

基于 LuGre 模型非光滑柱铰链平面多体系统 动力学的建模和数值方法*

邢航 郑旭东 王琪†

(北京航空航天大学 航空科学与工程学院,北京 100083)

摘要 以含非光滑柱铰链平面多刚体系统为研究对象,将间隙充分小的柱铰链视为双边约束,用 LuGre 摩擦模型描述柱铰链内的摩擦;由第一类 Lagrange 方程导出该系统的动力学方程(微分-代数方程).铰链处的摩擦使得其动力学方程是关于 Lagrange 乘子的非线性代数方程组,由于 LuGre 摩擦模型具有很好的连续性,可将非线性代数方程组与常微分方程组的数值算法(如拟牛顿法和龙格-库塔法)相结合求解其动力学方程.最后,通过数值仿真算例说明了该算法的可行性和有效性,既能很好地反映柱铰链摩擦对系统动力学特性的影响,又能避免 Coulomb 干摩擦给方程求解带来的困难.

关键词 多体系统, 柱铰链, Lagrange 乘子, LuGre 摩擦模型

DOI: 10.6052/1672-6553-2019-065

引言

在航空、航天、机械和车辆等领域中,常会遇到接触、摩擦与碰撞等问题^[1,2],在机械系统中的铰链也普遍存在这些问题.在某些情况下,铰链的摩擦是不能忽略的,它不仅会导致部件的磨损,还会影响其动力学特性.人类对摩擦的认识已有上百年的历史,目前摩擦模型已有数十种^[3].常用的摩擦模型有 Coulomb 干摩擦模型,修正的 Coulomb 摩擦模型和 LuGre 摩擦模型等. Coulomb 干摩擦模型表达式简单,但当接触点的相对速度为零时具有多值性和不连续性,给动力学方程的求解带来困难^[4].修正的 Coulomb 摩擦模型虽然是接触点相对速度的单值连续函数,但当速度为零时,摩擦力也为零,这不符合实际;LuGre 摩擦模型用微分方程的形式(具有很好的连续性)给出了摩擦力与接触点相对速度的关系式.该模型参数较多,有些参数不易测得,但能较好地反映摩擦力的基本特征^[5].

近年来,非光滑多体系统动力学的建模方法与数值算法得到了广泛应用^[6],可用于研究含摩擦与碰撞的多体系统动力学问题^[7-10].对于含非理想

(含间隙与摩擦)运动副机械系统动力学的研究取得了诸多成果^[11].当运动副的间隙充分小时,间隙引起的冲击与碰撞可以忽略,但摩擦的影响有时是不能忽略的.庄方方^[12]研究了含摩擦柱铰链多体系统动力学的建模与算法问题,采用库仑干摩擦模型,将常微分方程和非线性代数方程的数值算法与粒子群算法相结合,克服了 Coulomb 干摩擦给动力学方程求解带来的困难.但是,粒子群算法的计算成本较高.

本文以含摩擦柱铰链的平面多体系统为研究对象,基于 LuGre 摩擦模型,建立含摩擦柱铰链的力学模型;然后应用第一类 Lagrange 方程建立该系统的动力学方程,由于 LuGre 摩擦模型的连续性,将非线性代数方程组与常微分方程组的数值算法(如拟牛顿法和龙格-库塔法)相结合,给出一种求解这类非光滑多体系统动力学方程的数值计算方法.

1 含摩擦转动柱铰链的力学模型

柱铰链是机械系统中常见的连接方式,这类铰链是由一个圆柱形销钉插入两个物体的圆孔,通常

2018-06-03 收到第 1 稿,2019-04-08 收到修改稿.

* 国家自然科学基金资助项目(11772021)

† 通讯作者 E-mail: bhwangqi@sina.com

分析时把销钉固连在某一物体上.设固连在物体 A 上的销钉 j 和物体 i 连接,销钉 j 的半径 R_{ij} 略小于物体 i 的圆孔半径.销钉的轴心为 O_{ij} ,销钉 j 和物体 i 的接触点为 P_{ij} ,销钉 j 对物体 i 的作用有法向约束力 F_{ij}^N 和切向摩擦力 F_{ij}^f ,不计摩擦滚阻.物体 i 与销钉 j 接触部分的受力如图 1 所示,设 $O_{ij}P_{ij}$ 连线与 x 轴的夹角为 φ_{ij} ,物体 i 上过质心 C_i 的基准线与 x 轴的夹角为 θ_i ,物体 i 相对于物体 A 转动的相对角速度为 $\dot{\theta}_{ij}$,摩擦力用 LuGre 摩擦模型描述^[13]:

$$\begin{cases} F_{ij}^f = -(\sigma_0 z_{ij} + \sigma_1 \dot{z}_{ij} + \sigma_2 v_{ij}^r) F_{ij}^N \\ \dot{z}_{ij} = v_{ij}^r - \frac{\sigma_0 z_{ij}}{g(v_{ij}^r)} |v_{ij}^r| \\ g(v_{ij}^r) = \mu_{ij} + (\mu'_{ij} - \mu_{ij}) e^{-|v_{ij}^r/v_s|^p} \end{cases} \quad (1)$$

式中, σ_0 为鬃毛刚度, σ_1 为鬃毛微观阻尼系数, σ_2 为粘性摩擦系数, v_s 为 Stribeck 速度. μ_{ij}, μ'_{ij} 分别为物体 i 与销钉 j 之间的动摩擦系数和静摩擦系数. $v_{ij}^r = R_{ij} \dot{\theta}_{ij}$ 表示物体 i 与销钉 j 接触点 P_{ij} 的相对速度在切向上的投影.

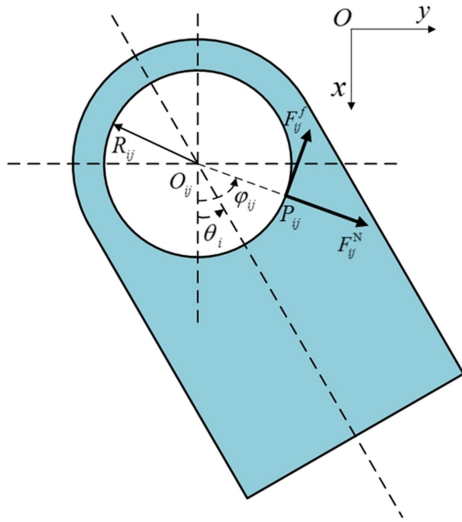


图 1 物体 i 上圆孔所受约束力示意图

Fig.1 Constraint forces on the hole of the i th body

将销钉 j 作用在物体 i 上的法向约束力表示为向量形式

$$F_{ij}^N = F_{ij}^{Nx} e_i + F_{ij}^{Ny} e_j \quad (2)$$

则有:

$$F_{ij}^N = \sqrt{(F_{ij}^{Nx})^2 + (F_{ij}^{Ny})^2} \quad (3)$$

$$\sin \varphi_{ij} = \frac{F_{ij}^{Ny}}{\sqrt{(F_{ij}^{Nx})^2 + (F_{ij}^{Ny})^2}} \quad (4)$$

$$\cos \varphi_{ij} = \frac{F_{ij}^{Nx}}{\sqrt{(F_{ij}^{Nx})^2 + (F_{ij}^{Ny})^2}} \quad (5)$$

2 动力学模型及数值计算方法

设系统由 n 个物体组成,物体 i 上有 n_i 个柱铰链,系统总共受到 p 个柱铰链的约束.这 n_i 个柱铰链到物体 i 质心的距离分别为 $L_{i1}, L_{i2}, \dots, L_{in_i}$,销钉轴心 O_{ij} 与质心 C_i 的连线 $O_{ij}C_i$ 与物体 i 的基准线夹角为 α_{ij} ,铰链半径分别为 $R_{i1}, R_{i2}, \dots, R_{in_i}$.物体 i 上圆孔(无阴影)和销钉(有阴影)所受约束力如图 2 所示.

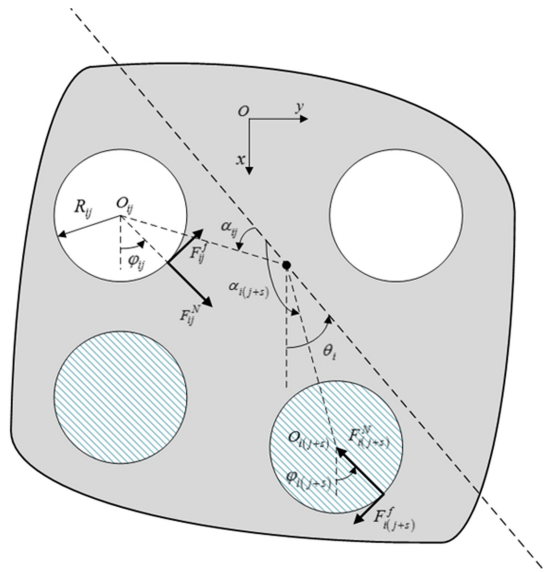


图 2 物体 i 上圆孔和销钉所受约束力示意图

Fig.2 Constraint forces on holes and pegs of the i th body

设物体 i 的质心坐标和转角为 $(x_{ci}, y_{ci}, \theta_i)$, 该系统的位形坐标矩阵形式为:

$$q = (x_{c1}, y_{c1}, \theta_1, x_{c2}, y_{c2}, \theta_2, \dots, x_{cn}, y_{cn}, \theta_n)^T$$

当铰链处的间隙充分小时,可以忽略其间隙,柱铰链可视为双边约束,且对应有两个约束方程,则系统中约束方程表示为

$$f_{ij(k)}(q) = 0, i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, n_i, k = 1, 2$$

将约束方程用矩阵形式表示为

$$\Phi(q) = [f_{11(1)}, f_{11(2)}, \dots, f_{nn_n(1)}, f_{nn_n(2)}]^T = 0$$

设: M 是广义质量矩阵; Φ_q 是约束方程的雅可比矩阵; $\lambda = [\lambda_{11(1)}, \lambda_{11(2)}, \dots, \lambda_{nn_n^*(1)}, \lambda_{nn_n^*(2)}]^T$ 为 Lagrange 乘子列向量; Q 为系统主动力的广义力; Q^f 为系统摩擦力的广义力.根据式(1)和式(3),销钉 j 作用在物体 i 的摩擦力可表示为

$$\begin{cases} F_{ij}^f = -(\sigma_0 z_{ij} + \sigma_1 \dot{z}_{ij} + \sigma_2 v_{ij}^r) \sqrt{\lambda_{ij(1)}^2 + \lambda_{ij(2)}^2} \\ \dot{z}_{ij} = v_{ij}^r - \frac{\sigma_0 z_{ij}}{g(v_{ij}^r)} |v_{ij}^r| \\ g(v_{ij}^r) = \mu_{ij} + (\mu'_{ij} - \mu_{ij}) e^{-|v_{ij}^r/v_s|} \end{cases} \quad (6)$$

摩擦力的广义力可表示为

$$\begin{cases} Q_{x_{ci}}^f = - \sum_{j=1}^{n_i} F_{ij}^f \sin \varphi_{ij} \\ Q_{y_{ci}}^f = \sum_{j=1}^{n_i} F_{ij}^f \cos \varphi_{ij} \\ Q_{\theta_i}^f = - \sum_{j=1}^{n_i} F_{ij}^f \{ L_{ij} \cos [\varphi_{ij} - (\alpha_{ij} + \theta_i)] - R_{ij} \} \end{cases} \quad (7)$$

将摩擦力的广义力写成矩阵形式

$$Q^f = [Q_{x_{c1}}^f, Q_{y_{c1}}^f, Q_{\theta_1}^f, \dots, Q_{x_{cn}}^f, Q_{y_{cn}}^f, Q_{\theta_n}^f]^T$$

由第一类 Lagrange 方程和 Baumgarte 违约束稳定化方法^[14], 该系统的动力学方程可表示为:

$$\begin{bmatrix} M & -\Phi_q^T \\ \Phi_q & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q} \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q + Q^f \\ -\dot{\Phi}_q \dot{q} - 2\alpha \dot{\Phi} - 2\beta^2 \Phi \end{bmatrix} \quad (8)$$

式中, $\dot{\Phi}_q = d\Phi_q/dt$, $\dot{\Phi} = d\Phi/dt$, α, β 为大于零的常数. 上式是关于 Lagrange 乘子的非线性代数方程组, 并可表示为

$$\Phi_q M^{-1} Q \lambda = -\Phi_q M^{-1} Q - \Phi_q M^{-1} Q^f - \dot{\Phi}_q \dot{q} - 2\alpha \dot{\Phi}_q \dot{q} - \beta^2 \Phi \quad (9)$$

由于 LuGre 摩擦模型具有很好的连续性, 故式 (9) 是关于 Lagrange 乘子的连续的非线性代数方程组, 易于用数值方法求解. 由于方程 (9) 的连续性, 因此, 可以用上一步求出的 $\lambda(t_k)$ 作为下一步求解该方程的迭代初值, 其求解的计算效率要优于文献[12]给出的方法. 文献[12]计算效率低的主要原因是 Coulomb 干摩擦模型的多值性和不连续性, 导致方程(9)是关于 Lagrange 乘子的不连续的非线性代数方程组, 目前求解这类方程组的数值算法计算效率比较低.

3 数值仿真算例

算例如图 3 所示, 两根质量分别为 m_1, m_2 的均质摆杆通过柱铰链连接, 摆杆长分别为 L_1, L_2 . 摆杆上分别作用有驱动力偶, 其力偶矩分别设为: $M_1 = M_{1\max} \sin(\omega_1 t), M_2 = M_{2\max} \sin(\omega_2 t)$. 考虑两个柱铰链内的摩擦, 其动、静摩擦系数分别为 $\mu_1, \mu'_1, \mu_2, \mu'_2$,

柱铰链的半径分别为 R_{11}, R_{12} .

应用局部方法^[15] 建立系统的约束方程, 其矩阵形式为:

$$\Phi = \begin{bmatrix} x_{c1} - 0.5L_1 \cos \theta_1 \\ y_{c1} - 0.5L_1 \sin \theta_1 \\ x_{c2} - x_{c1} - 0.5L_1 \cos \theta_1 - 0.5L_2 \cos \theta_2 \\ y_{c2} - y_{c1} - 0.5L_1 \sin \theta_1 - 0.5L_2 \sin \theta_2 \end{bmatrix} = 0$$

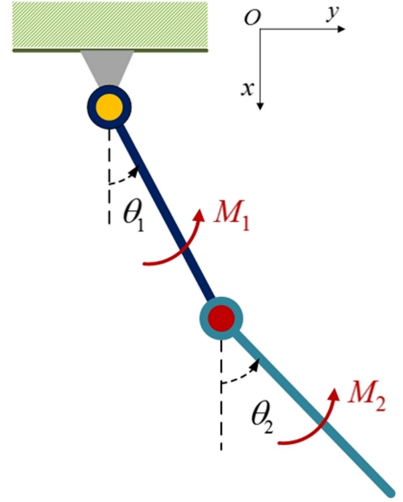


图 3 含摩擦柱铰链的双摆示意图

Fig.3 Double pendulum system with frictional revolute joints

该系统的主动力和摩擦力的广义力列向量分别为:

$$Q = \begin{bmatrix} m_1 g \\ 0 \\ M_1 \\ m_2 g \\ 0 \\ M_2 \end{bmatrix}$$

$$Q^f = \begin{bmatrix} -F_{11}^f \sin \varphi_1 + F_{12}^f \sin \varphi_2 \\ F_{11}^f \cos \varphi_1 - F_{12}^f \cos \varphi_2 \\ -F_{11}^f [0.5L_1 \cos(\varphi_{11} - \theta_1) - R_{11}] - \\ F_{12}^f [0.5L_1 \cos(\varphi_{12} - \theta_1) + R_{12}] \\ -F_{21}^f \sin \varphi_{21} \\ F_{21}^f \cos \varphi_{21} \\ -F_{21}^f [0.5L_2 \cos(\varphi_{21} - \theta_2) - R_{21}] \end{bmatrix}$$

式中, $\varphi_{12} = \varphi_{21}, R_{21} = R_{12}, F_{12}^f = F_{21}^f$. 摩擦力 F_{12}^f, F_{21}^f 由式(6)确定.

本算例有关参数设置如下:

$$\begin{aligned}
 m_1 &= 2.0\text{kg}, m_2 = 1.0\text{kg}, L_1 = L_2 = 2.0\text{m}, \\
 R_{11} &= R_{12} = R_{21} = 0.2\text{m}, \omega_1 = \omega_2 = 2\pi\text{rad/s}, \\
 \mu_1 &= \mu_2 = 0.3, \mu'_1 = \mu'_2 = 0.4, \alpha = \beta = 50, \\
 \sigma_0 &= 10^6\text{N/m}, \sigma_1 = 100\text{N} \cdot \text{s/m}, \sigma_2 = 0, \\
 v_s &= 0.001\text{m/s}
 \end{aligned}$$

其中, σ_0, σ_1 取值是通过数值仿真, 对比分析质点受 LuGre 摩擦模型和 Coulomb 干摩擦模型的动力学特性得到的。

以下分两种工况进行数值仿真分析。

工况 1. 驱动力偶矩的幅值 $M_{1\max} = M_{2\max} = 0\text{N} \cdot \text{m}$, 初始条件 $\theta_1 = \theta_2 = 0.5\pi\text{rad}, \dot{\theta}_1 = \dot{\theta}_2 = 0\text{rad/s}$ 。图 4 和图 5 分别给出了摆杆 1 的转角 θ_1 及其角速度 $\dot{\theta}_1$ 的时间历程图。图 6 给出了铰链 2 对摆杆 2 的法向约束力 F_{22}^N 的时间历程图。由数值仿真的结果可知: 该双摆系统在重力和摩擦力的作用下, 摆动幅度逐渐减小, 最终两个摆杆都停在竖直向下的位置; 仿真结果和理论分析相吻合, 并与文献[12]的数值计算结果吻合。

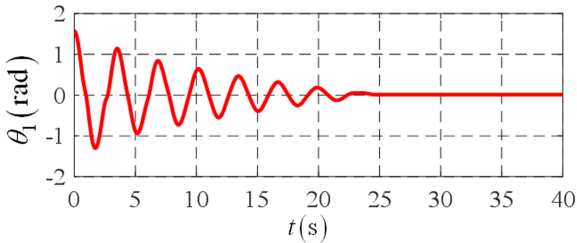


图 4 θ_1 的时间历程图

Fig.4 Evolution of θ_1

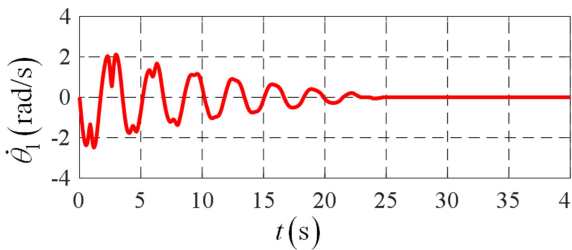


图 5 $\dot{\theta}_1$ 的时间历程图

Fig.5 Evolution of $\dot{\theta}_1$

工况 2. 设驱动力偶矩幅值 $M_{1\max} = M_{2\max} = 6\text{N} \cdot \text{m}$, 初始条件 $\theta_1 = \theta_2 = 0.5\pi\text{rad}, \dot{\theta}_1 = \dot{\theta}_2 = 0\text{rad/s}$ 。图 7 和图 8 分别为稳定状态时摆杆 1 的转角 θ_1 及其角速度 $\dot{\theta}_1$ 的时间历程。图 9 为稳态时铰链 2 对摆杆 2 的法向约束力 F_{22}^N 的时间历程。

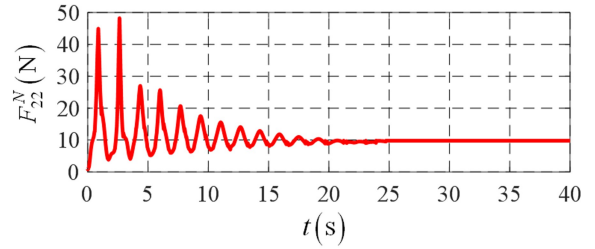


图 6 F_{22}^N 的时间历程图

Fig.6 Evolution of F_{22}^N

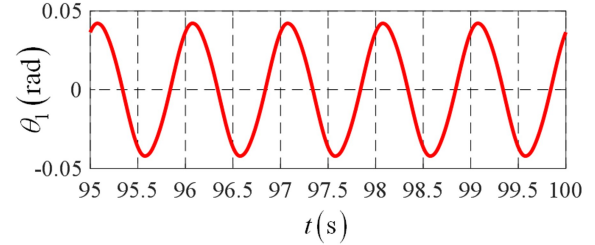


图 7 θ_1 的时间历程图

Fig.7 Evolution of θ_1

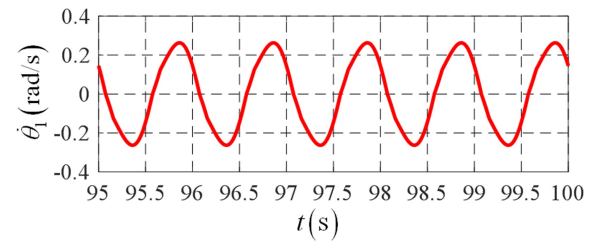


图 8 $\dot{\theta}_1$ 的时间历程图

Fig.8 Evolution of $\dot{\theta}_1$

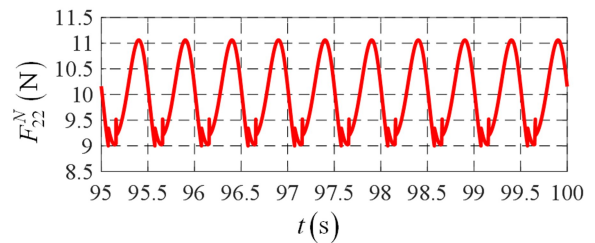


图 9 F_{22}^N 的时间历程图

Fig.9 Evolution of F_{22}^N

由数值仿真的结果可知: 在驱动力偶作用下, 系统的稳态运动为周期运动; 由于柱铰链存在摩擦, 当相对角速度变向时, 导致摆杆的法向约束力发生了突变。该仿真结果与文献[12]的数值结果对比, 有很好的—致性, 说明了本算法的正确性。

4 结论

本文基于 LuGre 摩擦模型, 建立了含摩擦柱铰

链的力学模型,当柱铰链的间隙充分小时(忽略其间隙),将其视为双边约束.使用局部方法建立了系统的约束方程,易于用 Lagrange 乘子表示柱铰链的法向约束力,用第一类 Lagrange 方程给出了该系统的动力学方程,并由此得到了关于 Lagrange 乘子的非线性代数方程组,由于 LuGre 摩擦模型具有很好的连续性,使得该代数方程组易于数值求解,避免了 Coulomb 干摩擦模型的多值性和不连续性给动力学方程的求解带来的困难.最后,通过数值仿真算例,说明了本文给出的建模方法和数值算法的可行性和有效性.

参 考 文 献

- 张伟,刘宏利,郭翔鹰. 考虑间隙运动副的桁架单胞等效建模与分析. 动力学与控制学报, 2018, 16(2): 136~143 (Zhang W, Liu H L, Guo X Y. Equivalent modeling and analysis of truss antenna unit cell with clearance joints. *Journal of Dynamics and Control*, 2018, 16(2): 136~143 (in Chinese))
- 朱琳,王琪,张润森. 含摩擦阻尼器非光滑振动系统的建模与数值仿真. 动力学与控制学报, 2017, 15(2): 172~177 (Zhu L, Wang Q, Zhang R S. Modelling and simulation of the non-smooth vibration systems with friction dampers. *Journal of Dynamics and Control*, 2017, 15(2): 172~177 (in Chinese))
- 刘丽兰,刘宏昭,吴子英等. 机械系统中摩擦模型的研究进展. 力学进展, 2008, 38(2): 201~213 (Liu L L, Liu H Z, Wu Z Y, et al. An overview of friction models in mechanical systems. *Advances in Mechanics*, 2008, 38(2): 201~13(in Chinese))
- Pfeiffer F. On non-smooth dynamics. *Meccanica*, 2008, 43(5): 533~554
- Marques F, Flores P, Pimenta Claro J C, et al. A survey and comparison of several friction force models for dynamic analysis of multibody mechanical systems. *Nonlinear Dynamics*, 2016, 86(3): 1407~1443
- 王琪,庄方方,郭易圆等. 非光滑多体系统动力学数值算法的研究进展. 力学进展, 2013, 43(1): 101~110 (Wang Q, Zhuang F F, Guo Y Y, et al. Advances in the research on numerical methods for non-smooth dynamics of multibody systems. *Advances in Mechanics*, 2013, 43(1): 101~111 (in Chinese))
- 张润森,王琪. 浮放物体平面多刚体动力学建模与算法研究. 力学学报, 2017, 49(6): 1370~1379 (Zhang R S, Wang Q. Research on modeling and numerical method of free standing body on planar rigid multibody dynamics. *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2017, 49(6): 1370~1379 (in Chinese))
- 钱震杰,章定国,金诚谦. 柔性多体系统含摩擦碰撞 stick-slip 过程动力学仿真. 振动与冲击, 2017, 36(23): 32~37 (Qian Z J, Zhang D G, Jin C Q. Dynamic simulation for flexible multibody systems containing frictional impact and stick-slip processes. *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2017, 36(23): 32~37 (in Chinese))
- 章杰,王琪. 基于 Karnopp 摩擦的柔性滑移铰的建模与仿真. 动力学与控制学报, 2016, 14(3): 263~268 (Zhang J, Wang Q. Modeling and analysis of flexible translation joint with Karnopp friction. *Journal of Dynamics and Control*, 2016, 14(3): 263~268(in Chinese))
- Wang J Y, Liu Z Y, Hong J Z. Partition method and experimental validation for impact dynamics of flexible multibody system. *Acta Mechanica Sinica*, 2018, 34(3): 482~492
- 田强,刘铖,李培等. 多柔体系统动力学研究进展与挑战. 动力学与控制学报, 2017, 15(5): 385~405 (Tian Q, Liu C, Li P, et al. Advances and challenges in dynamics of flexible multibody systems. *Journal of Dynamics and Control*, 2017, 15(5): 385~405(in Chinese))
- 庄方方,王琪. 含摩擦柱铰链平面多体系统动力学的建模和数值方法. 工程力学, 2012, 29(5): 193~199 (Zhuang F F, Wang Q. Modeling and numerical algorithm for planar multibody system with friction on revolute joints. *Engineering Mechanics*, 2012, 29(5): 193~199 (in Chinese))
- Muvengei O, Kihui J, Ikua B. Dynamic analysis of planar rigid-body mechanical systems with two-clearance revolute joints. *Nonlinear Dynamics*, 2013, 73(1-2): 259~273
- 潘振宽,赵维加,洪嘉振等. 多体系统动力学微分/代数方程组数值方法. 力学进展, 1996, 26(1): 28~40 (Pan Z K, Zhao W J, Hong J Z, et al. On numerical algorithms for differential/algebraic equations of motion of multibody systems. *Advances in Mechanics*, 1996, 26(1): 28~40 (in Chinese))
- 彭慧莲,王士敏,王琪等. 双面约束多点摩擦多体系统的建模和数值方法. 力学学报, 2009, 41(1): 105~111 (Peng H L, Wang S M, Wang Q, et al. Modeling and simulation of multi-body systems with multi-friction and

fixed bilateral constraint. *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2009,41(1):105~111 (in Chinese))

MODELING AND SIMULATION OF PLANAR MULTIBODY SYSTEMS WITH FRICTIONAL REVOLUTE JOINTS BASED ON LUGRE FRICTION MODEL *

Xing Hang Zheng Xudong Wang Qi[†]

(*Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100083, China*)

Abstract This paper presented a method for modeling and simulating planar rigid multibody systems with non-smooth revolute joints. The geometric constraints of the revolute joints were treated as bilateral constraints, and the tiny clearance sizes were neglected. The LuGre friction model was used to describe the tangential contact forces in the revolute joints. The dynamic equations (differential-algebraic equations) were obtained by using Lagrange's equations of the first kind. Due to the frictional forces in the revolute joints, the dynamic equations are nonlinear algebraic equations with respect to the Lagrange multipliers. Because of the perfect continuity of the LuGre friction model, numerical algorithms for nonlinear algebraic equations and differential equations, such as Quasi-Newton method and Runge-Kutta method, were combined to solve the dynamic equations. Finally, the feasibility and effectiveness of the method were verified by numerical examples, which showed that the method can consider the frictions in revolute joints, and at the same time also avoid the numerical difficulties caused by Coulomb dry friction model.

Key words multi-body system, revolute joint, Lagrange multiplier, LuGre friction model