

二维分布式陀螺结构带隙特性研究*

李夏临^{1,2†} 杨晓东^{1,2} 张伟^{1,2}

(1.北京工业大学 机电学院,北京 100124) (2.机械结构非线性振动与强度北京市重点实验室,北京 100124)

摘要 本文研究了一种二维分布式陀螺结构的扭转振动的能带结构特性.该结构原胞由陀螺、外框架、扭转弹簧组成,通过角动量定理得到动力学方程,再由 Bloch 定理得到色散关系并分析其能带结构特性.在理论上研究了三个重要的结构参数:角动量、转动惯量、扭转刚度对能带结构的影响,同时通过数值方法对带隙特性进行分析,所得数值结果与理论结果吻合较好,证明了结构中带隙的存在.

关键词 声子晶体, 陀螺, 带隙, 振动控制

DOI: 10.6052/1672-6553-2019-069

引言

振动是一种广泛存在于自然界中的运动,它在结构或者介质中以波的形式传递.在实际的工程结构中,由于零件加工的精度或者磨损问题,都会导致振动产生.而振动又会加速工程结构中的零件磨损,剧烈的振动还会导致结构毁坏,造成安全隐患和经济损失.因此,对结构的振动特性进行分析^[1,2]和控制一直都是工程中的研究重点.声子晶体是一种人造的周期结构,由于其能带结构的带隙特性能使频率在带隙范围内的振动受到抑制,因此而受到广泛关注.

刘正猷等^[3]提出了一种局域共振型声子晶体.他们将铅球用硅胶包裹,并将其置入树脂基体中.通过实验证明了这类材料中带隙中央频率的值比结构晶格常数小了两个数量级,而且其带隙的产生机理并非布拉格散射,而是源自于结构的局域共振.这类材料的带隙产生机理使得要在低频处获得带隙不再依赖于结构尺寸.Goffaux 等^[4]对刘正猷的模型进行分析,得出类似的二维声子晶体结构也存在类似的性质,同样存在由于结构局域共振引起的带隙.之后 Goffaux^[5]等将重圆柱置于方格上,并将其侵入软多聚物中,并用硬网格分开,通过对比有无方框的结构证明了布拉格带隙对波的衰减能力要强于局域共振型带隙.Liu 等^[6]通过研究三组

元局域共振声子晶体的等效参数,发现在这种结构带隙内存在负等效密度效应.A. Khelif^[7]等将石英嵌入环氧树脂中,通过分析嵌入柱状高度和晶格常数的比值,确定了该比值对带隙带宽的影响,并且指出相同结构在三维和二维情况下能带结构的不同.Sheng 等^[8]对局域共振型声子晶体的等效介质理论进行了研究,并指出局域共振单元使得声子晶体的等效质量密度发生了重大变化,因此在一定条件下能实现负质量密度.Sam Hyeon Lee^[9]等研究了一种负模量的管结构,发现其负模量存在于在 0Hz ~450Hz 的频率范围内,并在该频率范围内对波有大幅度的衰减作用.Huang 等^[10]研究了负有效质量密度局域共振型超材料对波的衰减机理,从能量的角度解释了波衰减的原因.Liang 等^[11]通过实验,对声波进行整流,将超晶格材料同非线性材料耦合,实现了声学二极管效应.Cheng^[12]等将钢管置入管道中,通过理论和数值得到该结构的色散关系,然后通过仿真验证其二极管效应.Marco Miniaci^[13]等人研究了蜘蛛网状结构的声学超材料.通过对比不同的结构和结构的组成材料,分析了影响其带隙产生的因素,并且证明了这种结构中存在着由不同机理产生的带隙.Shu 等^[14]研究了管状局域共振结构,并同普通的柱状局域结构进行对比,发现管状结构能产生更宽范围的带隙.R. Chaunsali 等^[15]研究了非线性弹性力的结构,这种结构能呈现无损耗

2018-07-04 收到第 1 稿,2019-04-18 收到修改稿.

* 国家自然科学基金面上项目(11672007)

† 通讯作者 E-mail: dixiao914@126.com

通过和强烈衰减两种极端效果.黄飞等^[16]将椭圆柱体引入二维声子晶体中,证明了声波禁带结构与填充率、椭圆柱体截面形状及旋转角度有关.

目前,针对声子晶体的研究主要是在于提出创新性的模型,分析新模型的动力学特性.本文提出一种新型二维陀螺结构,首先对模型进行建模分析得到动力学方程,然后研究系统参数对带隙的影响,最后通过数值方法验证结构对振动的抑制作用,证明了带隙的存在.

1 二维平面陀螺声子晶体

二维分布式陀螺结构如图1所示,该结构原胞由单个陀螺和外框架组成,框架之间用弹簧连接,呈直角四边形排列.陀螺被安装在外框架上,不受力状态下陀螺自转轴沿着z轴.在该模型中假设弹簧只提供扭矩,不提供水平的拉力,所以只考虑陀螺和框架整体的扭转角度,不考虑平移.框架绕x轴的旋转角为 θ ,绕y轴的旋转角为 φ ,沿着坐标轴正向旋转为正.

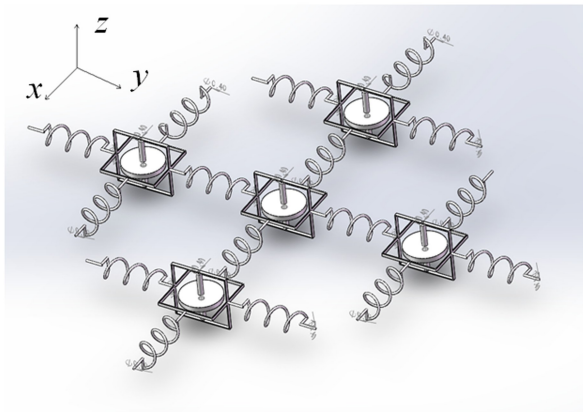


图1 二维分布式陀螺结构

Fig.1 2-D discrete gyroscopes structure

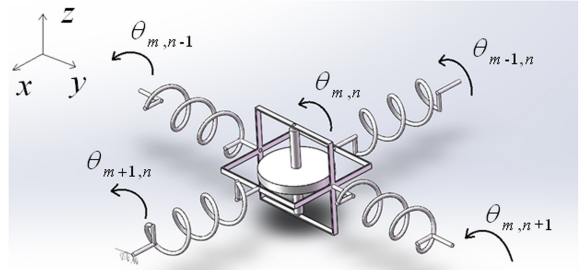
按照上述假设,根据角动量定理,建立该模型的动力学方程.针对第m行(沿着x轴方向),第n列(沿着y轴方向)的第(m,n)个陀螺进行建模.如图2所示进行受力分析,得到以下两个方程,其中沿x轴的运动为:

$$I\ddot{\theta}_{m,n} = c_y(\theta_{m,n+1} - 2\theta_{m,n} + \theta_{m,n-1}) + c_x(\theta_{m+1,n} - 2\theta_{m,n} + \theta_{m-1,n}) - H\dot{\varphi}_{m,n} \quad (1)$$

沿y轴的运动为:

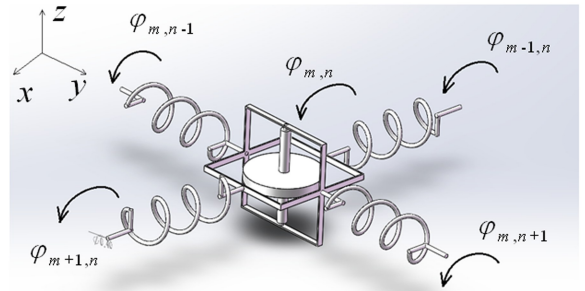
$$I\ddot{\varphi}_{m,n} = c_y(\varphi_{m,n+1} - 2\varphi_{m,n} + \varphi_{m,n-1}) + c_x(\varphi_{m+1,n} - 2\varphi_{m,n} + \varphi_{m-1,n}) + H\dot{\theta}_{m,n} \quad (2)$$

式中, I 为陀螺绕x轴、y轴的转动惯量, c_x 、 c_y 分别为沿着x、y方向弹簧的扭转刚度, $H=I_z\Omega$ 为陀螺的自转角动量, I_z 为陀螺绕转轴的转动惯量, Ω 为陀螺自转转速.



(a) 沿x轴的扭转

(a) Rotating around X axis



(b) 沿y轴的扭转

(b) Rotating around Y axis

图2 陀螺的受力分析

Fig.2 Force analysis of gyroscope

利用 Bloch 定理,对上述方程进行求解,设解得形式如下:

$$\theta_{m,n} = A e^{i\alpha m a} e^{i\beta n b} e^{i\omega t} \quad (3)$$

$$\varphi_{m,n} = B e^{i\alpha m a} e^{i\beta n b} e^{i\omega t}$$

其中,A、B为振幅, α 为沿着x轴波数, β 为沿着y轴波数, ω 为角频率,a和b分别为x轴和y轴上相邻两陀螺之间的距离.

将式(3)代入式(1)和(2)中,得到如下色散方程:

$$(c_y e^{-i\beta b} + c_x e^{-i\alpha a} + I\omega^2 - 2c_y - 2c_x + c_x e^{i\alpha a} + c_y e^{i\beta b})A + iH\omega B = 0 \quad (4)$$

$$iH\omega A + (c_y e^{-i\beta b} + c_x e^{-i\alpha a} + I\omega^2 - 2c_y - 2c_x + c_x e^{i\alpha a} + c_y e^{i\beta b})B = 0 \quad (5)$$

将(4)、(5)两式表达成矩阵的形式:

$$\begin{pmatrix} c_y e^{-i\beta b} + c_x e^{-i\alpha a} + I\omega^2 - 2c_y - 2c_x + c_x e^{i\alpha a} + c_y e^{i\beta b} & -iH\omega \\ iH\omega & c_y e^{-i\beta b} + c_x e^{-i\alpha a} + I\omega^2 - 2c_y - 2c_x + c_x e^{i\alpha a} + c_y e^{i\beta b} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (6)$$

对其系数矩阵行列式进行求解:

$$\begin{vmatrix} c_y e^{-i\beta b} + c_x e^{-i\alpha a} + I\omega^2 - 2c_y - 2c_x + c_x e^{i\alpha a} + c_y e^{i\beta b} & -iH\omega \\ iH\omega & c_y e^{-i\beta b} + c_x e^{-i\alpha a} + I\omega^2 - 2c_y - 2c_x + c_x e^{i\alpha a} + c_y e^{i\beta b} \end{vmatrix} = 0 \quad (7)$$

可得色散方程:

$$(c_y e^{-i\beta b} + c_x e^{-i\alpha a} + I\omega^2 - 2c_y - 2c_x + c_x e^{i\alpha a} + c_y e^{i\beta b})^2 = (\omega H)^2 \quad (8)$$

再对其进行求解,得到色散关系:

$$\omega_{1,2} = \frac{\pm H + \sqrt{H^2 - 8I(c_y(\cos\beta b - 1) + c_x(\cos\alpha a - 1))}}{2I} \quad (9)$$

式(9)中 ω 是一个关于 α 和 β 的二元函数。

2 带隙计算

为了解二维平面陀螺声子晶体的带隙特性,现在研究系统参数对色散曲面结构的影响。图 3 所示的色散曲面参数为: $a = b = 0.1 \text{ m}$, $c_x = c_y = 4 \text{ N} \cdot \text{m/rad}$, $I = 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$, $H = I_z \Omega = 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{rad/s}$ 并以此参数作为标准参数。

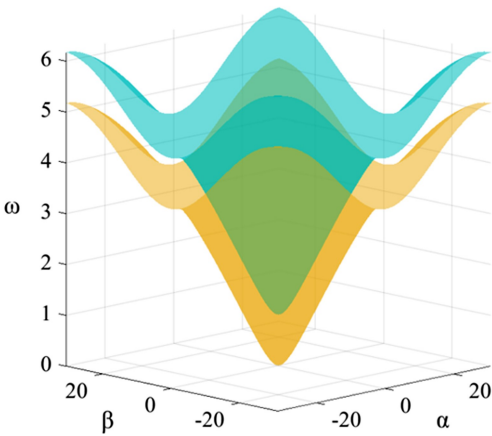
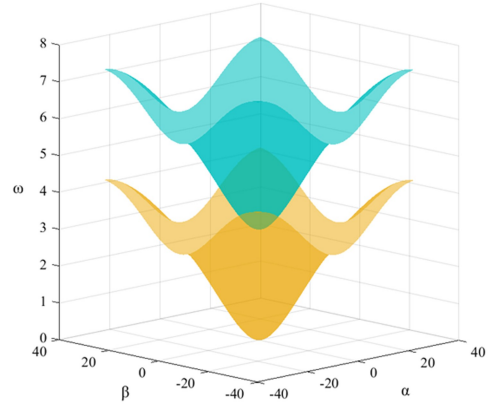


图 3 色散曲面

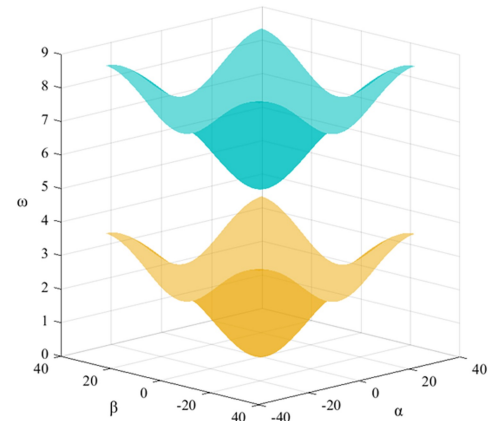
Fig.3 Dispersion surfaces

下面通过改变结构中的参数来研究带隙的变化,每次只改变一个参数。图 4 为自转角动量变化对色散曲面的影响,从图中能观察到随着角动量 H 增大,两曲面的间距逐渐增加,带隙范围逐渐增大。同时上曲面频率变高,下曲面频率变小。

图 5 为色散曲面随着扭转刚度的变化。(a) 和 (b) 为两个方向扭转刚度同时从 1 到 40 增大,此时曲面间距离逐渐减小,两曲面频率同时增大。



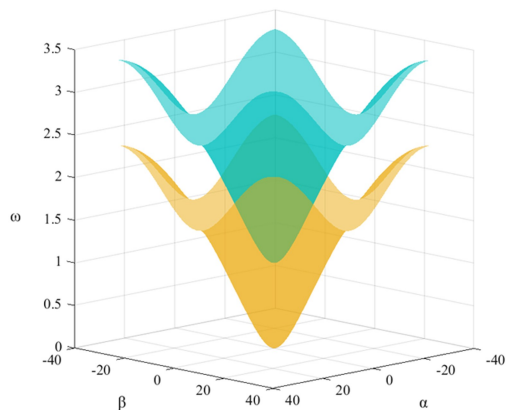
(a) $H=3 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{rad/s}$



(b) $H=5 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{rad/s}$

图 4 色散曲面随自转角动量变化

Fig.4 The dispersion surfaces change with angular momentum



(a) $c_x = c_y = 40 \text{ N/m} \cdot \text{rad}$

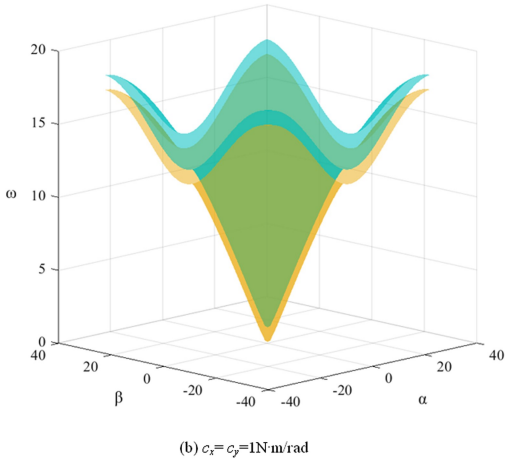


图5 色散曲面随扭转刚度的变化

Fig.5 The dispersion surfaces change with torsional stiffness

图6为色散曲面随着转动惯量的变化,转动惯量 I 从 0.1 增加到 10, 两曲面的距离逐渐减小, 曲面的频率也随着减小。

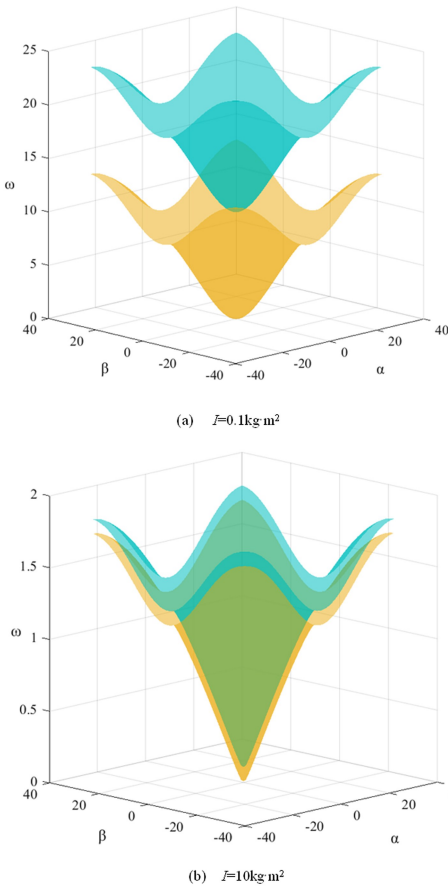


图6 色散曲面随转动惯量的变化

Fig.6 The dispersion surface change with moment of inertia

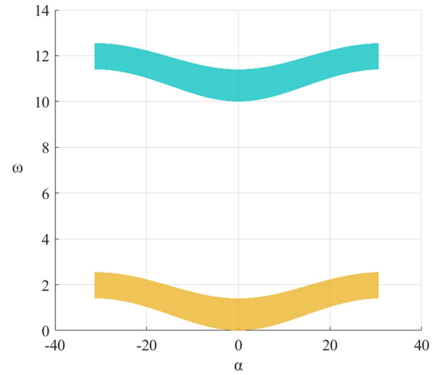
3 数值计算

现在通过数值方法对基于(1)、(2)两个动力

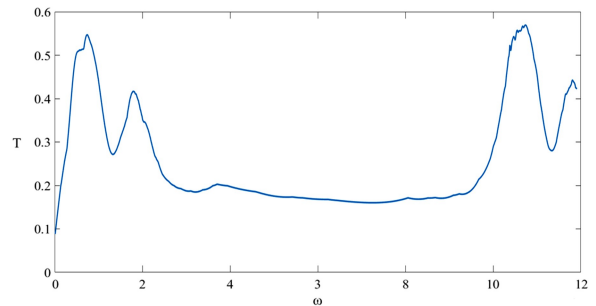
学方程所得的色散曲面图中的带隙进行验证. 为求得模型的透射率, 现取 20×20 个陀螺进行计算. 首先定义透射率 T (Transmittance), 计算公式为:

$$T = \frac{\max(|\gamma_{20,20}|)}{\max(|\gamma_{1,1}|)} \quad (5)$$

其中, $\gamma^2 = \theta^2 + \varphi^2$, 表示总的位移, $\gamma_{20,20}, \gamma_{1,1}$ 分别为第 (20,20) 和第 (1,1) 个陀螺的总位移. 现假设系统参数为: $a = b = 0.1 \text{ m}, c_x = c_y = 4 \text{ N} \cdot \text{m} / \text{rad}, I = 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2, H = I_z \Omega = 10 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{rad} / \text{s}$, 其色散曲面结构如图 7 所示.

图7 $a = b = 0.1 \text{ m}, c_x = c_y = 4 \text{ N} \cdot \text{m} / \text{rad}, I = 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2, H = I_z \Omega = 10 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{rad} / \text{s}$ 时的能带结构Fig.7 Band structure for $a = b = 0.1 \text{ m}, c_x = c_y = 4 \text{ N} \cdot \text{m} / \text{rad}, I = 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2, H = I_z \Omega = 10 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{rad} / \text{s}$

其中, 带隙频率范围为 $\omega = 2 \sim 10 \text{ rad}$. 在第 (1,1) 个陀螺上作用一个方向沿着 x 轴的外激 $M_x = \sin(\omega_x t)$, 令 ω_x 从 0 增大到 12, 计算不同外激励频率情况下系统的 T 值, 并画出系统透射率图像, 计算结果如下图所示.

图8 $a = b = 0.1 \text{ m}, c_x = c_y = 4 \text{ N} \cdot \text{m} / \text{rad}, I = 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2, H = I_z \Omega = 10 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{rad} / \text{s}$ 时透射率Fig.8 Transmittance for $a = b = 0.1 \text{ m}, c_x = c_y = 4 \text{ N} \cdot \text{m} / \text{rad}, I = 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2, H = I_z \Omega = 10 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{rad} / \text{s}$

图中横坐标为外激励频率 ω_x , 纵坐标为 T . 在

外激励频率为 $[2 \sim 10 \text{rad/s}]$ 时, T 值跟其他频率区间相比明显略小, 这表明振动受到明显抑制, 而这段频率范围基本对应于图 7 中的带隙范围。

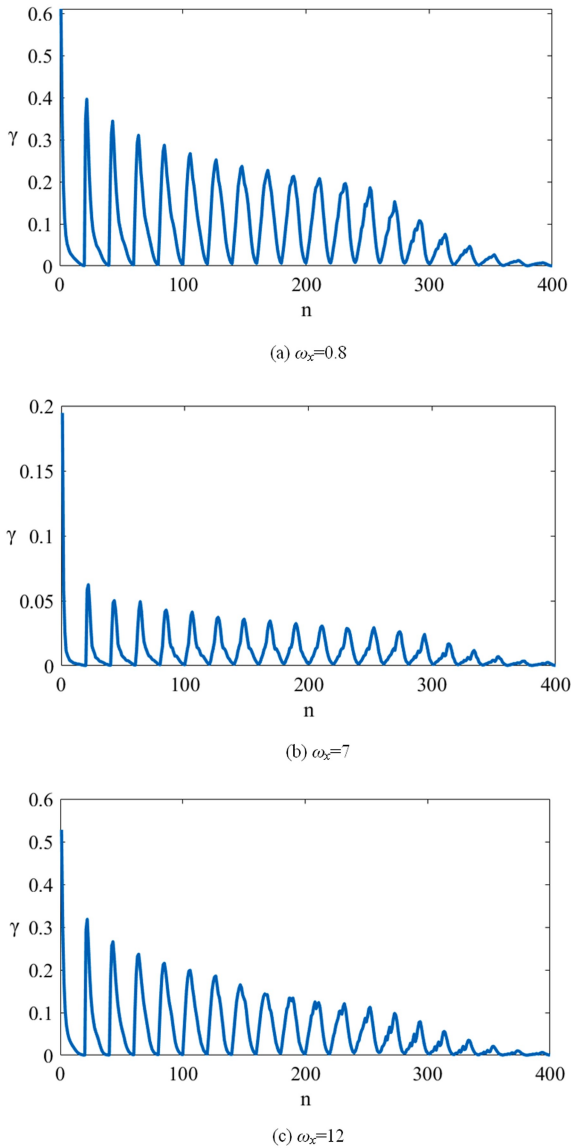


图 9 不同外激励下的陀螺位移图

Fig.9 Displacement of gyroscopes under different excitation

图 9 中(a)、(b)、(c)三幅图是在一段时间范围内, 不同频率激励作用下所有陀螺的最大位移图, 三幅图对应的外激励频率分别为 $\omega_x = 0.8$ 、 $\omega_x = 7$ 、 $\omega_x = 12.1$, 这三个频率分别处于图 7 中的下曲面、带隙、上曲面范围内. (a)、(c)两幅图的位移最大值约为 0.5, (b)中的位移最大值约为 0.2. 图(b)的位移值明显低于图(a)和图(c), 而图(b)的外激励频率处于带隙范围内, 因此, 表明频率在带隙内的振动在该结构中的传播受到了明显的抑制。

若固定其他参数不变, 只改变角动量 H , 使

$H=6$, 根据(9)式, 当 H 变化时两个频率的值发生变化, 如图 10 所示能带结构也因此发生变化. 两曲面间的带隙频率范围变为 $[3 \sim 6 \text{rad/s}]$. 同样使外激励频率 ω_x 从 0 增大到 12, 计算 $H=6$ 时系统的透射率, 结果如下:

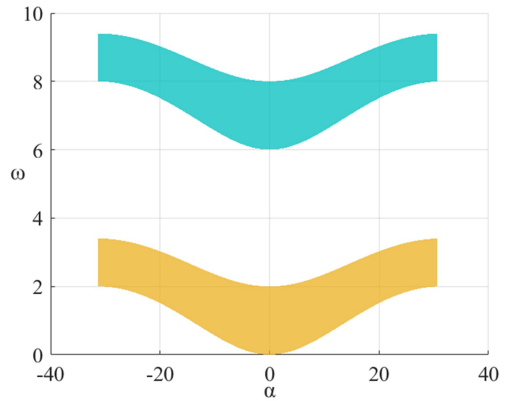


图 10 $a=b=0.1 \text{m}, c_x=c_y=4 \text{N} \cdot \text{m/rad}, I=1 \text{kg} \cdot \text{m}^2$, $H=I_z \Omega=6 \text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{rad/s}$ 时的能带结构

Fig.10 Band structure for $a=b=0.1 \text{m}, c_x=c_y=4 \text{N} \cdot \text{m/rad}$, $I=1 \text{kg} \cdot \text{m}^2, H=I_z \Omega=6 \text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{rad/s}$

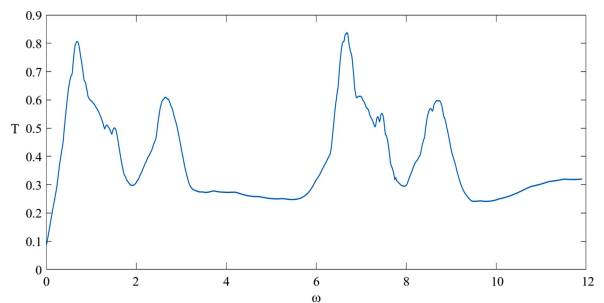


图 11 $a=b=0.1 \text{m}, c_x=c_y=4 \text{N} \cdot \text{m/rad}, I=1 \text{kg} \cdot \text{m}^2$, $H=I_z \Omega=6 \text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{rad/s}$ 时的透射率

Fig.11 Transmittance for $a=b=0.1 \text{m}, c_x=c_y=4 \text{N} \cdot \text{m/rad}$, $I=1 \text{kg} \cdot \text{m}^2, H=I_z \Omega=6 \text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{rad/s}$

由于自转角动量的改变使系统的能带结构发生变化, 从而导致了带隙范围也发生变化, 因此, 系统的透射率也发生改变. 图中透射率处于较低值的频率范围为 $[3 \sim 6 \text{rad/s}]$ 、 $[10 \sim 12 \text{rad/s}]$. 图 12 为不同频率外激励作用下系统的位移图. 图(a)的频率为 $\omega_x = 1$, 该频率处于通带范围内, 陀螺的位移基本在 0.05 以上, 图(b)、(c)的频率分别为 $\omega_x = 5$ 、11 于带隙内, 陀螺的位移基本小于 0.05. 通过对比三个图中陀螺的位移大小, 能看到频率处于带隙范围内的振动确实受到了抑制。

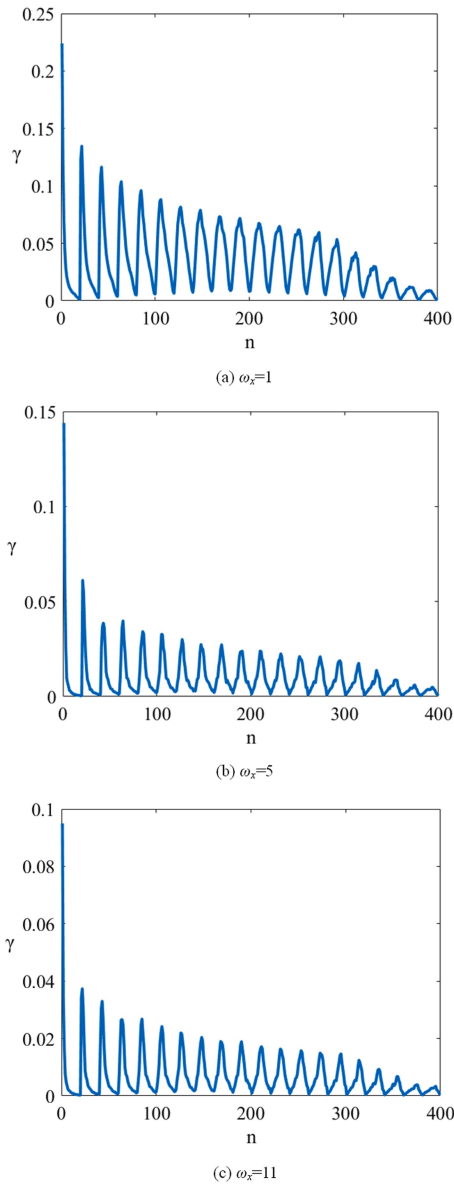


图 12 不同外激励下的陀螺位移图

Fig.12 Displacement of gyroscopes under different excitation

4 结论

在二维分布式陀螺结构的色散关系中,能够改变带隙特性的主要参数有: I 、 H 、 c_x 、 c_y 。当 I 逐渐增大时,上下曲面的间距逐渐减小,带隙随之减小,同时曲面所占频率范围也减小;当 H 逐渐增大时,曲面间距逐渐增大,带隙范围随之增大,此时上曲面频率逐渐变大,下曲面频率逐渐减小;当 c_x 、 c_y 都增大时,曲面间距逐渐减小,带隙范围也逐渐减小,两张曲面的频率范围同时增大。通过数值计算分析,当振动频率处于带隙范围内时,结构对振动有着相对明显的抑制作用,而频率处于通带时,振动能够相对正常地在结构中传播。

参 考 文 献

- 1 陈丽华,薛坚,张伟. 带边角裂纹悬臂 Mindlin 板的振动特性研究. 动力学与控制学报, 2018,16(1):41~47 (Chen L H, Xue J, Zhang W. Study on vibration characteristics of cantilevered mindlin plate with side crack. *Journal of Dynamics and Control*, 2018, 16(1):41~47 (in Chinese))
- 2 李蒙,李凤明. 采用 MFC 压电作动器对复合材料悬臂板振动主动控制. 动力学与控制学报, 2017,15(4):342~349 (Li M, Li F M. Active vibration control of a catilevered laminated plate using mfc actuators. *Journal of Dynamics and Control*, 2017, 15(4):342~349 (in Chinese))
- 3 Liu Z, Zhang X, Mao Y, et al. Locally resonant sonic materials. *Science*, 2000,289(5485):1734~1736
- 4 Goffaux C, Sánchez-Dehesa J, Yeyati A L, et al. Evidence of Fano-like interference phenomena in locally resonant materials. *Physical Review Letters*, 2002,88(22):225502/1-225502/4
- 5 Goffaux C, Sánchez-Dehesa J, Lambin P. Comparison of the sound attenuation efficiency of locally resonant materials and elastic band-gap structures. *Physical Review B-Condensed Matter and Materials Physics*, 2004,70(18):184302(1~6)
- 6 Liu Z Y, Chan C T, Sheng P. Analytic model of phononic crystals with local resonances. *Physical Review B-Condensed Matter and Materials Physics*, 2005, 71(1):014103
- 7 Khelif A, Aoubiza B, Mohammadi S, et al. Complete band gaps in two-dimensional phononic crystal slabs. *Physical Review E-Statistical, Nonlinear and Soft Matter Physics*, 2006,74(4):046610
- 8 Sheng P, Mei J, Liu Z, et al. Dynamic mass density and acoustic metamaterials. *Physical Section B-Condens Matter*, 2007,394(2):256~261
- 9 Lee S H, Park C M, Seo Y M, et al. Acoustic metamaterial with negative density. *Physics Letters Section A: General, Atomic and Solid State Physics*, 2009,373(48):4464~4469
- 10 Huang H H, Sun C T, Huang G L. On the negative effective mass density in acoustic metamaterials. *International Journal of Engineering Science*, 2009,47(4):610~617
- 11 Liang B, Guo X S, Tu J, et al. An acoustic rectifier. *Na-*

- ture Materials*, 2010,9(12):989~992
- 12 Yuan B, Liang B, Tao J C, et al. Broadband directional acoustic waveguide with high efficiency. *Applied Physics Letters*, 2012,101(4):043503
- 13 Miniaci M, Krushynska A, Movchan A B, et al. Spider web-inspired acoustic metamaterials. *Applied Physics Letters*, 2016,109(7):071905
- 14 Shu F, Liu Y, Wu J, et al. Band gap in tubular pillar phononic crystal plate. *Ultrasonics*, 2016,71:172~176
- 15 Chaunsali R, Toles M, Yang J, et al. Extreme control of impulse transmission by cylinder-based nonlinear phononic crystals. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2017,107:21~32
- 16 黄飞,何程. 椭圆柱体二维液态声子晶体声波禁带的研究. *动力学与控制学报*, 2005,3(4):86~92 (Huang F, He Z. Acoustic band gaps for rectangular arrays of elliptical liquid cylinders. *Journal of Dynamics and Control*, 2005,3(4):86~92 (in Chinese))

BAND CHARACTERISTICS OF 2-D GYROSCOPE PHONONIC CRYSTAL *

Li Xialin^{1,2†} Yang Xiaodong^{1,2} Zhang Wei^{1,2}

(1. College of Mechanical Engineering, Beijing University of Technology, Beijing 100124, China)

(2. Beijing Key Laboratory of Nonlinear Vibrations and Strength of Mechanical Structures,
Beijing University of Technology, Beijing 100124, China)

Abstract The band structure of torsional vibration in a 2-D discrete gyroscope phononic crystal was studied. The unit cell consists of a gyroscope, frame, and torsional springs. The governing equations of the unit cell and the dispersion relationship were derived using the angular momentum theorem and Bloch's theorem, respectively, and the characteristics of band structure were also analyzed. The effects of critical parameters on the band structure, such as angular momentum, moment inertia, and torsional stiffness, were studied theoretically. Moreover, the band structure was also calculated by numerical method, and the results agree well with the theoretical prediction, which validates the existence of band gap in this phononic crystal.

Key words phononic crystals, gyroscope, band gaps, vibration control