第 17 卷第 5 期 2019 年 10 月
1672-6553/2019/17(5)/432-7

动 力 学 与 控 制 学 报
JOURNAL OF DYNAMICS AND CONTROL

Vol.17 No.5
Oct. 2019

分数阶动力学的分析力学方法及其应用

罗绍凯†

(浙江理工大学 数学力学与数学物理研究所,杭州 310018)

摘要 综述我们在分数阶动力学分析力学方法的研究进展,包括:分数阶动力学系统的分析力学表示,构造分数阶动力学模型的分析力学方法,构造分数阶动力学模型团簇的分析力学方法,三类分数阶 Lie 群无限小变换方法,分数阶动力学系统的对称性、对称性摄动和共形不变性的分析力学方法,分数阶动力学系统的代数结构与 Poisson 积分的分析力学方法,构造分数阶动力学系统积分不变量的分析力学方法,分数阶动力学系统梯度表示的分析力学方法,分数阶动力学系统稳定性的分析力学方法,分数阶微分方程的分析力学方法等,介绍了对于物理学、力学、生物学、非线性科学等领域的 10 多种分数阶动力学模型的应用,并指出了若干进一步研究的问题.

关键词 分数阶动力学, 分析力学, 分数阶动力学模型团簇, 分数阶 Lie 变换, 对称性, 对称性摄动, 共形不变性, 代数结构, Poisson 积分, 积分不变量, 梯度表示, 稳定性

DOI: 10.6052/1672-6553-2019-063

引言

分数阶动力学的理论与方法可以更为真实地描述自然现象,而且能够更为深刻地揭示动力学系统的内在性质与动力学行为,从而成为国际学术界的热门课题.分析力学给出了一整套简洁、优美、规范的分析和处理动力学问题的理论与方法,230 年来,不但一直在伴随时代的步伐与时俱进,而且在科学与工程中发挥着基础支撑作用.2010 年以来,我们提出了分数阶动力学的分析力学方法,构建了完整的理论体系框架.本文概述这一工作的研究进展.

1 构造分数阶动力学模型的分析力学方法

长期以来,大量的分数阶微分方程是人们基于整数阶微分方程直接用手写出来的! 能否给出建立分数阶动力学系统运动微分方程的一般方法呢? 这是构造分数阶动力学模型的具有基本意义的工作,也是长期以来困扰国际学术界的一个难题.在整数阶动力学的层面上,200 多年来,伴随时代的步伐,分析力学相继给出了构造动力学模型的 Lagrange、Hamilton、广义 Hamilton、Nambu、Birkhoff 方法,这些具有基本意义的方法能否用于、怎样用于处理分数阶动力学问题呢? 基于分析力学方法,能否提出并给出建立分数阶动力学系统运动微分方程的普适性方法呢?

2010 年以来,我们探索并初步解决了这一基本的、重要的和有趣的问题!

在分数阶动力学的层面上,基于不同分数阶算子的定义,文献[1-21]提出并建立了分数阶广义 Hamilton 力学[1-15]、分数阶 Nambu 力学[15,16]、分数阶 Birkhoff 力学[17-21]、含有完整动力学信息的分数阶 Hamilton 力学[3,12,16]和含有完整动力学信息的分数阶 Lagrange 力学[15,16];同时,揭示了上述五类不同分数阶动力学系统之间的内在联系和转换条件[1,10,12,16-21],给出了退化到相应的整数阶动力学系统的退化条件.

尤其是,在文献[1-21]和研究生学位论文中,基于上述五大类分数阶动力学系统的分析力学表示,分别给出了构造分数阶动力学模型的基本方法,这些基本方法包括构造分数阶动力学模型的分数阶 Lagrange、Hamilton、广义 Hamilton、Nambu 或 Birkhoff 方法;进而,作为新方法的应用,构造了涉及物理学、力学、非线性科学、生物学等领域的 14

2018-09-10 收到第 1 稿,2019-04-09 收到修改稿.
† 通讯作者 E-mail:mmmplsk@163.com

种分数阶动力学模型,分别探索了这些模型的内在性质与动力学行为.

2　构造分数阶动力学模型团簇的分析力学方法

对于一个给定的动力学系统,分数阶或非线性问题客观存在着复杂性和不确定性.长期以来,这类不确定性一直是主要体现在求解动力学系统微分方程的过程中,在建立分数阶动力学系统运动微分方程的过程中,如何体现和定量化描述这种不确定性呢?

这是一个揭示分数阶问题不确定性的具有基本意义的工作,也是一个长期困扰国际学术界的难题.

基于我们建立的分数阶动力学系统的分数阶 Lagrange、Hamilton、广义 Hamilton、Nambu 或 Birkhoff 方程,在构造实际问题的分数阶动力学模型过程中,我们发现,分数阶问题的不确定性必然导致建立分数阶动力学模型的不确定性! 对于一个给定的动力学问题,动力学函数确定后,在动力学方程中还存在着一个有待确定的任意函数,这种不确定性将会导致一个分数阶动力学模型团簇[3,14];进而,揭示了分数阶动力学问题的不确定性及其数学表示,给出了构造分数阶动力学模型团簇的一般方法[3,14,16-20].值得指出的是,对于一个给定的动力学问题,只有在一个特定的条件下,才能够构造出与整数阶动力学模型的形式相对应的分数阶动力学模型[1-21];基于原来的整数阶模型,构造出的其余诸多分数阶模型,只好称为扩展的分数阶动力学模型[3].

作为构造分数阶动力学模型团簇一般方法的应用,分别构造了分数阶相对论 Lorentz-Dirac 模型团簇、分数阶 Lotka-Volterra 模型团簇分数阶 Henon-Heiles 模型团簇[3].

3　三类基本的分数阶 Lie 群无限小变换方法

在整数阶动力学的框架中,Lie 群的无限小变换是研究对称性、对称性摄动、共形不变性、非线性分析等一系列问题的非常重要的基础支撑.在分数阶动力学的框架中,探索分数阶的 Lie 群的无限小变换是一个具有基本意义的、重要的和有趣的问题!

鉴于分数阶 Lie 群的无限小变换在国际上还没有形成系统而又完整的理论与方法,近年来,为了探索分数阶动力学系统的对称性的需要,我们相继提出了三类基本的分数阶 Lie 群的无限小变换方法.

第一类分数阶 Lie 群的无限小变换:在文献[5]中,我们构造了一个以时间 t 和分数阶变量为独立变量的 $\alpha-1$ 阶导数空间,在此空间中,探索了分数阶的 Lie 群的无限小变换,给出了分数阶无限小生成元向量和生成元函数的递推公式;同时,在研究生的学位论文中,我们探索了受扰的第一类分数阶 Lie 群的无限小变换,给出了受扰的分数阶无限小生成元向量和生成元函数的扩展公式.进而,我们以定义与定理的形式提出了第一类分数阶 Lie 群的无限小变换方法,基于这类变换,研究了分数阶的 Lie 对称性问题.

第二类分数阶 Lie 群的无限小变换:在以时间 t 和整数阶变量为独立变量的空间中,国际上一些学者探讨了分数阶 Lie 群的无限小变换,但是,他们给出的分数阶无限小生成元向量和生成元递推公式繁琐冗长、表达不一或相互矛盾,没有形成系统而又完整的理论.文献[7,8,18,19]在以时间 t 和整数阶变量为独立变量的空间中,在前人工作的基础上,提出了更具一般意义的、含有对整数阶变量变换的任意次扩展和整数阶变量变换分数阶扩展的 Lie 群的无限小变换,给出了分数阶无限小生成元向量,证明了相应的生成元函数的递推公式;同时,我们探索了受扰的第二类分数阶 Lie 群的无限小变换,给出了受扰的分数阶无限小生成元向量和生成元函数的扩展公式.进而,我们以定义与定理的形式提出了第二类分数阶 Lie 群的无限小变换方法,基于这类变换,研究了分数阶的 Lie 对称性、Mei 对称性、对称性摄动和分数阶的共形不变性.

第三类分数阶 Lie 群的无限小变换:最近,在我的研究生的学位论文和将要发表的文献中,考虑到分数阶导数的定义与运算规则不同于整数阶导数,我们提出并构造了一个含有时间 t、整数阶变量和分数阶变量的耦合空间,在此空间中,提出了含有对整数阶变量变换的任意次扩展,并含有对分数阶变量变换的一次扩展、二次扩展乃至任意次扩展的 Lie 群的无限小变换,给出了分数阶无限小生成

元向量,证明了相应的生成元函数的递推公式;同时,探索了受扰的第三类分数阶 Lie 群的无限小变换,给出了受扰的分数阶无限小生成元向量和生成元函数的扩展公式.进而,我们以定义与定理的形式提出了第三类分数阶 Lie 群的无限小变换方法,基于这类变换,研究了分数阶的 Lie 对称性、Mei 对称性、对称性摄动和分数阶的共形不变性.

而且,我们也探索了上述三类分数阶 Lie 群无限小变换之间的关系.

基于上述三类分数阶 Lie 群的无限小变换,科学家们都可以用分析或数值的方法探索分数阶动力学系统的 Noether 对称性、Lie 对称性、Mei 对称性、各类对称性摄动、共形不变性、非线性分析等.

4 分数阶动力学系统对称性的分析力学方法

对称性原理是现代科学中一个更高层次的法则.在整数阶动力学的框架中,对称性原理在现代物理学、数学、力学、非线性科学、生命科学和工程中都扮演者重要角色,它为解决复杂的科学问题提供了一类具有极其重要理论与实际意义的现代化手段.鉴于分数阶动力学问题的复杂性,探索与建立分数阶动力学系统的对称性方法,是一个非常重要而有趣的科学问题!

对于一个可以转化为分数阶 Lagrange、Hamilton、广义 Hamilton、Nambu 或 Birkhoff 表示的动力学系统,在分数阶 Lie 群的无限小变换下,能否给出、怎样给出分数阶动力学系统对称性的定义和确定方程呢?如何找到被分数阶的对称性直接导致的守恒量呢?

在第一类分数阶 Lie 变换下,文献[5]探索了分数阶广义 Hamilton 系统的 Lie 对称性的基本理论与方法,给出了定义与确定方程,发现一个分数阶 Lie 对称性的基本变量关系,找到了分数阶 Lie 对称性直接导致的守恒量,并应用于分数阶 Duffing 振子和分数阶 Lotka 生化振子.在我们的研究生学位论文中,系统全面地揭示了上述五大类分数阶的分析力学表示下的 Lie 对称性方法,分别找到了分数阶 Lie 对称性直接导致的守恒量,并应用于 10 多种分数阶动力学模型.

在第二类分数阶 Lie 变换下,文献[6,7,18]分别探索了分数阶广义 Hamilton 系统、分数阶 Birkhoff 系统 Mei 对称性的基本理论与方法,给出了定义与确定方程,找到了分数阶 Mei 对称性直接导致的守恒量,并应用于分数阶广义相对论 Buchduhl 模型、分数阶三体问题模型、分数阶 Robbins-Lorenz 模型、分数阶 Hojman-Urrutia 模型、分数阶 Duffing 振子模型、分数阶 Lotka 生化振子模型.在研究生学位论文和将发表的文献中,我们系统全面地揭示了上述五大类分数阶的分析力学表示下的 Mei 对称性方法和 Lie 对称性方法,分别找到了分数阶 Mei 对称性和 Lie 对称性直接导致的守恒量,并应用于 10 多种分数阶动力学模型.

在第三类分数阶 Lie 变换下,最近,在研究生学位论文和将发表的文献中,我们系统全面地揭示了上述五大类分数阶的分析力学表示下的 Mei 对称性方法和 Lie 对称性方法,分别找到了分数阶 Mei 对称性和 Lie 对称性直接导致的守恒量,并应用于 10 多种分数阶动力学模型.

这一工作,揭示了分数阶动力学系统的内在结构与动力学行为之间的潜在联系.

5 分数阶动力学系统对称性摄动的分析力学方法

在一个小扰动的作用下,动力学系统的对称性和守恒量随之发生缓慢的变化,进而导致对称性摄动和绝热不变量.对于一个可以转化为分数阶 Lagrange、Hamilton、广义 Hamilton、Nambu 或 Birkhoff 表示的动力学系统,在受扰的分数阶 Lie 群无限小变换下,能否给出、怎样给出分数阶动力学系统对称性摄动的定义和确定方程呢?如何找到分数阶的对称性摄动直接导致的绝热不变量呢?

在第二类受扰的分数阶 Lie 变换下,文献[7,18]分别探索了分数阶广义 Hamilton 系统、分数阶 Birkhoff 系统 Mei 对称性摄动的基本理论与方法,研究了受扰的分数阶 Lie 群变换,揭示了受扰分数阶 Lie 变换的无限小生成元向量,证明了受扰无限小生成元函数的整数阶高次扩展和分数阶扩展的展开式,给出了分数阶 Mei 对称性摄动的定义与确定方程,找到分数阶的对称性摄动直接导致的绝热不变量,并应用于受扰的分数阶 Duffing 振子模型、受扰的分数阶 Lotka 生化振子模型、受扰的分数阶广义相对论 Buchduhl 模型、受扰的分数阶 Emden 模型等.

在第三类受扰的分数阶 Lie 变换下,最近,在

研究生学位论文和将发表的文献中,我们系统全面地揭示了上述五大类分数阶的分析力学表示下的 Mei 对称性摄动和 Lie 对称性摄动方法,分别找到分数阶的对称性摄动直接导致的绝热不变量,并应用于 10 多种分数阶动力学模型.

这一工作,揭示了小扰动对分数阶动力学系统内在结构产生的影响,从而导致动力学行为的缓慢改变,亦即揭示了小扰动、内在结构、动力学行为三者之间的潜在联系.

6　分数阶动力学系统共形不变性的分析力学方法

在整数阶动力学框架中,动力学系统的共形变换和共形不变性在物理学、数学、力学、非线性科学中发挥着重要作用.对于一个可以转化为分数阶 Lagrange、Hamilton、广义 Hamilton、Nambu 或 Birkhoff 表示的动力学系统,在分数阶 Lie 群无限小变换下,能否给出、怎样给出分数阶动力学系统共形不变性的定义和确定方程呢? 如何找到分数阶的共形不变性导致的守恒量呢?

在第二类分数阶 Lie 变换下,文献[8,19]给出了分数阶动力学系统的共形不变性的基本理论与方法,给出了分数阶动力学系统共形不变性的定义与确定方程,揭示了分数阶共形不变性与 Mei 对称性、Lie 对称性的关系,找到了分数阶共形不变性导致的守恒量,并应用于分数阶广义相对论 Buchduhl 模型、分数阶 Duffing 振子模型、分数阶 Lotka 生化振子模型、分数阶 Hojman-Urrutia 模型.

值得指出,在第三类分数阶 Lie 群的无限小变换下,对于可以转化为分数阶 Lagrange、Hamilton、广义 Hamilton、Nambu 或 Birkhoff 表示的动力学系统,在研究生学位论文和将发表的文献中,我们全面探索了分数阶的共形不变性、分数阶的共形不变性与 Mei 对称性、分数阶的共形不变性与 Lie 对称性,分别找到了分数阶共形不变性导致的守恒量,研究了对 10 多个分数阶动力学模型的应用.

7　分数阶动力学系统代数结构与 Poisson 积分的分析力学方法

如果一个动力学系统具有相容代数结构和 Lie 代数结构,那么系统存在 Poisson 积分.对于一个可以转化为分数阶 Lagrange、Hamilton、广义 Hamilton、Nambu 或 Birkhoff 表示的动力学系统,这一理论与方法能否用于分数阶动力学系统呢?

文献[1,9,13,14]回答了这一问题,探索了分数阶动力学系统的代数结构,发现分数阶广义 Hamilton 系统、分数阶 Hamilton 系统、分数阶 Birkhoff 系统具有相容代数结构和 Lie 代数结构,给出了 Poisson 积分存在的条件与形式,并应用于分数阶相对论 Lorentz-Dirac 模型、分数阶相对论 Yamaleev 振子模型、分数阶 Henon-Heiles 模型、分数阶 Euler-Poinsot 模型、分数阶三物种群的 Volterra 模型.进而,在研究生的学位论文中,发现分数阶 Nambu 系统具有相容代数结构和 Lie 代数结构, Poisson 积分方法也可以用于分数阶 Nambu 系统.

这一工作,揭示了分数阶动力学系统的内在结构与动力学行为之间的潜在联系.

8　构造分数阶动力学系统积分不变量的分析力学方法

动力学系统的积分不变量在现代数学、力学、物理学和工程中扮演着重要角色. Whittaker 曾指出,利用一个第一积分可以构造系统的积分不变量,一个多世纪以来,这一方法被广泛的应用.

对于一个可以转化为分数阶 Lagrange、Hamilton、广义 Hamilton、Nambu 或 Birkhoff 表示的动力学系统, Whittaker 构造积分不变量的方法能否用于、怎样用于分数阶动力学问题呢?

文献[2,13,14]回答并解决了这一问题,对于一个可以转化为分数阶广义 Hamilton 表示的动力学系统,提供了利用分数阶动力学系统的第一积分构造积分不变量的基本方法,并应用于分数阶 Euler-Poinsot 模型、分数阶相对论 Lorentz-Dirac 模型和分数阶相对论 Yamaleev 振子模型;作为构造分数阶广义 Hamilton 系统积分不变量的推论,分别给出了构造分数阶 Hamilton 系统、分数阶 Lagrange 系统积分不变量的方法.进而,在研究生的学位论文中,这一方法被拓展到分数阶 Birkhoff 系统和分数阶 Nambu 系统.

9　分数阶动力学系统梯度表示的分析力学方法

微分方程的梯度表示对于研究系统的动力学行为有着重要意义,如果一个动力学系统可以表示

为梯度系统,那么可以得到势函数,利用势函数可以进一步研究系统的动力学特性.在整数阶动力学层面上,梅凤翔先生对于分析力学各类方程的梯度表示开展了深入、系统而又全面的研究,构建了完整的理论体系框架.

对于一个可以转化为分数阶 Lagrange、Hamilton、广义 Hamilton、Nambu 或 Birkhoff 表示的动力学系统,能否把分数阶动力学系统转换为梯度表示呢?能否利用势函数研究分数阶系统的稳定性问题呢?

文献[4,10,13,14,20]分别给出了分数阶广义 Hamilton 系统、分数阶 Hamilton 系统、分数阶 Birkhoff 系统是一阶梯度系统、二阶梯度系统的条件与形式,利用势函数探索了分数阶动力学模型的稳定性问题.

10 分数阶动力学系统稳定性的分析力学方法

动力学系统的稳定性,是科学与工程各个领域普遍存在的重要问题.

基于动力学系统的分数阶 Lagrange、Hamilton、广义 Hamilton、Nambu 或 Birkhoff 表示,如何给出分数阶动力学系统稳定性的基本理论与方法呢?

文献[10-14,20,21]探索了分数阶广义 Hamilton 系统和分数阶 Birkhoff 系统的平衡稳定性[11,20]、运动稳定性[10]、平衡状态流形的稳定性[12-14,21],给出了分数阶动力学系统稳定性的基本理论与方法,并应用于分数阶相对论 Lorentz-Dirac 模型、分数阶相对论 Yamaleev 振子模型、分数阶 Henon-Heiles 模型、分数阶 Hojman-Urrutia 模型、分数阶 Duffing 振子模型、分数阶 Emden 模型、分数阶 Whittaker 模型、分数阶 Euler-Poinsot 模型、分数阶 Robbins-Lorenz 模型.进而,在研究生的学位论文中,全面探索了分数阶 Lagrange、Hamilton、广义 Hamilton、Nambu 和 Birkhoff 系统的平衡稳定性、运动稳定性和平衡状态流形的稳定性,分别给出了五大类分数阶的分析力学表示下稳定性的基本理论与方法,并应用于 10 多个分数阶动力学模型的稳定性问题.

11 分数阶微分方程的分析力学方法

在整数阶微积分的框架中,梅凤翔提出并建立了微分方程的分析力学方法,对于一个给定的微分方程,如果可以全部或部分地转化为分析力学表示,那么,可以用分析力学的方法探索其内在性质与动力学行为.

传承这一思想,我们提出了分数阶微分方程的分析力学方法.对于一个给定的分数阶微分方程,如果通过构造动力学函数可以转化为分数阶 Lagrange、Hamilton、广义 Hamilton、Nambu 或 Birkhoff 表示,那么可以用分数阶分析力学的方法探索其内在性质与动力学行为.实际上,我们上述的研究工作大多可以归属于这一类.

进一步,我们提出了第二类分数阶微分方程的分析力学方法.对于一个抽象的分数阶微分方程,直接研究它的内在性质和动力学行为;然后,我们不去构造动力学函数,而是直接探究分数阶 Lagrange、Hamilton、广义 Hamilton、Nambu 或 Birkhoff 表示能否纳入、在什么条件下可以纳入这个抽象的分数阶微分方程;显然,这个分数阶微分方程的内在性质和动力学行为,自然适用于能够纳入分数阶微分方程的分析力学表示,利用转换条件就可以直接得到分数阶分析力学表示下的内在性质和动力学行为.例如:在文献[15]中,对于一个抽象的分数阶微分方程,我们提出并建立了分数阶 Jacobi 最终乘子方法,包括构造分数阶 Jacobi 最终乘子,找到该乘子的确定方程和三个重要性质,提出寻找分数阶微分方程守恒量的三个分数阶 Jacobi 最终乘子定理,进而研究了分数阶微分方程的 Jacobi 最终乘子与分数阶 Lie 对称性之间的关系.然后,我们分别找到了分数阶 Lagrange、Hamilton、广义 Hamilton、Nambu 或 Birkhoff 系统可以纳入抽象分数阶微分方程的条件,从而表明,分数阶微分方程的分数阶 Jacobi 最终乘子方法,自然适用于五大类的分数阶分析力学表示.作为分数阶 Jacobi 最终乘子方法的应用,分别找到了分数阶广义相对论 Buchduhl 模型、分数阶 Euler-Poinsot 模型和分数阶 Duffing 振子模型的守恒量.进而,在研究生学位论文中,分别探索了分数阶微分方程 Lie 对称性和 Mei 对称性的分析力学方法.

12 含有附加项的分数阶动力学的分析力学方法

在整数阶动力学层面上,梅凤翔先生提出含有附加项的分析力学方法,构建了完整的体系框架.

传承这一思想,在分数阶动力学层面上,我们提出了含有附加项的分数阶分析力学方法.在建立文献[1-21]的分数阶 Lagrange、Hamilton、广义 Hamilton、Nambu 或 Birkhoff 方程的过程中,添加一个含有时间 t、整数阶变量和分数阶变量的附加项,可以得到含有附加项的分数阶 Lagrange、Hamilton、广义 Hamilton、Nambu 或 Birkhoff 方程.对于给定的动力学系统,如果只能部分转换为分数阶分析力学表示,其余部分可以放在附加项中,这就能够构造更多复杂系统的分数阶动力学模型,如变质量系统、相对运动系统、可控动力学系统、耗散系统、随机系统等等,进而用分数阶分析力学的方法探索其内在性质和动力学行为.基于这种方法,选取不同的附加项,我们构造了七类不同的分数阶 Duffing 振子模型、三类不同的分数阶 Van der Pol 振子模型和二类不同的分数阶 Euler 动力学模型.分数阶附加项的引入,大大拓展了分数阶动力学分析力学方法的应用范畴,其中有大量的工作值得去做.

13　结语

综上所述,我们提出了分数阶动力学的分析力学方法,构建了较为完整的理论体系框架,提供了分数阶动力学的基本理论与方法,探索了在科学与工程问题中的应用.在此基础上,仍有诸多相关的工作有待于进一步探索:

1)基于构造分数阶动力学模型的分析力学方法,构造科学与工程中更多动力学问题的分数阶模型,用分析与数值的方法探究其内在性质与动力学行为.

2)基于构造分数阶动力学模型团簇的分析力学方法,找到更多的分数阶动力学模型团簇,探索团簇中各个模型之间的内在联系,探索团簇中各个模型共有的整体性质和动力学行为.

3)应用三类基本的分数阶 Lie 群的无限小变换方法,研究科学与工程中各类相关的问题.

4)基于分数阶动力学系统对称性、对称性摄动、共形不变性、代数结构与 Poisson 积分、积分不变量的构造、梯度表示、稳定性的分析力学方法,应用分析与数值的方法,探索科学与工程大量动力学问题的内在性质与动力学行为.

5)把分析力学的其它积分方法纳入分数阶动力学的分析力学框架.

6)利用分数阶动力学的分析力学方法,探索分数阶微分方程的积分问题.

希望分数阶动力学的分析力学方法能够在科学与工程中发挥应有的作用,愿分数阶动力学的分析力学方法伴随时代的步伐与时俱进.

参　考　文　献

1　Luo S K, Li L. Fractional generalized Hamiltonian mechanics and Poisson conservation law in terms of combined Riesz derivatives. *Nonlinear Dynamics*, 2013,73(1-2):639~647

2　Luo S K, Li L. Fractional generalized Hamiltonian equations and its integral invariants. *Nonlinear Dynamics*, 2013,73(1-2):339~346

3　Luo S K, Zhang X T, He J M, et al. On the families of fractional dynamical models. *Acta Mechanica*, 2017,228(11):3741~3754

4　Li L, Luo S K. Fractional generalized Hamiltonian mechanics. *Acta Mechanica*, 2013,224(8):1757~1771

5　Zhang X T, He J M, Luo S K. A new type of fractional Lie symmetrical method and its applications. *International Journal of Theoretical Physics*, 2017,56(3):971~990

6　Luo S K, Dai Y, Zhang X T, et al. A new method of fractional dynamics, i.e., fractional Mei symmetrical method for finding conserved quantity, and its applications to physics. *International Journal of Theoretical Physics*, 2016,55(10):4298~4309

7　Luo S K, Yang M J, Zhang X T, et al. Basic theory of fractional Mei symmetrical perturbation and its applications. *Acta Mechanica*, 2018,229(4):1833~1848

8　Luo S K, Dai Y, Yang M J, et al. Basic theory of fractional conformal invariance of Mei symmetry and its applications to physics. *International Journal of Theoretical Physics*, 2018,57(4):1024~1038

9　Luo S K, Li L, Xu Y L. Lie algebraic structure and generalized Poisson conservation law for fractional generalized Hamiltonian systems. *Acta Mechanica*, 2014,225(9):2653~2666

10　Luo S K, He J M, Xu Y L. A new method of dynamical stability, i.e. fractional generalized Hamiltonian method, and its applications. *Applied Mathematics and Computation*, 2015,269(10):77~86

11　Luo S K, He J M, Xu Y L,et al. Fractional generalized Hamilton method for equilibrium stability of dynamical systems. *Applied Mathematics Letters*, 2016,60(10):14~20

12 Xu Y L, Luo S K. Stability for manifolds of equilibrium states of fractional generalized Hamiltonian systems. *Nonlinear Dynamics*, 2014,76(1):657~672

13 Luo S K, Xu Y L. Fractional Lorentz-Dirac model and its dynamical behaviors. *International Journal of Theoretical Physics*, 2015,54(2):572~581

14 Luo S K, Xu Y L, He J M, et al. Fractional relativistic Yamaleev oscillator model and its dynamical behaviors. *Foundations of Physics*, 2016,46(7):776~786

15 Luo S K, Zhang X T, He J M. A general method of fractional dynamics, i.e., fractional Jacobi last multiplier method, and its applications. *Acta Mechanica*, 2017,228(1):157~174

16 Xu Y L, Luo S K. Fractional Nambu dynamics. *Acta Mechanica*, 2015,226(11):3781~3793

17 Luo S K, Xu Y L. Fractional Birkhoffian mechanics. *Acta Mechanica*, 2015,226(3):829~844

18 Yang M J, Luo S K. Fractional symmetrical perturbation method of finding adiabatic invariants of disturbed dynamical systems. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2018,101(5):16~25

19 Luo S K, Dai Y, Zhang X T, et al. Fractional conformal invariance method for finding conserved quantities of dynamical systems. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2017,97(12):107~114

20 Luo S K, He J M, Xu Y L. Fractional Birkhoffian method for equilibrium stability of dynamical systems. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2016,78(1):105~111

21 He J M, Xu Y L, Luo S K. Stability for manifolds of equilibrium state of fractional Birkhoffian systems. *Acta Mechanica*, 2015,226(7):2135~2146

ANALYTICAL MECHANICS METHOD OF FRACTIONAL DYNAMICS AND ITS APPLICATIONS

Luo Shaokai†

(*Institute of Mathematical Mechanics and Mathematical Physics, Zhejiang Sci-Tech University, Hangzhou* 310018, *China*)

Abstract A concise review on analytical mechanics methods for fractional dynamics was presented. It mainly focused on the analytical mechanics representations of fractional dynamical systems, the analytical mechanics methods for constructing a fractional dynamical model and a family of fractional dynamical models, three types of fractional infinitesimal transformation for Lie group, the analytical mechanics methods for symmetry, symmetrical perturbation, conformal invariance, algebraic structure, Poisson integral, integral invariant, gradient representation, stability of fractional dynamical systems, and the analytical mechanics method of fractional differential equations. The applications of more than 10 kinds of fractional dynamics models in physics, mechanics, biology and non-linear science were introduced. It also pointed out some problems should be studied further in the future.

Key words fractional dynamics, analytical mechanics, a family of fractional dynamical models, fractional Lie transformation, symmetry, symmetrical perturbation, conformal invariance, algebraic structure, Poisson integral, integral invariant, gradient representation, stability

Received 10 September 2018, revised 9 April 2019.

† Corresponding author E-mail: mmmplsk@163.com