果去讨论检验原有的理论,因为新的发展带来新的高度和视野,可能有利于发现早期学科体系中被掩盖的问题.

(3)当前分析力学研究中,除了拉格朗日力学逆问题以及与之相关的等效的非标准形式的拉格朗日函数等成果外,还有其它课题,包括一些热点研究领域,也存在物理意义探讨不足的问题.在理论研究中要求数学方法与理论解释总是同步协调是不现实的,不能因为物理意义一时不明就反对或怀疑问题数学方面的研究,同时也应当防止忽视对力学物理学意义的解析,特别要防止某些数学结果的不确切理解和误用.

(4)力学物理学与数学紧密相关,当然不能要求讨论问题的每一步都满足物理规律,不能希望每一个导出的数学表达式都具有确定的物理意义,但作为物理学(力学)研究,最后结果应当回到力学物理学上来.对于某些暂时无法用原有物理理论说明的,但是在数学上又是严密论证合乎逻辑的结果,应当努力探索新的解释,寻求对原有理论的突破.在物理学发展的历史上,这种努力有很多著名的成功事例.例如,对波函数的几率解释;对狄拉克方程负能量解的理解,导致存在反粒子的预言等.这从另一方面说明了物理意义的探讨的重要性.

(5)本文讨论仅局限于力学范围内,但是,现在很多学科,包括社会科学领域,都重视建立数学模型,特别是微分方程模型.这就使得在分析力学中发展的许多理论和方法,在其它学科中也得到广泛的应用[12].这意味着在利用分析力学理论和方法研究这些学科问题时,也要重视相关学科意义的分析和讨论.

参考文献

1 谈庆明. 量纲分析. 合肥:中国科学技术大学出版社, 2005 (Tan Q M. Dimensional analysis. Hefei: China Science and Technology University Press, 2005 (in Chinese))

2 包科达. 中国大百科全书·物理学. 词条:量纲和量纲分析. 北京:中国大百科全书出版社, 1987 (Bao K.D. Chinese encyclopedia of physics. Entry: dimension and dimensional analysis. Beijing: China encyclopedia press, 1987 (in Chinese))

3 丁光涛. 关于谐振子第一积分的研究. 物理学报, 2013,62(6):064502 (Ding G T. A study on the first integrels of harmonic oscillators. *Acta Physica Sinica*, 2013,62(6):064502 (in Chinese))

4 Chandrasekar V K, Senthivelan M, Lakshmanan M. On the Lagrangian and Hamiltonian description of the damped

linear harmonic oscillator. *Journal of Mathematical Physics*, 2007,48:032701

5 丁光涛. 从第一积分构造 Lagrange 函数的直接方法. 动力学与控制学报, 2011,9(2):102~106 (Ding G T. A direct approach to construction of the Lagrangian from the first integral. *Journal of Dynamics and Control*, 2011, 9(2):102~106 (in Chinese))

6 丁光涛. 关于一类 Lagrange 函数族的存在条件. 动力学与控制学报, 2011,9(3):219~221 (Ding G T. On the existence conditions for a class of the Lagrangian Families. *Journal of Dynamics and Control*, 2011,9(3): 219~221 (in Chinese))

7 Santilli R M. Foundations of theoretical Mechanics II. New York:Spinger-Verlag, 1983

8 Chandrasekar V K, Senthivelan M, Lakshmanan M. On the general solution for the modified Emden-type equation. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 2007,40:4717

9 Goldstein H, Poole C, Safko J. Classical mechanics (3 third Edition). Beijing: Higher Education Press, 2005

10 吴惠彬,梅凤翔. 关于 Noether 对称性的两种理解. 物理学报, 2006,55(8):3825~3828 (Wu H B, Mei F X. Two comprehensions on Noether symmetry. *Acta Physica Sinica*, 2006,55(8):3825~3828(in Chinese))

11 梅凤翔. 约束力学系统的对称性与守恒量. 北京:北京理工大学出版社, 2004 (Mei F X. Symmetry and conserved quantities of constrained mechanical systems. Beijing:Beijing Institute of Technology Press, 2004 (in Chinese))

12 梅凤翔,吴惠彬. 微分方程的分析力学方法. 北京:科学出版社, 2012 (Mei F X, Wu H B. Analytical mechanics methods for solving differential equations. Beijing:Science Press, 2012 (in Chinese))

ATTENTION SHOULD BE PAID TO PHYSICAL SIGNIFICANCE IN STUDY OF ANALYTICAL MECHANICS *

Ding Guangtao† Tao Songtao

(*College of Physics and Electronic Information*, *Wuhu* 241000, *China*)

Abstract The study of analytical mechanics mainly includes two aspects: the exploration of physical significance and the application of mathematical methods, which should be developed in coordination. Based on dimensional analysis, the inverse problem of Lagrangian mechanics was taken as an example to reveal that the physical significance of the study on analytical mechanics should be emphasized. Specifically, two questions should be answered: (1) whether new results affect the original physical conclusion, and (2) whether new results and methods are inconsistent with the laws of physics. Two examples were given to support this point.

Key words analytical mechanics, inverse problem, equivalent Lagrangian, the physical significance, dimension

Received 29 April 2018, revised 7 April 2019.

* The project supported by the National Natural Science Foundation of China(11472063).

† Corresponding author E-mail: dgt695@ sina.com