第 17 卷第 5 期 2019 年 10 月
1672-6553/2019/17(5)/439-7

动 力 学 与 控 制 学 报
JOURNAL OF DYNAMICS AND CONTROL

Vol.17 No.5
Oct. 2019

Lagrange 子流形理论在约束力学系统正则变换和勒让德变换中的应用*

刘畅[1,2†] 王聪[1] 刘世兴[1] 郭永新[1]

(1.辽宁大学 物理学院, 沈阳 110036)(2.大连理工大学 工业装备结构分析国家重点实验室, 大连 116024)

摘要 Lagrange 方程与 Hamilton 方程之间的勒让德变换理论和 Hamilton 方程的正则变换理论在分析力学中具有重要的地位,从局域坐标的角度很难找到勒让德变换和正则变换之间的相关性. 本文主要基于辛流形的 Lagrange 子流形理论从全局上给出正则变换理论和勒让德变换理论的统一几何解释,进而在几何力学的角度清晰的描述 Hamilton 系统的正则变换和 Lagrange 方程与 Hamilton 方程之间的勒让德变换的几何结构.

关键词 约束力学系统, Lagrange 子流形, 辛流形, 正则变换, 勒让德变换

DOI: 10.6052/1672-6553-2019-070

引言

分析力学是研究约束系统动力学问题的近代方法,被广泛应用于量子力学、统计物理、广义相对论、场论以及工程力学领域[1-16]. 这个最初由 Euler、Lagrange、Hamilton 等人创立的理论体系成功地解决了无约束系统以及完整约束(几何约束)系统的动力学问题. 分析力学的美妙之处就在于通过引入虚功原理对约束力的处理,或者说是如何确定约束力问题的处理. 因此,牛顿定律与虚功原理结合成为 d′Alembert-Lagrange 原理、Hamilton 原理和 Gauss 原理,从而这种起源于经典力学的理论——分析力学,其适用范围突破了经典力学的局限,能够被广泛应用于量子论、场论和广义相对论及其相关学科领域[6-8].究其本质原因就需要从几何力学的观点分析,根据微分方程的 Frobenius 可积性定理,受到 l 个几何约束或者完整微分约束的 $3n$ 维位形空间上的约束动力学系统就蜕变为 $3n-l$ 维位形子空间上的无约束系统.由此可见,约束力就像“一双 l 维的手”,把动力学系统从 $3n$ 维欧氏空间约化到 $s=3n-l$ 维的流形上,约束力表现为位形空间的弯曲,约束力本身却置身于约束子空间之外.此时动力学系统的状态空间是其位形流形的切丛,即 $6n-2l$ 维的辛流形.从而,不论是宏观的还是微观的或者宇观的[1-10,17-20]、确定性的还是随机性的[21]、连续的还是离散的[1-10]、解析的还是数值的[1-10,22,23],只要是受到完整约束的动力学系统的问题,其状态空间就具有辛几何结构,因此,都可以应用分析力学方法来处理.从这个角度考虑,辛流形及其子流形理论在现代力学和现代物理学的理论研究或者工程应用研究就显得尤为重要.根据 Weinstein 的辛信条[24,25]: EVERYTHING IS A LAGRANGIAN SUBMANIFOLD,因此,辛同胚也可以利用 Lagrange 子流形来解释. 由于 Hamilton 系统的正则变换和 Lagrange 方程与 Hamilton 方程之间的勒让德变换都是辛同胚映射.因此,借助于辛流形的拉格朗日子流形就可以给出正则变换和勒让德变换理论统一的几何解释. 总之,利用辛流形的拉格朗日子流形理论可以从几何上阐述清楚约束力学系统的 Lagrange动力学、Hamilton 动力学和 Hamilton-Jacobi 动力学之间的关系.

本文第一部分主要阐述了辛流形的 Lagrange 子流形的基本知识,第二部分主要应用辛流形的 Lagrange 子流形理论解释了约束力学系统的正则变换问题和勒让德变换问题.

2018-09-19 收到第 1 稿,2019-04-04 收到修改稿.
* 国家自然科学基金资助项目(11772144,11572145,11472124)
† 通讯作者 E-mail:changliu@lnu.edu.cn

1 辛流形的 Lagrange 子流形理论

1.1 辛向量空间及其特殊子空间

辛向量空间是被赋予了辛结构的向量空间，而辛结构是一种斜对称的结构最早在数学领域被 Abel 研究过，但是与复结构混名，后被 Weyl 于 1938 年正式更为此名，中文翻译是由华罗庚先生音译而得. 其实分析力学的相空间就是辛空间，只是早期的分析力学大师们主要关注力学系统运动的解析表达，并给出了研究辛结构局部特征十分实用的解析方法，但是很少关注力学系统的几何结构.

定义 1.1：已知 $2n$ 维向量空间 V，如果给定该空间上的辛形式为非退化的 2−形式 $\Omega: V\times V\to\mathbb{R}$，满足：

(1) $\Omega(u,v)=-\Omega(u,v)$, $\forall u,v\in V$;

(2) $\Omega(u,v)=0$, $\forall v\in V\Rightarrow u=0$;

则定义了辛形式 Ω 的向量空间记为 (V,Ω)，被称为辛向量空间.

根据辛向量空间上辛形式的内积运算 $\Omega: V\times V\to\mathbb{R}$，我们可以定义辛向量空间的正交子空间和辛向量空间的特殊子空间.

定义 1.2：设 (V,Ω) 是 $2n$ 维辛向量空间，若两个矢量 $\forall u\in V$ 和 $\forall v\in V$ 满足 $\Omega(u,v)=0$，则称它们是斜正交的. 设 W 和 W' 是辛向量空间 V 的两个子空间，若 $W\subset V$ 的每一个矢量 $u\in W\subset V$ 与 $W'\subset V$ 的每一个矢量 $v\in W'\subset V$ 斜正交，则称这两个子空间是斜正交的子空间.

显然，如果给定了一个子空间 $W\subset V$，其在 V 中的最大斜正交空间为

$$W_\Omega^\perp \triangleq \{u\in V \mid \Omega(u,v)=0, \forall v\in W\} \tag{1}$$

根据辛向量空间的子空间 $W\subset V$ 与其斜正交子空间的关系可以定义四类特殊的子空间.

定义 1.3：设 $W\subset V$ 是 $2n$ 维辛向量空间 (V,Ω) 的子空间，$W_\Omega^\perp\subset V$ 是其斜正交子空间. 则

(1) 若 $W_\Omega^\perp\subset W$，则 W 是余迷向子空间；

(2) 若 $W\subset W_\Omega^\perp$，则 W 是迷向子空间；

(3) 若 $W_\Omega^\perp=W$，则 W 是 Lagrange 子空间；

(4) 若 $W_\Omega^\perp\cap W=\{0\}$，则 W 是辛子空间.

1.2 辛流形的 Lagrange 子流形

根据辛向量空间的特殊子空间的定义 2.3，我们可以辛流形的四种特殊子流形如下.

定义 1.4：若 N 是 $2n$ 维辛流形 (M,Ω) 的子流形，并且在 N 的任意点 $\forall P\in N\subset M$，我们有：

(1) 若 T_PN 是 T_PM 的迷向子空间，则 N 是辛流形 (M,Ω) 的迷向子流形；

(2) 若 T_PN 是 T_PM 的余迷向子空间，则 N 是辛流形 (M,Ω) 的余迷向子流形；

(3) 若 T_PN 是 T_PM 的 Lagrange 子空间，则 N 是辛流形 (M,Ω) 的 Lagrange 子流形；

(4) 若 T_PN 是 T_PM 的辛子空间，则 N 是辛流形 (M,Ω) 的辛子流形.

$2n$ 维辛流形 (M,Ω) 的子流形理论在辛约化以及动力学系统的对称约化中具有重要应用，尤其是辛流形的 Lagrange 子流形理论在约束力学系统的动力学问题研究和几何结构研究中具有重要意义.

2 Lagrange 子流形在正则变换中的应用

2.1 辛同胚映射与 Lagrange 子流形

定义 2.1：设两个 $2n$ 维的辛流形分别为 (M_1,Ω_1) 和 (M_2,Ω_2)，存在同胚映射 $\varphi: M_1\to M_2$，当且仅当 $\varphi^*\Omega_2=\Omega_1$ 时，同胚映射是辛同胚映射.

设存在两个投影映射 P_1 和 P_2 分别是：

$$P_1: M_1\times M_2\to M_1 \text{ 和 } P_2: M_1\times M_2\to M_2 \tag{2}$$

则

$$\Omega=P_1^*\Omega_1+P_2^*\Omega_2$$

是流形 $M_1\times M_2$ 上闭的辛 2-形式. 显然对于 $\forall\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}/\{0\}$，则

$$\Omega=\lambda_1P_1^*\Omega_1+\lambda_2P_2^*\Omega_2 \tag{3}$$

一定是流形 $M_1\times M_2$ 上闭的辛 2-形式. 如果令 $\lambda_1=1, \lambda_2=-1$，则

$$\tilde{\Omega}=P_1^*\Omega_1-P_2^*\Omega_2 \tag{4}$$

称为流形 $M_1\times M_2$ 上的扭曲辛 2-形式.

定义 2.2：微分同胚映射 $\varphi: M_1\to M_2$ 在流形 $M_1\times M_2$ 中的图 G_φ 是 $M_1\times M_2$ 的 $2n$ 维子流形：

$$G_\varphi\triangleq\{(p,\varphi(p)) \mid \forall p\in M_1\} \tag{5}$$

显然，同胚映射 $\varphi: M_1\to M_2$ 诱导了嵌入映射 $\phi: M_1\to M_1\times M_2$，即图 G_φ 是 M_1 在 $M_1\times M_2$ 中的嵌入子流形. 特别地，如果图 G_φ 是 $M_1\times M_2$ 中的Lagrange 子流形，则有如下命题.

命题 2.3：微分同胚映射 $\varphi: M_1\to M_2$ 是辛同胚映射，当且仅当图 G_φ 是 $(M_1\times M_2,\tilde{\Omega})$ 的 Lagrange 子

流形.

证明:图 G_φ 是 Lagrange 子流形,当且仅当 $\phi^*\tilde{\Omega}=0$. 因为

$$\begin{aligned}\phi^*\tilde{\Omega}&=\phi^*(P_1{}^*\Omega_1-P_2^*\Omega_2)\\&=\phi^*P_1{}^*\Omega_1-\phi^*P_2^*\Omega_2\\&=(P_1\circ\phi)^*\Omega_1-(P_2\circ\phi)^*\Omega_2\\&=Id^*\Omega_1-\varphi^*\Omega_2\end{aligned}$$

所以

$$\phi^*\tilde{\Omega}=0\Leftrightarrow\varphi^*\Omega_2=\Omega_1$$

证毕.

所以,Lagrange 子流形和辛同胚映射之间存在密切关系,进而如果辛同胚映射恰好是正则变换,我们就可以通过 Lagrange 子流形来构造余切丛化辛流形之间的正则变换.

2.2 根据 Lagrange 子流形构造正则变换

如果 Q_1 和 Q_2 是 n 维流形,其余切丛分别为 $M_1=T^*Q_1$ 和 $M_2=T^*Q_2$,并且余切丛 T^*Q_1 和T^*Q_2 上的 Liouville 1-形式和正则 2-形式分别为 α_1,α_2 和 Ω_1,Ω_2.

辛流形的直积为

$$M_1\times M_2=T^*Q_1\times T^*Q_2\simeq T^*(Q_1\times Q_2)$$

余切丛 $T^*(Q_1\times Q_2)$ 上的 Liouville 1-形式是

$$\alpha=P_1^*\alpha_1+P_2^*\alpha_2\tag{6}$$

其中,$P_1:T^*Q_1\times T^*Q_2\to T^*Q_1$ 和 $P_2:T^*Q_1\times T^*Q_2\to T^*Q_2$ 是两个投影映射. 因此,可得余切丛 $T^*(Q_1\times Q_2)$ 上的正则 2-形式

$$\Omega=-d\alpha=-d^*P_1\alpha_1-dP_2^*\alpha_2=P_1^*\Omega_1+P_2^*\Omega_2\tag{7}$$

由(4)式可得余切丛 $T^*(Q_1\times Q_2)$ 上的扭曲正则 2-形式

$$\tilde{\Omega}=-d\tilde{\alpha}=-dP_1^*\alpha_1+dP_2^*\alpha_2=P_1^*\Omega_1-P_2^*\Omega_2\tag{8}$$

如果定义余切丛 T^*Q_2 上的映射

$$\sigma:T^*Q_2\to T^*Q_2,\text{即 }\sigma:(Q,P)\mapsto(Q,-P)$$

显然,$\sigma^*\alpha_2=-\alpha_2$. 从而可以定义映射

$$\tau=id_{M_1}\times\sigma:T^*Q_1\times T^*Q_2\to T^*Q_1\times T^*Q_2\tag{9}$$

并且有

$$\begin{aligned}\tau^*\tilde{\Omega}&=id^*(-d\alpha_1)+\sigma^*d\alpha_2\\&=id^*(-d\alpha_1)+d(\sigma^*\alpha_2)\\&=\Omega_1+\Omega_2=\Omega\end{aligned}\tag{10}$$

显然,如果 Γ 是$(M_1\times M_2,\Omega)$的 Lagrange 子流形,则 Γ^τ 是扭曲积辛流形$(M_1\times M_2,\tilde{\Omega})$的 Lagrange 子流形.

由命题 2.3 可知,辛积流形的 $M_1\times M_2$ 任意一个 Lagrange 子流形 Γ 都有唯一的辛同胚映射 $\varphi:M_1\to M_2$与之对应. 例如积流形 $Q_1\times Q_2$ 上的余切丛 $T^*(Q_1\times Q_2)$的四类特殊的 Lagrange 子流形 $Q_1\times Q_2$, $Q_1\times T_Q^*Q_2$, $T_q^*Q_1\times Q_2$, $T_q^*Q_1\times T_Q^*Q_2$ 上的四类函数就可以生成四类辛同胚映射——四类正则变换.

2.2.1 余切丛 $T^*(Q_1\times Q_2)$的第一类 Lagrange 子流形和第一类正则变换

对于积流形 $Q_1\times Q_2$ 的余切丛 $T^*(Q_1\times Q_2)$的零截面 $Q_1\times Q_2$ 就是第一类特殊的 Lagrange 子流形 $Q_1\times Q_2$. 对于 $\forall S^1\in C^\infty(Q_1\times Q_2)$,则 $dS^1(q,Q)$是积流形 $Q_1\times Q_2$ 上闭的 1-形式. 由闭的 1-形式

$$dS^1(q,Q):Q_1\times Q_2\to T^*(Q_1\times Q_2)\tag{11}$$

生成的 Lagrange 子流形 Γ_1

$$\Gamma_1:=\{((q,Q),(dS^1(q,Q)))\mid(q,Q)\in Q_1\times Q_2\}\tag{12}$$

Lagrange 子流形 Γ_1 也可以表示为

$$\Gamma_1:=\left\{\left(q^i,Q^i,\frac{\partial S^1}{\partial q^i}dq^i,\frac{\partial S^1}{\partial Q^i}dQ^i\right)\mid(q^i,Q^i)\in Q_1\times Q_2\right\}\tag{13}$$

则与 Lagrange 子流形 Γ_1 对应的扭曲 Lagrange 子流形 Γ_1^τ 为

$$\Gamma_1^\tau:=\left\{\left(q^i,Q^i,\frac{\partial S^1}{\partial q^i}dq^i,-\frac{\partial S^1}{\partial Q^i}dQ^i\right)\mid(q^i,Q^i)\in Q_1\times Q_2\right\}\tag{14}$$

显然,Lagrange 子流形 $\Gamma_1{}^\tau$ 作为辛同胚映射 $\varphi:T^*Q_1\to T^*Q_2$的图,也就是由 Lagrange 子流形 $Q_1\times Q_2$上的光滑函数 $S^1(q,Q)$生成的正则变换为:

$$\varphi:T^*Q_1\to T^*Q_2,\text{即 }\varphi:(q,p)\mapsto(Q,P)$$

从(14)式可得

$$\begin{cases}p_i=\dfrac{\partial S^1}{\partial q^i}\\[2ex]P_i=-\dfrac{\partial S^1}{\partial Q^i}\end{cases}\tag{15}$$

通过求解方程组(15)式可得

$$Q^i=\varphi_1(q^i,p_i),\ P_i=\varphi_2(q^i,p_i)$$

也就可以得到正则变换

$$\varphi(q^i,p_i)=(\varphi_1(q^i,p_i),\varphi_2(q^i,p_i))\tag{16}$$

因此, Lagrange 子流形 $Q_1\times Q_2$ 上的光滑函数 $S^1(q,Q)$ 也被称为生成第一类正则变换 $\varphi:T^*Q_1\to T^*Q_2$ 的母函数(也称第一类生成函数).

2.2.2 余切丛 $T^*(Q_1\times Q_2)$ 的第二类 Lagrange 子流形和第二类正则变换

余切丛 $T^*(Q_1\times Q_2)$ 的第二类 Lagrange 子流形 $Q_1\times T_Q{}^*Q_2$ 上的光滑函数 $\forall S^2\in C^\infty(Q_1\times T_Q{}^*Q_2)$,则 $d(S^2(q,P)-Q^iP_i)$ 是积流形 $Q_1\times T_Q{}^*Q_2$ 上的闭的 1-形式. 由闭的 1-形式

$$d(S^2(q,P)-Q^iP_i):Q_1\times T_Q{}^*Q_2\to T^*(Q_1\times Q_2)$$

生成的 Lagrange 子流形 Γ_2

$$\Gamma_2:=\left\{((q,P),d(S^2-Q^iP_i))\;\middle|\;(q,P)\in Q_1\times T_Q^*Q_2\right\} \tag{17}$$

显然 Lagrange 子流形 Γ_2 也可以表示为

$$\Gamma_2:=\left\{(q^i,P_i,\partial S^2/\partial q^i dq^i,(\partial S^2/\partial P_i-Q^i)dP_i,-P_idQ^i)\;\middle|\;(q,P)\in Q_1\times T_Q^*Q_2\right\} \tag{18}$$

Lagrange 子流形 Γ_2 相对应的扭曲 Lagrange 子流形为

$$\Gamma_2^\tau:=\left\{(q^i,P_i,(-\partial S^2/\partial P_i+Q^i)dP_i,-P_idQ^i)\;\middle|\;(q,P)\in Q_1\times T_Q^*Q_2\right\} \tag{19}$$

显然

$$\begin{cases} p_i=\dfrac{\partial S^2}{\partial q^i} \\ Q^i=\dfrac{\partial S^2}{\partial P_i} \end{cases} \tag{20}$$

则与 Lagrange 子流形 Γ_2^τ 对应的辛同胚映射,即由 Lagrange 子流形 $Q_1\times T_Q^*Q_2$ 上的光滑函数 $S^2(q,P)$ 生成的正则变换为:

$$\varphi:T^*Q_1\to T^*Q_2,\text{即 }\varphi:(q,p)\mapsto(Q,P)$$

因此,分别由式(20)的第一式和第二式可得

$$P_i=\varphi_1(q^i,p_i),\; Q^i=\varphi_2(q^i,p_i)$$

也就可以得到

$$\varphi(q^i,p_i)=(\varphi_2(q^i,p_i),\varphi_1(q^i,p_i)) \tag{21}$$

因此, Lagrange 子流形 $Q_1\times T_Q^*Q_2$ 上的光滑函数 $S^2(q,P)$ 也被称为生成第二类正则变换的母函数(也称第二类生成函数).

2.2.3 余切丛 $T^*(Q_1\times Q_2)$ 的第三类 Lagrange 子流形和第三类正则变换

余切丛 $T^*(Q_1\times Q_2)$ 的第三类 Lagrange 子流形 $T_q^*Q_1\times Q_2$ 上的光滑函数 $\forall S^3\in C^\infty(T_q^*Q_1\times Q_2)$,则 $d(S^3(p,Q)+q^ip_i)$ 是积流形 $T_q^*Q_1\times Q_2$ 上的闭的 1–形式. 由闭的 1–形式

$$d(S^3(p,Q)+q^ip_i):T_q^*Q_1\times Q_2\to T^*(Q_1\times Q_2)$$

生成的 Lagrange 子流形 Γ_3

$$\Gamma_3:=\left\{((p,Q),d(S^3(p,Q)+q^ip_i))\;\middle|\;(p,Q)\in T_q^*Q_1\times Q_2\right\} \tag{22}$$

Lagrange 子流形 Γ_3 也可以表示为

$$\Gamma_3:=\left\{(p,Q),(q^idp_i,(\partial S^3/\partial p_i+q^i)dp_i,\partial S^3/\partial Q^idQ^i)\;\middle|\;(p,Q)\in T_q^*Q_1\times Q_2\right\}$$

与 Lagrange 子流形 Γ_3 对应的扭曲 Lagrange 子流形 Γ_3^τ 为

$$\Gamma_3^\tau:=\left\{(p,Q),(q^idp_i,(\partial S^3/\partial p_i+q^i)dp_i,-\partial S^3/\partial Q^idQ)\;\middle|\;(p,Q)\in T_q^*Q_1\times Q_2\right\} \tag{23}$$

显然

$$\begin{cases} q^i=-\dfrac{\partial S^3}{\partial p_i} \\ P_i=-\dfrac{\partial S^3}{\partial Q^i} \end{cases} \tag{24}$$

则与 Lagrange 子流形 Γ_3^τ 对应的辛同胚映射,也就是由 Lagrange 子流形 $T_q^*Q_1\times Q_2$ 上的光滑函数 $S^3(p,Q)$ 生成的正则变换为:

$$\varphi:T^*Q_1\to T^*Q_2,\text{即 }\varphi:(q,p)\mapsto(Q,P)$$

因此,分别由式(24)的第一式和第二式可得

$$Q^i=\varphi_1(q^i,p_i),\; P_i=\varphi_2(q^i,p_i)$$

也就可以得到

$$\varphi(q^i,p_i)=(\varphi_1(q^i,p_i),\varphi_2(q^i,p_i)) \tag{25}$$

因此, Lagrange 子流形 $Q_1\times T_Q^*Q_2$ 上的光滑函数 $S^3(p,Q)$ 也被称为生成第三类正则变换的母函数(也称第三类生成函数).

2.2.4 余切丛 $T^*(Q_1\times Q_2)$ 的第四类 Lagrange 子流形和第四类正则变换

余切丛 $T^*(Q_1\times Q_2)$ 的第四类 Lagrange 子流形 $T_q^*Q_1\times T_Q^*Q_2$ 上的光滑函数 $\forall S^4\in C^\infty(T_q^*Q_1\times T_Q^*Q_2)$,则 $d(S^4(p,P)+q^ip_i-Q^iP_i)$ 是积流形 $T_q^*Q_1\times T_Q^*Q_2$ 上的闭的 1-形式. 由闭的 1-形式

$d(S^4(p,P)+q^ip_i-Q^iP_i):T_q^*Q_1\times T_Q^*Q_2\to T^*(Q_1\times Q_2)$
生成的 Lagrange 子流形 Γ_4

$$\Gamma_4:=\{((p,P),d(S^4(p,P)+q^ip_i-Q^iP_i)) \mid (p,P)\in T_q^*Q_1\times T_Q^*Q_2\} \tag{26}$$

Lagrange 子流形 Γ_4 也可以表示为

$$\Gamma_4:=\{(p,P),((\partial S^4/\partial p_i+q^i)dp_i, (\partial S^4/\partial P_i-Q^i)dP_i, p_idq^i, -P_idQ^i) \mid (p,P)\in T_q^*Q_1\times T_Q^*Q_2\}$$

Lagrange 子流形 Γ_4 对应的扭曲 Lagrange 子流形为

$$\Gamma_4^\tau:=\{(p,P),(\partial S^4/\partial p_i+q^i)dp_i, (-\partial S^4/\partial P_i+Q^i)dP_i,(p_idq^i,-P_idQ^i) \mid (p,P)\in T_q^*Q_1\times T_Q^*Q_2\}$$

显然

$$\begin{cases} q^i=-\dfrac{\partial S^4}{\partial p_i} \\ Q^i=\dfrac{\partial S^4}{\partial P_i} \end{cases} \tag{27}$$

则与 Lagrange 子流形 Γ_4^τ 对应的辛同胚映射,也就是由 Lagrange 子流形 $T_q^*Q_1\times T_Q^*Q_2$ 上的光滑函数 $S^4(p,P)$ 生成的正则变换为:

$$\varphi:T^*Q_1\to T^*Q_2,\text{即 }\varphi:(q,p)\mapsto(Q,P)$$

所以,分别由式(27)的第一式和第二式可得

$$P_i=\varphi_1(q^i,p_i),\ Q^i=\varphi_2(q^i,p_i)$$

也就可以得到

$$\varphi(q^i,p_i)=(\varphi_2(q^i,p_i),\varphi_1(q^i,p_i)) \tag{28}$$

Lagrange 子流形 $T_q^*Q_1\times T_Q^*Q_2$ 上的光滑函数 $S^4(p,P)$ 也被称为生成第四类正则变换的母函数(也称第四类生成函数).

2.3 Lagrange 子流形在 Legendre 变换中的应用

勒让德变换及其逆变换是分析力学中的重要理论,它主要应用于 Lagrange 方程和 Hamilton 方程之间的相互转化. 如果勒让德变换 $FL:TQ\to T^*Q$ 是局部微分同胚映射,则称 Lagrange 函数 L 是正则的,也称正则的勒让德变换,它能实现切丛 TQ 的辛结构和余切丛 T^*Q 的辛结构之间的辛同构. 进一步要求勒让德变换 $FL:TQ\to T^*Q$ 是整体的微分同胚映射,则称 Lagrange 函数 L 是超正则的,也称为超正则的勒让德变换,它能实现切丛 TQ 和余切丛 T^*Q 的微分同胚. 利用辛流形的 Lagrange 子流形理论还可以给出勒让德变换的几何解释.

如果令 $T_qQ=X_1$, $T_q^*Q=X_2$,则积流形 $X_1\times X_2$ 的余切丛为 $T^*(X_1\times X_2)$. 设积流形 $X_1\times X_2$ 上的函数 $\forall f(\dot q,p)\in C^\infty(X_1\times X_2)$,则

$$df:X_1\times X_2\to T^*(X_1\times X_2) \tag{29}$$

由映射(29)生成余切丛 $T^*(X_1\times X_2)$ 的 Lagrange 子流形

$$\Gamma_f:=\{((\dot q,p),(df(\dot q,p))) \mid (\dot q,p)\in X_1\times X_2\} \tag{30}$$

余切丛 $T^*(X_1\times X_2)$ 的 Lagrange 子流形 Γ_f 也可以表示为

$$\Gamma_f:=\left\{\left(\dot q,p,\frac{\partial f}{\partial \dot q}d\dot q,\frac{\partial f}{\partial p}dp\right) \mid (\dot q,p)\in X_1\times X_2\right\} \tag{31}$$

Lagrange 子流形 Γ_f 对应的扭曲 Lagrange 子流形为

$$\Gamma_f^\tau:=\left\{\left(\dot q,p,\frac{\partial f}{\partial \dot q}d\dot q,-\frac{\partial f}{\partial p}dp\right) \mid (\dot q,p)\in X_1\times X_2\right\} \tag{32}$$

显然

$$\begin{cases} \xi_i=\dfrac{\partial f}{\partial \dot q^i} \\ \eta^i=-\dfrac{\partial f}{\partial p_i} \end{cases} \tag{33}$$

通过求解方程组(33)式就可以得到辛同胚映射,即勒让德变换

$$FL(\dot q^i,\xi_i)=(p_i,\eta^i)=\varphi(\dot q^i,\xi_i) =(\varphi_1(q^i,p_i),\varphi_2(q^i,p_i)) \tag{34}$$

若积流形 $X_1\times X_2$ 上的函数 $f=\dot q^ip_i-L(\dot q)$,从(33)式的第一式可以得到

$$p_i=\frac{\partial L}{\partial \dot q^i}+\xi_i \tag{35}$$

如果 Lagrange 函数为 $L(\dot q)$,则(35)式退化为

$$p_i=\frac{\partial L}{\partial \dot q^i} \tag{36}$$

从(36)式可以求出

$$\dot q^i=\dot q^i(p_i) \tag{37}$$

把(37)式代入 $f=\dot q^ip_i-L(\dot q)$ 可得

$$H(p)=\dot q^ip_i-L(\dot q) \tag{38}$$

同理,如果令 $f=\dot q^ip_i-H(p)$,可得勒让德逆变换

$$\dot q^i=\frac{\partial H}{\partial p_i},\ L(\dot q)=p_i\dot q^i-H(p) \tag{39}$$

3 结论

由于 Hamilton 系统的正则变换和 Lagrange 方程与 Hamilton 方程之间的勒让德变换都是辛同胚映射,因此,借助于辛流形的拉格朗日子流形就可以给出正则变换和勒让德变换理论统一的几何解释.利用辛流形的拉格朗日子流形理论可以从几何上阐述清楚约束力学系统的 Lagrange 动力学、Hamilton 动力学和 Hamilton-Jacobi 动力学之间的关系. 并且根据 Hamilton-Jacobi 动力学的拉格朗日子流形几何结构这一本质几何特征,可以实现非保守约束系统和非完整约束系统的广义 Hamilton-Jacobi 理论,并将其应用于非保守约束系统和非完整约束系统的动力学问题研究.

参考文献

1 梅凤翔,刘端,罗勇. 高等分析力学. 北京:北京理工大学出版社, 1991 (Mei F X, Liu D, Luo Y. Advanced analytical mechanics. Beijing: Beijing Institute of Technology Press, 1991 (in Chinese))

2 陈滨. 分析动力学(2 版). 北京:北京大学出版社, 2012 (Chen B. Analytical dynamics(2th ed.). Beijing: Peking University Press, 2012 (in Chinese))

3 Godstein H, Poole C, Safko J. Classical mechanics(3rd ed.). New York: Addison Wesley, 2000

4 Jose J V, Saletan E J. Classical dynamics: A contemporary approach. Cambridge: Cambridge University Press, 1998

5 Abraham R, Marsden J E. Foundations of mechanics. London: The Benjamin/Cummings Publishing Company Inc, 1978

6 de León M, Rodrigues P R. Methods of differential geometry and analytical mechanics. North-Holland: Elsevier Science Publishers Press, 1989

7 Guo Y X, Liu S X, Liu C, et al. Influence of nonholonomic constraints to variations, symplectic structure and dynamics of mechanical systems. *Journal of Mathematical Physics*, 2007,48(8):082901

8 de León M, Marrero J C, Martín de Diego D. Linear almost poisson structures and hamilton-jacobi equation. Applications to Nonholonomic Mechanic. *Journal of Geometric Mechanics*, 2010,2(2):159~198

9 Neimark Ju I, Fufaev N A. Dynamics of nonholonomic systems. Providence: American Mathematical Society, 1972

10 Bloch A M, Baillieul J, Crouch P, et al. Nonholonomic mechanics and control. London: Springer, 2003

11 Vershik A M, Faddeev L D. Differential geometry and lagrangian mechanics with constraints. *Soviet Physics Doklady*, 1972,17(1):34~36

12 Guo Y X, Liu S X, Liu C, et al. Dynamics of nonholonomic systems from variational principles. *Physics Letters A*, 2009,373:3915~3919

13 刘畅,宋端,刘世兴,等. 非齐次 Hamilton 系统的 Birkhoff 表示. 中国科学 G:物理学 力学 天文学, 2013, 43:541~548 (Liu C, Song D, Liu S X, et al. Birkhoffian representation of non-homogenous hamiltonian systems. *Scientia Sinica-Physica Mechanica & Astronomica*, 2013, 43:541~548 (in Chinese))

14 Liu C, Liu S X, Guo Y X. Inverse Problem for chaplygin's nonholonomic systems. *Science China Technological Sciences*, 2011,54(8):2100~2106

15 宋端,刘世兴. Birkhoff 意义下 Hojman-Urrutia 方程的离散变分计算. 动力学与控制学报, 2013,11(3):199~202 (Song D, Liu S X. Discrete variational calculation of Hojman-Urrutia equation in the Birkhoffian sense. *Journal of Dynamics and Control*, 2013,11(3):199~202 (in Chinese))

16 李娜,刘世兴,刘畅. Birkhoff 框架下 Whittaker 方程的离散变分算法. 动力学与控制学报, 2015,13(4):246~249 (Li N, Liu S X, Liu C. Discrete variational calculation of Whittaker equation in the Birkhoffian framework. *Journal of Dynamics and Control*, 2015,13(4):246~249 (in Chinese))

17 Landau L D, Lifshitz E M. Mechanics (3rd ed.). New York:Pergammon Press. Translated by Sykes J B and Bell J S, 1976

18 Feynman R P, Hibbs A R. Quantum mechanics and path integrals. New York:McGraw Hill, 1965

19 Johns O. Analytical mechanics for relativity and quantum mechanics. Oxford:Oxford University Press, 2005

20 Weinberg S. The quantum theory of fields. Cambridge: Cambridge University Press, 1995

21 朱位秋, 非线性随机动力学与控制: Hamilton 理论体系框架. 北京:科学出版社, 2003 (Zhu W Q. Nonlinear stochastic dynamics and control: the framework Hamilton's theory. Beijing: Science Press, 2003 (in Chinese))

22 钟万勰. 应用力学的辛数学方法. 北京:高等教育出版

社, 2006 (Zhong W X. Symplectic method of applied mechanics. Beijing: Higher Education Press, 2006 (in Chinese))

23 冯康,秦孟兆. 哈密尔顿系统的辛几何算法. 杭州:浙江科技出版社, 2003 (Feng K, Qin M Z. Sympplectic geometric algorithms for Hamiltonian systems. Hangzhou: Zhejiang Science and Technology Press, 2003 (in Chinese))

24 Weinstein A. Symplectic geometry. *Bulletin of the American Mathematical Socity*, 1981,5(1):1~13

25 Weinstein A. Symplectic manifolds and their Lagrangian submanifolds. *Advances in Mathematics*, 1971,6(3):329~346

APPLICATION OF LAGRANGE SUBMANIFOLD THEORY IN THE CANONICAL TRANSFORMATION AND LEGENDRE TRANSFORMATION OF CONSTRAINED MECHANICAL SYSTEMS *

Liu Chang[1,2†]　Wang Cong[1]　Liu Shixing[1]　Guo Yongxin[1]

(1.*College of Physics Liaoning University*, *Shenyang* 110036, *China*)

(2.*State Key Laboratory of Structural Analysis for Industrial Equipment*, *Dalian University of Technology*, *Dalian* 116024, *China*)

Abstract Both the Legendre transformation between Lagrange's equations and Hamilton's equations and the canonical transformation theory of Hamilton's equations play an important role in analytical mechanics. There seems to be no relationship between them from a local perspective. In this paper, based on the Lagrangian submanifold theory of symplectic manifold, the unified geometric interpretation of the canonical transformation theory and the Legendre transformation theory was given globally. Then, by utilizing geometric mechanics, the geometric structure of the canonical transformation for a Hamilton system and the geometric Legendre transformation between Lagrange's equations and Hamilton's equations were clearly described.

Key words constrained mechanical systems, Lagrangian submanifold, symplectic manifold, canonical transformation, Legendre transformation

Received 19 September 2018, revised 4 April 2019.

* The project supported by the National Natural Science Foundation of China (11772144, 11572145, 11472124).

† Corresponding author E-mail: changliu@ lnu.edu.cn