关于分析力学的基础与展望*

郭永新† 刘世兴
(辽宁大学 物理学院,沈阳 110036)

摘要 本文从分析约束力学系统的"欠定"问题开始,介绍分析力学的基本变分原理和三类运动微分方程,并分析了分析力学具有普适性之缘由.对非完整约束力学系统,着重分析其动力学建模问题、几何结构和重点发展方向,同时又简要介绍了 Birkhoff 系统所具有的一般辛结构特征和研究意义,以及需要重点解决的问题.文中对力学系统的 Noether 对称性和运动微分方程的对称性作了较为详细的论述,并列举了相应实例说明两种对称性与守恒量之间的关系.在几何力学部分,重点介绍了分析力学的辛几何结构和对称性约化理论,包括辛流形的 Darboux-Moser-Weinstein 局部正则结构、整体拓扑结构及其对量子力学的影响、Lie 群与 Lie 代数的伴随表示和余伴随表示、动量映射、Cartan 辛约化、Marsden-Weinstein 约化等.文中最后论述了完整与非完整力学系统可积性问题的研究方法和成果,指出了非完整力学系统现有可积性方法的局限性.

关键词 变分原理, 非完整力学, Birkhoff 系统, 对称性, 辛几何, 对称约化, 可积性

DOI: 10.6052/1672-6553-2019-072

引言

分析力学是动力学与控制学科的重要分支之一,是力学学科的重要基础.同时,它作为物理学"四大力学"之一的理论力学的重要部分,也是电动力学、量子力学、统计力学、量子场论、狭义与广义相对论等理论物理学的重要基础.分析力学从何而来,为什么具有普适性,具有哪些研究特点和重要应用,未来将向何处发展等问题,都是学习和研究分析力学的学者们应该时刻关注的问题.

1 分析力学的基本方程及其适用性

最初的分析力学来源于经典力学处理约束力学系统问题时所遇到的困难.经典力学以 Newton 三定律和万有引力定律为基础,这些定律基于绝对时空观,适用于惯性参照系,能够足够精确的描述宏观、低速、非超大质量的物理现象.由于经典力学采用位移、速度、加速度、力等矢量概念来表述力学规律,微分几何和矢量分析便成为研究经典力学的常用工具,所以 Newton 的经典力学又称为矢量力学.但是,当 N 个质点 m_i 构成的力学系统受到 g 个完整约束限制时,它们确定了空间$\mathbb{R}^{3n+1}$中的一个超曲面,此为满映射 $f:\mathbb{R}^{3n+1}\to\mathbb{R}^{g}$ 的水平集,它具有微分流形结构,约束力学系统就限制在这个 $n=3N+1-g$维微分流形上运动.根据 Newton 第二定律,各质点的运动加速度受制于主动力和约束力,而约束力是未知的.由于约束方程 Newton 运动方程都没有给出约束力的规律,所以 Newton 运动方程附加约束方程所构成的二阶和一阶混合方程组是一个"欠定"问题(underdetermined problems),即不能构成一个定解问题.为此,需要引入新的物理原理,如 d'Alembert-Lagrange 微分变分原理或 Gauss 原理来代替 Newton 定律,或者引入理想约束假设来规定约束力产生的机制,从而实现低维位形流形上新的无约束力学系统的定解问题.为了简化问题,我们可限定在完整保守力学系统.由 d'Alembert-Lagrange微分变分原理可得到约束力学系统在位形流形上的运动方程,这是 Lagrange 函数 $L(t,q,\dot{q})$ 所满足的 n 个二阶 Euler-Lagrange 方程,这个方程也可由 Hamilton 积分变分原理导出.再对正规 Lagrange系统进行 Legendre 变换:$\dot{q}^{\mu}\mapsto p_{\mu}=\partial L/\partial\dot{q}^{\mu}$,得到广义坐标和广义动量表达的 Hamilton 函数

2019-10-07 收到第 1 稿,2019-10-12 收到修改稿.
* 国家自然科学基金资助项目(11572145,11872030,11972177,11772144)和辽宁省科技厅资助项目(20180550400)
† 通讯作者 E-mail:yxguo@ lnu.edu.cn

$H(t,q,p)=\dot{q}^{\mu}\partial L/\partial\dot{q}^{\mu}-L$,它满足 $2n$ 个一阶正则方程,在正则变换下具有不变性.将正则变换限定在化零正则变换时,得到主函数 $S(t,\dot{q}^{\mu})$ 所满足的 Hamilton-Jacobi 偏微分方程[1].概括起来,这三类运动微分方程分别为:(1) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}^{\mu}}-\frac{\partial L}{\partial q^{\mu}}=0$;(2) $\dot{q}^{\mu}=\frac{\partial H}{\partial p_{\mu}},\dot{p}_{\mu}=-\frac{\partial H}{\partial q^{\mu}}$;(3) $\frac{\partial S}{\partial t}+H(t,q^{\mu},\frac{\partial S}{\partial q^{\mu}})=0$.它们构成了分析力学的三类基本运动微分方程,对于非保守力学系统,将改变方程的齐次性或正则性.分析力学的普适性是我们研究分析力学的重要意义之一.上述从 Newton 经典力学而来的分析力学形式不仅完全适用于有限维经典力学系统,而且还适用于连续介质力学系统和经典场论,所以它不受维数的限制;此外,它也不受经典力学局限性的限制,可以适用于微观领域的量子力学和量子场论,以及高速运动系统的相对论力学和强引力场下的广义相对论,当然,它也不限于单纯的力学系统,同样适用于热力学与统计物理、电磁场系统、机电偶联系统等.分析力学之所以具有普适性,主要原因有三个方面:一是分析力学在解决“欠定”问题时,采用了系统观点,不拘泥于单个质点的运动分析.例如理想约束和 d′Alembert-Lagrange原理是对所有质点要求满足的条件,而单个质点未必满足,这导致用能量概念代替了Newton矢量力学惯常适用的加速度和力的概念来表达运动方程,而能量的概念自然不限于有限维约束力学系统,所以上述三类方程可以具有通用性;二是引入了更具一般性的 Hamilton 积分变分原理代替了 Newton 定律,这个原理包括 Newton 定律,但超越了 Newton 定律的适用范围,迄今为止它仍然具有普适性;三是分析力学系统具有辛几何结构及其对称性,尽管分析力学创立之初是想避免 Newton 矢量力学微分几何工具和矢量图示,正如 Lagrange 著作中不采用图形而是解析地表述运动方程及其解,但是分析力学最终还是被赋予了更优美的辛几何结构,而这种几何结构具有的对称性掌管着运动微分方程及其守恒定律,这个内在逻辑超越了 Newton 经典力学,符合现代物理学基本原理.

正是因为分析力学的普适性,物理学和力学等动力学系统诸多研究领域不断地从其中借鉴方法,这导致了分析力学与新兴学科的相互促进.例如量子力学的建立、Feynman 路径积分量子化、KAM 理论、对称性约化、Gromov 辛几何,以及本世纪初以来的辛拓扑等都展示了它们与分析力学的深刻渊源.下面我们仅列举几个需要分析力学的初学者和研究者认真关注的重点问题.

2 关于微分变分原理与积分变分原理

在分析力学中,构建约束力学系统的运动微分方程不能直接运用 Newton 定律,而需采用变分原理.分析力学的变分原理可以分为微分变分原理和积分变分原理,前者主要包括 d′Alembert-Lagrange 原理、Jourdain 原理和 Gauss 原理,它们皆体现理想约束假定,后者主要是 Hamilton 原理,它源自于几何光学的 Fermat 原理和 Huygens 原理.在处理理想约束系统时,最常用的是 d′Alembert-Lagrange 微分变分原理,但是能够体现极值特性的当属 Gauss 原理,它要求真实运动的 Gauss 拘束函数 $Z(\ddot{\boldsymbol{r}})=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}m_i(\ddot{\boldsymbol{r}}_i-\boldsymbol{F}_i/m_i)^2$ 取极值,即 $\delta Z=0$,而这种情况对应于约束力取极小值,Gauss 原理应该是更基本、更通用的微分变分原理[2],它与广义逆矩阵理论的结合能给出完整与非完整力学系统统一的表述形式[3].对于完整约束力学系统,Hamilton 积分变分原理与微分变分原理是一致的,当局限于保守系统时,它是一个稳定作用量原理.在有些中外教科书中,经常将这个原理称为最小作用量原理,严格说来,它应该称为稳定作用量原理或驻值原理,只有在特定条件下才是最小作用量原理,我们来简要给出这个条件.当我们在位形流形上取正规 Lagrange 函数的作用量泛函时,从固定初始点出发,只要积分区间足够小,我们可以构造一个以初始固定点为中心的驻值轨道场,过这个场区域的每一个点仅有一条真实驻值轨道通过,可以证明在这个区域内 Haimilton 作用量泛函 S 沿着驻值轨道取极小值,即 $\delta S=0,\delta^2 S\geqslant 0$;当我们从固定初始点出发在延展这个中心驻值轨道场,以达到第一个共轭动力学焦点[2,4],这个焦点就是使得作用量泛函不再是极小值点,即满足 $\delta S=\delta^2 S=0$ 的点这个点恰是关于广义坐标变分的 Jacobi 方程:$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\mathbb{L}}{\partial(\delta\dot{q}^{\mu})}-\frac{\partial\mathbb{L}}{\partial(\delta q^{\mu})}=0$ 的零特解给出的点.如果给定力学系统的 Jacobi 方程没有零特解,即不存在共轭焦点,则相应的 Hamilton 原理就是在整个区域上的最小作用量原理.例如,

平面抛体运动问题中每一个抛射运动的 Hamilton 作用量在($t>0$)都是最小的.

3　非完整约束力学系统

3.1　非完整系统的特点与困惑

非完整系统是一类受到 Frobenius 意义下不可积微分约束的力学系统[2,5-7].不可积微分约束又称为非完整约束,它不能积分成对位形的几何约束方程,使得非完整约束只能限制力学系统的速度空间或动量空间,而限制不了系统的位形空间,从而非完整系统的独立速度分量数小于独立坐标数.这样,力学系统的状态空间或相空间就失去了辛结构.在没有辛结构的相空间上,动力学向量场(即运动微分方程)一般不会是 Lagrange 或 Hamilton 的,这等价于说,其相空间的曲线空间上的泛函在通常意义下不能取极值,即不能像其它动力学系统那样,直接用 Hamilton 积分变分原理来推导非完整系统的运动微分方程.非完整约束对 Lagrange、Hamilton、Poisson、Jacobi 等创立的经典分析力学提出了挑战,在变分法、基本原理、运动方程、可积性、定解问题等方面都产生了诸多令人困惑的问题.然而,非完整系统又是极其常见的力学系统,如平面上纯滚动的球、圆盘等,而这样平常的力学系统能否用、如何用Lagrange 力学和 Hamilton 力学来描述却成了问题,这在力学和数学领域引起长期争论,几乎伴随了非完整力学的整个发展进程[8-21].非完整约束直接挑战了分析力学的 Hamilton 原理,它只能容许 d'Alembert-Lagrange原理,这让诸多数理学家始终不甘心.直到上个世纪 80 年代,Kozlov(1983)再一次借助 Hamilton 积分变分原理,构建了 vakonomic 模型(又称 vacco 模型)[22,23],至此形成了非完整力学两种不等价模型:Chetaev 模型[24,25]和 vakonomic 模型,这引起了 80 年代末至 90 年代初关于非完整系统的建模问题的激烈争论,也促使人们认识到:近一个世纪对非完整系统的各种困惑与这类系统的几何结构有着密切的关联.

3.2　非完整力学的几何动力学

非完整力学的现代发展始于上世纪 90 年代初,是以开辟几何力学方向为标志的,因近几年在几何数值积分和几何控制的应用而光大.在非完整系统几何力学近 30 年的发展历史中,前半段主要成果集中于非完整系统几何结构的研究,将流形、纤维丛、联络、Lie 群与 Lie 代数、动量映射和对称约化等现代数学方法引入非完整力学,解决了在传统变分法、张量分析和微分方程层面上出现的若干新的几何问题和动力学问题,对非完整系统两种不等价动力学模型的争论问题有了结论:Chetaev 模型是符合惯性原理的物理(力学)模型,属于定解问题,而 vakonomic 模型是符合控制原理的数学模型,但不是定解问题,其方程的解有内在非初始随机常数.例如对于 Chaplygin 非完整系统,在几何上可以将这两种模型的运动轨迹分别形象地表述为 Riemann-Cartan 空间上的"直线"(自平行线)和短程线(测地线),非完整约束的不可积性导致力学系统可以有两种不等价模型,如同挠率导致 Riemann-Cartan 空间的最直和最短概念的分离[13,26].尽管在较长时间内 Cheteav 模型主导了非完整力学的研究领域,但是伴随着几何控制对非完整力学的引入,vakonomic 模型也开始有了用武之地[22,27-30].这两种模型各自能发挥作用体现了非完整力学的魅力所在,也验证了 R.W.Brockett 的名言:"控制理论是一门规定性的科学,而物理学、生物学等是描述性的科学,因此,前者是工程科学,后者属于自然科学"[31].

3.3　非完整力学的发展趋势

近 5~10 年来,非完整力学的理论和工程应用研究方兴未艾,几何力学、几何数值积分、几何控制在这个领域的综合运用,促使机器人动力学、多体动力学、运动规划与控制,以及数学、物理和力学的相关领域共同关注非完整约束力学及其现代研究方法,这也是分析力学最重要的现代研究方法之一[32].在这个研究领域,继解决动力学建模之争和几何框架几近完善之后,现代非完整力学的研究主题将是两个方面:一是非完整系统动力学特性的深入研究,特别是全局分析与典型系统的紧密结合,解析方法与数值方法、几何拓扑的结合;二是非完整系统的运动规划与控制,将动力学及几何积分与几何控制结合,实现非完整力学在机器人、潜器等工程科学领域的应用.如同每一个动力学系统理论都绕不过去可积性问题一样,非完整力学的可积性分析也是非完整力学最重要的课题之一,这个课题将深化该系统的全局特性研究,密切关联于其对称性、奇异性、单值性[33]等根本问题,从而促进与其它相关领域的交叉研究和应用研究.

4 Birkhoff 系统

4.1 Birkhoff 问题的由来

构建 Birkhoff 系统得从 Lagrange 逆问题和 Hamilton 逆问题说起.在分析力学中,围绕齐次 Lagrange方程和 Hamilton 正则方程已经建立了一整套积分理论,只要能构造力学系统的作用量,就有望利用这些积分方法对运动方程进行求解,因而尽可能将一般的运动微分方程“美化”成 Lagrange 形式或 Hamilton 形式自然是求解运动微分方程的捷径.然而,这种做法是有局限性的,也就是说,运动微分方程必须满足自伴随条件才能实现Lagrange 化或 Hamilton 化,对于二阶常微分方程来说,这个自伴随条件就是 Helmholtz 条件.保守力学系统的运动方程自然满足这个自伴随条件,而一般的非保守力学系统的运动微分方程不满足这个条件.在上个世纪 20 年代,Birkhoff 提出了一个新的积分变分原理,现称之为 Pfaff-Birkhoff 变分原理,这个原理比 Hamilton 变分原理更具一般性,其 Birkhoff 作用量为 $S=\int_{t_1}^{t_2}[R_\alpha(t,\alpha)\dot{\alpha}^\alpha-B(t,a)]\mathrm{d}t$,其中 $\alpha^\alpha=(q^\mu,p_\mu)$,$B(t,\alpha)$ 可以代表动力学系统的能量,称为 Birkhoff 量,$R_\alpha(t,\alpha)$ 称为 Birkhoff 函数.采用 Pfaff-Birkhoff 变分原理可得到 $2n$ 个运动方程,即 Birkhoff 方程:$\left(\frac{\partial R_\beta}{\partial\alpha^\alpha}-\frac{\partial R_\alpha}{\partial\alpha^\beta}\right)\dot{\alpha}^\beta-\left(\frac{\partial B}{\partial\alpha^\alpha}+\frac{\partial R_\alpha}{\partial t}\right)=0$.显然,它不再是正则方程,坐标 q^μ 与动量 p_μ 不再是正则坐标与正则动量.因为 Birkhoff 方程来自于变分原理,所以它是自伴随的.用 Birkhoff 方程描述的系统称之为 Birkhoff 系统,最详细的描述见文献[34-36].

4.2 Birkhoff 力学的基本特征

Birkhoff 系统与 Hamilton 系统相比,具有如下显著特征:(1) Birkhoff 系统的运动方程具备一定的通用性,它的存在需要满足如下四个条件:a.力学系统是局域的,即相互作用是基于点模型的,不表现为非局域化的微分-积分形式,其运动方程只能是微分方程;b.力学系统是解析的,即动力学函数可以展开成收敛的幂级数,局域性质依赖于局域性,但不依赖于自伴随条件;c.力学系统是正规的,即运动方程是满秩或最大秩的,它保证了独立性和可逆性.但这个条件在对称约化下可以改变,例如刚体定点转动的正则方程约化为 Euler 方程时即是如此.另外,自伴随性质不依赖于正规性,如后面即将提到的非完整系统的 Birkhoff 化;d.力学系统是完整的,即若受到约束作用,则约束在 Frobenius 意义下是可积的.只要满足上述条件,力学系统即使是非保守的,也能转化成自伴随的 Birkhoff 方程.(2) Birkhoff 系统是分析、代数、几何的共栖地,它的解析性质来自于 Pfaff-Birkhoff 积分变分原理,这也孕育着这个系统具有 Lie 代数与辛几何特性,当 Birkhoff 系统自治时,它具有 Lie 代数结构;而辛结构总是存在的,这个辛结构与 Hamilton 系统的简单辛结构不同,它的辛形式 $\Omega=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial R_\beta}{\partial\alpha^\alpha}-\frac{\partial R_\alpha}{\partial\alpha^\beta}\right)d\alpha^\alpha\wedge d\alpha^\beta$ 虽然满足正规和闭的条件,即可积性或自伴随条件,但是它的结构与系统所受到的非保守力有关,Birkhoff 力学的普适性在很大程度上就体现在这个辛形式的一般性上,这也告诉我们,辛结构不是保守力学系统的专利.(3) Birkhoff 方程存在规范对称性问题.如同电磁场的 Maxwell 方程组中存在 Coulumn 规范和 Lorentz 规范条件一样,Birkhoff 方程也存在一种特殊的规范变换,它保持方程的形式不变.此外,Birkhoff 方程的推导可以不限于 Pfaff-Birkhff 变分原理,我们也可从偏微分方程可积性定理,即 Cauchy-Kovalevski定理来构造它,从这个构造中可以发现 Birkhoff 方程还需要一个方程来陪伴才能构成一个完备的可积方程组,或者说 Birkhoff 方程有不确定解,甚至无穷多解,除非我们规定 Birkhoff 量就是系统的能量,才能使得 Birkhoff 方程及其初始条件成为定解问题.当我们不限定 Birkhoff 量的特定物理意义时,与 Birkhoff 方程相伴的那个方程就可以成为我们确定 Birkhoff 量和 Birkhoff 函数的规范条件[37].

4.3 关于 Birkhoff 力学的发展

与 Lagrange 力学和 Hamilton 力学不同,我们不能根据力学系统的动能和势能直接写出 Birkhoff 系统的动力学函数,这是 Birkhoff 力学的难点.目前,有三种常用方法来构造 Birkhoff 函数组:一种是 C-K 方法,即先规定 Birkhoff 量的能量意义,在利用偏微分方程的 Cauchy-Kovalevski 可积性定理来确定 Birkhoff 函数;二是直接对 Birkhoff 方程进行积分求解;三是对于存在足够独立第一积分的情况求解.在此我们需要对 Birkhoff 力学做几点说明:(1)充分利用偏微分方程的可积性定理,对前述之

Birkhoff 方程的规范对称性进行细致研究,找到适用于不同非保守力系的 Birkhoff 函数的特殊构造方法,但构造这些函数也不是最终目的,最终还是求出 Birkhoff 方程规定的非正则坐标和动量随时间的演化.而目前的文献多是把求解 Birkhoff 函数作为目的,这是需要突破的瓶颈.(2)从 Pfaff-Birkhoff变分原理推导出的 Birkhoff 方程是偶数维的,这是有局限性的.事实上,从偏微分方程的可积性定理可知,可积性与维数无关,Birkhoff 方程不必是偶数维的,但是相应的正规性条件则可以放宽,这可以视为广义 Birkhoff 系统.在这种情况下,切触流形上的基本 2-形式不是非退化的,但是仍然是闭的,从而可以保持自伴随性质,Birkhoff 方程的这个特征恰好有助于非完整力学系统的自伴随表示或 Birkhoff 化.通常,非完整力学系统过的基本 2-形式是正规的,而不再是闭的,这个非闭合性质来自于约束的非完整性.但是,如果我们将非完整系统的运动方程化为一阶的,根据 C-K 定理,它总可以实现 Birkhoff 表示,但其几何结构是预辛的.这样一来,实现了非完整系统的自伴随化,而将非完整性表现在 2-形式的非正则性上[37].(3)Birkhoff 系统的一般辛结构是非保守力学系统辛算法的理论依据.目前,许多学者将保守系统的辛算法直接外推到非保守力学系统,这实际上是将保持简单辛结构的辛算法直接外推到非保守系统,而非保守系统的辛结构不是简单的,它与非保守力有关,所以这种推广缺乏理论依据.在构造非保守系统的辛算法时,如何从一般的辛结构出发或者借助于这个辛结构来评估离散化的误差具有非常重要的理论意义和实际意义.

5　Noether 对称性与 Lie 对称性及其推广

5.1　对称性与守恒定律关系之演化

关于对称性和守恒量的话题,在一个多世纪以前主要局限于能量守恒定律、动量守恒定律、角动量守恒定律、电荷守恒定律等,而且多数经典物理学家们把守恒定律视为动力学定律的产物,而不是对称性的结果.例如,在十九世纪后半叶(1865)Maxwell 电磁场理论已经发展得十分完善,它所具有的 Lorentz 协变性和规范对称性已为人知,但经典物理学大师 Lorentz 却不以为然,仍然提出以太假设来加以维护机械论观点,使得电磁场方程所具备的对称性本质被冷落了 40 余年,直到上个世纪初,Einstein 创立的狭义相对论(1905)和广义相对论(1915)才见证了对称性如何支配包括电动力学在内的物理学定律.1920 年代至 1930 年代,Wigner 对量子力学对称性的研究也同样见证了对称性对微观世界运动规律的支配作用.守恒律究竟是运动定律的结果还是对称性的结果,或者说,究竟是运动定律具有对称性还是对称性支配运动定律这个问题同样深刻影响着经典动力学的现代发展.

5.2　Noether 对称性、Cartan 对称性与守恒量

Noether 定理反映了动力系统的对称性与守恒量之间的对偶关系,这个关系是 Noether 在一个世纪以前(1918 年)发现的,起初的工作只针对 Lagrange系统的作用量泛函在点变换群作用下的不变性,从而导致守恒量的存在.虽然这个工作不是 Noether 一生最主要的学术贡献,但是这个贡献在物理学、力学等领域发挥了重要作用,例如将 Noether 定理用于量子场论,令 Lagrange 量具有局域规范不变性,即在群参数时空局域化的变换群下保持不变,引出非常重要的规范场,如 Yang-Mills 规范场,从此改变了超距作用的物理观念;在分析力学中,将 Noether 守恒量推广到动量映射,构建了对称性约化理论,推动了几何力学和几何控制理论的发展.再次,我们仅就有限维力学系统评述 Noether 对称性理论,对这个理论的简单概括就是作用量泛函在无穷小 Lie 变换群下的不变性质.通常的做法是:首先计算 Lagrange 函数的作用量泛函之非等时变分,再将位形空间上广义坐标和时间的非等时变分联系于位形空间上的无穷小 Lie 变换群,并要求作用量泛函对这个变换群具有不变性,从而得到力学系统的守恒量.反之,对于给定的守恒量也可找到 Noether 对称性.关于 Noether 理论的早期评述可参考文献[38].对此,需要对 Noether 定理作如下说明:(1)Noether 定理只是给出力学系统的对称性与守恒量之间偶对的逻辑关系,在实际问题中需要求解对称性条件的具体偏微分方程,即 Killing 方程,它是变换群的 Lie 代数基底(又名 Killing 矢量)所满足的方程,得到这个 Killing 矢量才能根据规范程序构造出力学系统的守恒量.这一点对于广义坐标选取不当的情况尤为重要,例如在二体有心运动情况下,如果采用笛卡尔直角坐标系,则系统的Lagrange函数没有循环坐标,因而较难

判断出它存在广义动量,但是我们可以利用求解Killing方程的方法,找到对称性及其守恒量,而不必做坐标变换到极坐标系中考虑[39].(2)在几何上,作用量泛函的不变性是切触流形 $TQ\times R$ 上Poincare-Cartan形式 θ_2 在位形流形 $Q\times R$ 上的Lie变换群之Lie代数矢量 X 对切丛一阶拓展 $X^{(1)}=\tau\frac{\partial}{\partial t}+\xi^\mu\frac{\partial}{\partial q^\mu}+(\dot{\xi}^\mu-\dot{q}^\mu\dot{t})\frac{\partial}{\partial\dot{q}^\mu}$ 作用下的不变性或恰当性,即 $L_{X^{(1)}}\theta_L=df, f\in C^\infty(Q\times R)$,由此可得:$L_{X^{(1)}}\Omega_L=0$.这说明Noether对称性是保持切丛的基本2-形式不变的辛群;(3)Noether对称性可以推广到Cartan对称性,即无穷小Lie变换群从位形流形 $Q\times R$ 拓展到切触流形 $TQ\times R$ 上,使得Killing方程变为 $L_{Y^{(1)}}\theta_L=dF$,其中 $F\in C^\infty(TQ)$,$Y\in\mathcal{X}(\pi)$(沿着 $\pi:TQ\times R\rightarrow Q\times R$ 的矢量场的集合)[40].这种拓展可以使我们找到更多的对称性,例如在Kepler问题中,根据Noether对称性只有能量守恒和角动量守恒,但是这两个守恒定律不限于Kepler问题,凡是有心运动都有这两个守恒量,可见Noether对称性仅就这个Kepler问题就表现出局限性,一定还有新的守恒量使得一般的有心运动变为稳定的周期轨道运动,这个守恒量就是Runge-Lenz矢量或与其正交的Haimilton矢量[41,42],Runge-Lenz矢量的方向是从力心指向近日点,大小为 $R=\mu ke$,其中 μ 是Kepler运动的折合质量,k 是相互作用势的参数,即 $V(r)=-k/r$,e 是椭圆轨道离心率,Runge-Lenz矢量形式为 $\boldsymbol{R}=\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{L}-\mu k\boldsymbol{r}/r$,按照Cartan对称性、能量、角动量、Runge-Lenz矢量 $\boldsymbol{R}$ 或Hamilton矢量 $\boldsymbol{H}=\boldsymbol{L}\times\boldsymbol{R}/L^2$ 是其对应的守恒量,只不过Runge-Lenz矢量是Cartan对称性对角动量作用的导出量,但这不改变其函数独立性.有时,也可将Cartan对称性称为广义Noether对称性.

5.3 Lie对称性及其推广

动力学系统的对称性不限于Noether对称性,对称性与守恒量之间的关系也不局限于Noether理论,早在十九世纪中后期S. Lie就对运动微分方程在无穷小变换群作用下的不变性进行过深入的研究,这个对称性是要求运动微分方程的解集 Λ 在Lie变换群 $\Phi:Q\times R\rightarrow Q\times R$ 作用下不变,即 $\forall\gamma\in\Lambda$,$\Phi\cdot\gamma\in\Lambda$,或者令位形流形上的Lie群生成元 X 的一阶拓展 $X^{(1)}$ 对二阶微分方程矢量场 Z 的作用满足 $L_{X^{(1)}}Z=[X^{(1)},Z]\lambda Z$.一个多世纪后人们还在继续他开创的研究工作,已经发展成运动微分方程的动力学对称性和伴随对称性[43-46].所谓二阶微分方程矢量场 Z 的动力学对称性是指切触流形上Lie变换群 $\Psi:TQ\times R\rightarrow TQ\times R$ 保持 Z 的曲线积分族 $\wedge$ 不变,即 $\forall\gamma\in\wedge$,$\Psi\cdot\gamma\in\Lambda$,利用群的生成元 Y,则动力学对称性表示为 $L_YZ=[Y,Z]\lambda Z$.我们也可用切触流形上的不变微分1-形式 β 来表示二阶微分方程矢量场的对称性,即 $i_z\beta=0$,$L_Z\beta=0$.现在,我们需要做几点说明:(1)Lie对称性、动力学对称性和伴随对称性作为微分方程的对称性,它们不限于保守力学系统,对于二阶微分方程矢量场 Z 的伴随对称性 β 所对应向量场 $X:\beta=i_X\Omega$,一般不是动力学对称性,除非 Z 自伴随的或者说非退化2-形式 Ω 是闭的.我们可以统称这些对称性为微分方程的对称性.(2)二阶微分方程矢量场的动力学对称性和伴随对称性都包括了动力学系统的测地运动方程和测地偏离方程,而测地偏离方程恰是运动方程的伴随方程.考虑切触流形 $TQ\times R$ 的基矢量 $\left\{Z,\frac{\partial}{\partial q^u},\frac{\partial}{\partial\dot{q}^u}\right\}$ 及其对偶的基1-形式 $\{\mathrm{d}t,\theta^\mu=\mathrm{d}q^\mu-\dot{q}^\mu\mathrm{d}t,\omega^\mu=\mathrm{d}\dot{q}^\mu-f^\mu\mathrm{d}t\}$,构造 Z 的不变1-形式 $\beta=\lambda_\mu+\rho_\mu\omega^\mu$,则运动方程的伴随方程为:$\ddot{\rho}_\mu+\rho_v\frac{\partial f^v}{\partial\dot{q}^\mu}-\rho_v\frac{\partial f^v}{\partial q^\mu}=0$,其中 $f^\mu(t,q,\dot{q})=\ddot{q}_\mu$.例如,阻尼振子 $\ddot{q}+2n\dot{q}+k^2q=0(k>n>0)$ 具有伴随对称性,它的伴随方程为 $\ddot{\rho}-2n\dot{\rho}+k^2\rho=0$[47].(3)在 $i_{X^{(1)}}L_Z\Omega=0$ 条件下,Cartan对称性是动力学对称性,Noether对称性是Lie对称性,显然保守力学系统自然满足这个条件.但是,反过来却不对,即动力学对称性和Lie对称性一般不是Cartan对称性或Noether对称性,即使使保守力学系统亦是如此.例如,Kepler问题的Lie对称性可以用三个Killing矢量来表示,其中前两个也是Noether对称性的,分别对应于能量和角动量,后一个对应于Runge−Lenz矢量,但它不是Noether的[40].(4)一般情况下,微分方程的对称性并不与守恒量相对应,但当它们满足一定条件时,也存在着守恒量.在此简要介绍Lutzky的非Noether型守恒量理论[48-50].设系统的Lagrange函数为 $L(t,q,\dot{q})$,Poincare-Catran形式为 θ_L,二阶微分方程矢量场 Z 的Lie对称性 X 不是Noether型的,所以可设 $L_{X^{(1)}}\theta_L\triangleq\theta_{L'}$,其中 $L'=X^{(1)}(L)+L\dot{\tau}$,从而在Hess矩阵元之间存在变换矩阵 Δ_μ^ν,满足:

$L'_{\mu\nu}=\Delta_{\mu}^{\nu}L_{\mu\nu}$,亦即 $\Delta_{\mu}^{\nu}=L'_{\mu\rho}L^{\rho\nu}$.由这个矩阵($\Delta_{\mu}^{\nu}$)构造的不变形式就可以得到守恒量,如 $\det(\Delta_{\mu}^{\nu})$ 和 $\mathrm{tr}(\Delta_{\mu}^{\nu})$ 就是非 Noether 型守恒量.例如,前面提到的 Runge-Lenz 矢量是非 Noether 型的 Lie 对称性的守恒量.作为一个练习,也可以考察一维谐振子的 Lie 对称性,这个系统的完全对称性群是 8 参数特殊线性群 $SL(3)$,它有一个 5 参数子群,是 Noether 对称性,但其相应的 5 个守恒量中只有 2 个是独立的[51],我们可以考察另外 3 个非 Noether 型的 Lie 对称性是否存在守恒量.

在上述阐述中经常提到 Kepler 问题中的 Runge-Lenz 矢量是非常重要的守恒量,它在 Kepler 问题中决定了有心运动的轨道周期性以及椭圆的方向和形状.在早期量子力学的发展中,Pauli(1926)用这个矢量来推导氢原子能级,Bargmann(1936)利用 Kepler 问题中角动量与 Runge-Lenz 矢量的对易关系来验证 Fork(1935)给出的氢原子定态问题的四维转动群结构.对于那些沿着近椭圆轨道的运动问题,如水星轨道近日点的进动[54]和低海拔卫星的运动分析[52,53]等,Runge-Lenz 矢量的运用也给计算带来了便捷.Runge-Lenz 矢量表明 Kepler 问题存在隐含对称性,它的完全对称性是 6 参数的四维转动群[55].

6　分析力学与辛几何结构

6.1　辛几何概念的由来

尽管分析力学的这个取名就昭示着它有别于 Newton 矢量力学,但是它无论如何也没有逃脱几何结构,只不过是摆脱了“可视化”的几何,又创造了一种新的几何构造——辛几何.辛几何一词来源于希腊词 symplectic = sym+plectic,词义为缠绕在一起,它与来源于拉丁词的 complex = com+plex 类同,所以曾经被数学物理学家 Weyl 用混,他先是将今天我们所熟悉的辛群命名为复群(complex group),后来又发现这与复数概念常混淆,便于 1938 年在其著作《The Classical Groups: Their Invariants and Representations》中首次引入 symplectic group 来代替 complex group[56].所谓辛流形是偶数维的微分流形 M,其上定义了非退化的、闭的 2-形式 Ω,即 $d\Omega=0$.前面提到的保守力学系统所处的相空间就是典型的辛流形,它是位形流形的余切丛,即 $M=T^*Q$,具有简单的辛结构 $\Omega_0=dp_\mu\wedge dq^\mu$,相应的 Hamilton 系统可用三元组($T^*Q,H,\Omega_0$)来描述,Hamilton 正则方程可整体的表示为 $i_{X_H}=-dH$.

6.2　辛流形的局部正则结构

在辛流形 M 任意点的邻域上都存在一个正则坐标系(q^μ,p_μ)($\mu=1,2,\cdots,n$),满足 $\Omega=dp_\mu\wedge dq^\mu$,这是辛流形基本结构定理—Darboux 定理,据此,所有同维数的辛流形在局部上都是相同的.这种局部正则化结构可以推广到辛流形的 Lagrange 子流形的管状邻域上.所谓 Lagrange 子流形 L 是 $2n$ 维辛流形 M 的 n 维子流形,辛结构在其上退化,在它的一个管状邻域上也存在正则辛结构,这就是 Darboux-Moser-Weinstein 定理[57,58].如果我们进一步要求这个 Lagrange 子流形还满足一些几何和拓扑条件,则这个正则化范围还会扩大或变化.例如,要求 Lagrange纤维化辛流形的纤维空间是连通的和紧致的,则这个纤维空间将是胎面 T^n,从而得到特定的 Lagrange 丛[61],其局部辛结构为 $\Omega=dl_\mu\wedge d\gamma^\mu$,其中正则坐标($l_\mu,\gamma^\mu$)称为作用—角变量,这是完全可积系统的辛几何结构[59].

6.3　保辛结构的对称性—辛群

辛流形的局部同构特征使其具有保持辛同构的对称群 $Sp(M,\Omega)$.如果辛同构映射的生成元为 X,则辛同构映射等价于 $L_X\Omega=0$,此即 $d(i_X\Omega)=0$,据 Poincare 引理,这意味着在辛流形的局部上总存在一个函数 H,使得 $i_X\Omega=-dH$.此时,可称 X 为局部 Hamilton 向量场,H 为局部 Hamilton 函数,这个方程实为 Hamilton 正则方程的几何表述.如果 $i_X\Omega$ 是恰当的,则 X 称为整体 Hamilton 向量场.局部 Hamilton 向量场能否成为整体的,这取决于辛流形 M 的上同调群 $H^1(M)$ 是否为零.例如,$T^2=S^1\times S^1$ 上的向量场 X 只能是局部 Hamilton 的,因为 T^2 的上同调群为 $H^1(T^1)=\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$[60].由此可见,辛流形上的动力学受制于辛流形的对称性或几何结构,对辛流形几何结构的分析有助于我们深刻理解分析力学的本质.作为另一个例证,我们考虑辛流形局部正则化结构以及余切丛化问题对于 Lagrange 逆问题、Hamilton 逆问题、Birkhoff 逆问题以及可积性问题的作用.

6.4 辛流形的整体性质

由 Darboux 定理可知,相同维数的辛流形在局部上是无法区分的,辛流形没有局部不变量,要区分同样维数的辛流形只能从其整体结构去研究.最早涉及辛流形整体性质的命题是 Poincare 的最后几何证明,这个定理断言:环面的保面积旋转映射至少具有两个不同的固定点[61].这个定理在 1920 年代被 Birkhoff 证明,故又称为 Poincare-Birkhoff 定理,这是辛几何领域的第一个辛拓扑定理.自 1960 年代,人们才开始真正关注辛流形的整体问题,如 1965 年的 Arnold 猜想(即辛微分同胚总具有一些固定点),1970 年代的 Weinstein 猜想(即在凸超曲面上存在周期轨道)[62].特别值得一提的是,Moser[63]在 1965 年提出了一种证明 Darboux 定理的全新方法,后被称为 Moser 技巧,Moser 的贡献在于两个方面:一是证明了辛流形没有局部不变量,更进一步向人们揭示了寻找辛流形整体结构的艰难和意义,二是创造了一种研究辛结构的新方法—Moser 技巧,这极大地推动了辛几何的研究工作,例如 Weinstein 用来研究辛流形的基本定理的整体化,得到辛流形的基本定理(Darboux 定理)的整体化,得到辛流形的 Lagrange 子流形的管状邻域内的正则辛结构[63].1970 年代由 Weinstein 和 Robinowitz[64]开创的研究辛结构的变分法也非常有效,直接导致 1983 年 Conley 和 Zehnder 对 Arnold 猜想的证明[65].至今,变分法也是行之有效的方法,成为证明辛几何里程碑意义的 Gromov 不可压缩定理的三种有效方法之一,并且在之后发展了辛容积(symplectic capacity)的变分理论,如 Ekeland-Hofer 容量[66,67]和 Hofer-Zehnder 容量[68].

辛几何发展历程中最具划时代意义的公认成果当数 1985 年由 Gromov 利用拟全纯(pseu-doholo-morphic)曲线方法给出的辛流形不可压缩定理[69].对于辛空间$(\mathbb{R}^{2},\Omega_0)$的球体 $B_r^{2n}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^{2n}\mid x^2+y^2<r\in\mathbb{R}^+\}$ 和辛柱体 $Z_R^{2n}=B_R^2\times R^{2n-2}=\{(x,y)\mid x^2+y^2<R\in\mathbb{R}^+\}$,这个不可压缩定理指出:如果存在一个辛嵌入映射 $\phi:B_r^{2n}\to Z_R^{2n}$,使得 $\phi(B_r^{2n})\subset Z_R^{2n}$,则 $r<R$. Lalonde 和 McDuff[70]将这个定理推广到一般的 $2n$ 维辛流形(M,Ω),即如果存在一个辛嵌入映射 $\Phi:B_r^{2n+2}\to B_R^2\times M$,使得 $\Phi(B_r^{2n+2})\subset B_R^2\times M$,则 $r<R$.

Gromov 的杰出贡献主要体现在两个方面:一是 Gromov 不可压缩定理的拟全纯曲线证明开创了辛拓扑研究方法的新时代.尽管 Gromov 不可压缩定理还可以用辛容量的 Ekeland-Hofer 变分理论和 Viterbo 的整体化生成函数理论来证明[71],然而拟全纯曲线方法被证明是对任意流形都是行之有效的,例如与 Yang-Mills 联络理论关系密切,这激发了 Floer 发展了辛流形上一种新的同调理论,Floer 同调论可以建立许多流形上的 Arnold 猜想[72],Floer 同调论与辛容量的 Ekeland-Hofer 变分理论组合起来,可以确立辛拓扑的 Floer-Hofer 理论[73].Gromov 的杰出贡献引领了 1980 年代末期至上个世纪末辛拓扑的发展,掀起了 1990 年代辛几何发展的热潮,形成了辛容量、辛范畴、镜像对称性、Gromov-Witten 不变量[74]等诸多研究热点,这与 1970 年代辛几何发展的第一个热潮有显著的区别.二是 Gromov 不可压缩定理的结论开辟了辛几何理论及其应用研究的新天地.辛几何的 Darboux 定理揭示了辛变换群的柔性(flexibility),而 Gromov 和 Eliashberg 不可压缩定理却揭示了辛变换群的刚性(rigidity):辛变换群 $Sp(M,\Omega)$ 作为微分同胚群 $\mathrm{D}iff(M)$ 的子群,它相对于 c^0 拓扑,在 $\mathrm{D}iff(M)$ 中是闭的.这对辛变换群保相体积不变的经典 Liouville 定理是一个极大的挑战:辛流形的相体积再也不可能任意细长了!再也不会有“骆驼穿针”.准确地说,相空间中半径为 r 的球不可能通过辛同胚映射穿过位形—动量平面上面积小于 πr^2 的洞,这就是经典力学的“测不准原理”[75-77].可见,量子力学没有广义相对论遇见 Riemann 几何那种幸运,然而这个“迟来”的结论给量子力学的诞生留下了永远遗憾的同时,也给经典力学和量子力学提供了发展的契机,这必将激发人们对几何力学、动力学系统的可积性、KAM 理论、超弦理论、量子拓扑等问题的研究热情,所得成果也将超出 1970 年代的对称性约化成果对几何力学的贡献.

7 Lie 群作用与对称性约化

7.1 对称性约化的由来

近半个世纪以来,在分析力学的理论发展过程

中,对力学、物理学诸多方向产生重要影响的最主要的成果当数对称性约化理论,这些影响不限于传统的质点和刚体力学系统,已经应用到经典场、流体、等离子体、弹性体,甚至应用于量子和相对论性理论之中,这一贡献充分说明抽象理论研究的科学意义以及对应用研究的深刻影响.自有分析力学以来,对称性和守恒量问题就备受 Lagrange、Hamilton, Jacobi、Routh、Riemann、Lioubille、Lie、Poincare 等著名学者的关注,这是因为力学系统存在对称性和守恒量,可以对系统进行约化,而且可以借此研究力学系统的相对稳定性等问题,只不过当时处理的对称性问题相对简单和直观,用现代观点来看,就是对称群仅限于 Abel 群,第一积分也是对合的,例如 Routh 约化处理的力学系统具有循环坐标和对合的循环积分.当然,问题早就存在,而研究不可能一步深入到位.与现代对称约化理论关系最为密切的实例就是刚体运动的 Euler 方程,这是 Euler 基于物理观念和 Newton 力学得来的,系统所具有的 $SO(3)$ 对称性不是 Abel 的,从三个 Euler 角表述之位形空间的余切丛(即 6 维相空间)上 6 个 Hamilton 正则方程到 3 个 Euler 方程的转变,Euler 那个时代还没有通用的数学方法.在现代对称性约化理论出现之前,Euler 就能完成如此重要的工作,足见其天才的数学和物理直觉.其实,在十九世纪下半叶对称性约化的思想已经开始萌芽,例如 Lie 已经构造了如今在对称性约化中一定要出现的非正则 Poisson 结构,今天称之为 Lie-Poisson 结构,Poincare 也在上个世纪初构造了流体的 Euler 方程,只是当时他们对辛几何和对称性约化思想还没有理解到位,后被 Arnold 在 1960 年代所认识,如今称之为 Euler-Poincare 约化.现代对称性约化理论建立在辛几何和 Lie 群理论基础之上.

7.2 Lie 群与 Lie 代数的伴随表示

Lie 群是具有微分流形结构的群,它在代数上具有群的一切性质,满足如下四个条件的群元的集合:(1)存在单位元;(2)每一个群元都存在其逆元;(3)在群乘法运算下封闭;(4)满足群运算的结合律.同时,它在几何上满足群乘积运算和求逆运算的光滑性.Lie 群上左不变矢量场的集合构成了 Lie 代数,它同构于 Lie 群单位元处的切空间,这个 Lie 代数的特征表现在其元素在 Lie 括号运算下的反对称性和 Jacobi 恒等式.如果 G 代表抽象 Lie 群,$\mathfrak{g}$ 是 G 的 Lie 代数,$\mathfrak{g}*$ 为其对偶,则 $\xi,\eta,\zeta\in\mathfrak{g}$ 满足:(1)$[\xi,\eta]=-[\eta,\xi]$;(2)$[[\xi,\eta],\zeta]+[[\eta,\zeta],\xi]+[[\zeta,\xi],\eta]=0$.Lie 群 G 上的 $\mathfrak{g}$ 值 1-形式 ω 满足 Maurer-Cartan 结构方程:$d\omega(\xi,\eta)+[\omega(\xi)+\omega(\eta)]=0$.每一个 Lie 群都存在唯一的 Lie 代数,每一个 Lie 代数都有唯一的单连通 Lie 群与之对应,而这个单连通 Lie 群多重覆盖具有同样 Lie 代数的其它复连通的 Lie 群.典型的 Lie 群包括一般线性群 $GL(n,\mathbb{R})$,正交群 $O(n,\mathbb{R})$,酉群 $U(n)$,辛群 $Sp(M,\Omega)$ 等.

Lie 群 G 可以表示在其 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 上,得到其任意群元 $g\in G$ 的伴随表示 $Ad_g:\mathfrak{g}\mapsto\mathcal{L}(\mathfrak{g},\mathfrak{g})$,这个伴随表示的 Lie 代数 ad_ξ 在 $\mathfrak{g}$ 上的表示满足 $ad_\xi\eta=[\xi,\eta]$,$\forall\xi,\eta\in\mathfrak{g}$.Lie 群 G 也可以表示在 Lie 代数对偶空间 $\mathfrak{g}^*$ 上,得到 Lie 群和 Lie 代数的余伴随表示,它们与 Lie 群和 Lie 代数的伴随表示满足对偶关系:(1)$\langle Ad_g^*\alpha,\xi\rangle=\langle a,Ad_{g^{-1}}\xi\rangle$;(2)$\langle Ad_\eta^*\alpha,\xi\rangle=-\langle a,[\eta,\xi]\rangle$,$\xi,\eta\in g,\alpha\in\mathfrak{g}^*$.对于三维特殊正交群 $SO(3)$,它伴随表示和余伴随表示皆为其本身,即 $Ad_{SO(3)}=d^*_{SO(3)}=SO(3)$,Lie 代数 $\mathfrak{so}(3)$ 的伴随表示和余伴随表示则为:$(ad_{\mathfrak{so}(3)}[\cdot,\cdot])=(ad^*_{\mathfrak{so}(3)},[\cdot,\cdot])=\mathfrak{so}(3)\cong(\mathbb{R}^3,\times)$.有了 Lie 群与 Lie 代数的伴随与余伴随表示,我们就借此研究 Lie 群对辛流形的作用.

7.3 辛流形上的动量映射

若 Lie 群 G 对辛流形(M,Ω)的作用 $\Phi:G\times M\to M$ 是辛同胚映射,即对于 Φ 的生成元 ξ_M,满足 $L_{\xi_M}\Omega)=0$,即 $\mathrm{d}(i_{\xi_M}\Omega)=0$,从而根据 Poincare 引理,在局部上存在一个函数 $L_\xi(x)\in C^\infty(M,\mathbb{R})$,满足 $i_{\xi_M}\Omega=-\mathrm{d}J_\xi$.当辛流形的第一个上同调群为零时,这个局部 Hamilton 函数 J_ξ 的存在性就是整体的,此时的 Lie 群对辛流形的作用称为 Hamilton 作用.当辛形式是恰当时,还存在反同态关系 $\{J_\xi,J_\eta\}=-J_{[\xi,\eta]}$,此时的 Lie 群对辛流形的作用是强 Hamilton 的.现在由映射 $J:g\to C^\infty(M,\mathbb{R})$ 可以定义一个对偶的映射,即动量映射 $\mathbf{J}:M\to\mathfrak{g}^*$,满足:$\langle\mathbf{J}(x),\xi\rangle=J_\xi(x)$,$x\in M$,$\xi\in g$.它将 Lie 群在辛流形 M 上的 Hamilton 作用 $\Phi_g:M\to M$,$(\forall g\in G)$ 映射为 Lie 代

数对偶空间 $\mathfrak{g}^*$ 上的余伴随作用 $Ad_g^*:\mathfrak{g}^*\to\mathfrak{g}^*$,即动量映射和 Lie 群作用是对合的[78]:$Ad_g^*\cdot\mathbf{J}\to\mathbf{J}\cdot\Phi_g$.引入对称 Hamilton 系统的动量映射概念对分析力学、几何力学和对称性理论具有划时代的影响,例如动量映射是 Hamilton 系统的第一积分,它包括了 Noether 守恒量.动量映射把对称操作和运算从辛流形 M 上简化到线性空间 $\mathfrak{g}^*$ 上去,例如把 Lie 群 G 在辛流形上的作用轨道 $\mathcal{O}_X=\{\Phi_g x\mid\forall g\in G\}$ 映射为余自伴随轨道 $\mathcal{O}_{\mathbf{J}(x)}=\{Ad_g^*\mathbf{J}(x)\mid\forall g\in G\}$,这是一个齐次辛流形;再如把具有 T^k 对称性的紧致连通辛流形 M 映射为 $\mathfrak{g}^*=\mathbb{R}^k$ 上的凸多面体 $\mathbf{J}(M)$,其各定点为 $\mathbf{J}(x)$ 的极值点($d\mathbf{J}(x)=0$),即凸多面体的各顶点集就是 T^k 对紧致连通辛流形 M 作用的不动点集的像[79-81].

7.4 Cartan 辛约化

对于辛流形(M,Ω)的一个子余迷向流形 N,可以由辛形式诱导其上的闭 2-形式 Ω_N,但这个 2-形式是退化的,从而得到预辛子流形(N,Ω_N).要去除预辛结构的退化性质,找到预辛流形的辛子流形,从而实现辛约化,需要两个条件:一是 Ω_N 是常秩的,二是 Ω_N 的特征叶是单的,即每个特征叶是 N 的闭子流形,而预辛流形被 N 被叶层化的商流形 $\mathcal{M}$上存在唯一辛形式 Ω_M,使得正则投影 $\pi:N\to\mathcal{M}$ 是辛约化,即 $\Omega_N=\pi*\Omega_{\mathcal{M}}$.Hamilton 系统的完整数据包括流形、辛结构和 Hamilton 函数或 Hamilton 向量场,通常将其记作(M,Ω,H),这里讲述了辛流形的保结构约化能否相应地保证 Hamilton 函数和 Hamilton 向量场的辛约化还是个复杂的问题,需要认真分析[58].对于 Hamilton 系统(M,Ω,H),我们可以要求 Hamilton 函数对子流形 N 是容许的,即要求它在辛叶层化子流形 N 的辛叶上是常数,从而在辛子流形$\mathcal{M}$上存在唯一的可微函数$\mathcal{H}$,满足 $H_N=\pi*\mathcal{H}$,对此 $\mathrm{d}H_N$ 是 $ker\Omega_N$ 的零化子的截面,即 $\mathrm{d}H_1:N\to(Ker\Omega_N)^0$,这等价于要求 Hamilton 向量场 X_{H1} 是$(Ker\Omega_N)^\perp$ 的界面,即 $X_{H1}:N\to(TN+(TN)^\perp)$,但是 Hamilton 向量场 X_{H_1}与 $X_{\mathcal{H}}$不相容,即 $T\pi X_{H_1}\neq X_{\mathcal{H}}$.若要求 Hamilton 向量场 X_{H_1}与 $X_{\mathcal{H}}$相容,即 $T\pi X_{H_1}=X_H$,则子流形 N 在 Hamilton 向量场 X_{H_1}的流的作用下应保持不变,可见截面 $X_{H_1}:N\to TN$ 被限制在更小的范围,这意味着 $\mathrm{d}H_1$ 是$(TN)^\perp=Ker\Omega_N+K$ 的零化子截面,容许 Hamilton 函数定义在超出 Ω_N 的特征叶的更大范围内.

7.5 Marsden-Weinstein 约化

力学系统的现代对称性约化理论始于 Arnold(1966)[82]和 Smale(1970)[83],前者考虑的辛流形是 Lie 群的余切丛,集中研究刚体和流体问题,而后者主要贡献在于利用余迷向群将动量映射的水平集叶层化,得到商空间,在其文献中对研究天体力学中的相对平衡的稳定性、对称性和奇异性等问题作了深入研究.对称性约化理论最完备的结论是由 Marsden-Weinstein(1974)[78,84]给出的,他们的成果集成了 Smale 关于动量映射的水平集按着余伴随迷向群叶层化为商流形的思想、Cartan 的预辛流形辛约化的方法和 Souriau 关于一般新作用的动量映射概念,并具有高度概括性[85].对于动量映射 $\mathbf{J}:M\to\mathfrak{g}^*$ 的任意正规值 μ,它的水平集 $M_\mu=\mathbf{J}^{-1}(\mu)$ 是无临界点的光滑流形,这个流形在 Ad_G 的余迷向子群 $G_\mu=\{g\in G\mid Ad_g^*\mu=\mu\}$ 的作用下保持不变.如果迷向群 G_μ 是紧致的,且对水平集 M_μ 的作用是有效作用(即没有不动点),则水平集 M_μ 可分解成 G_μ 的作用轨道集,使得这些轨道空间 $\mathcal{M}_\mu=M_\mu/G_\mu$ 成为光滑流形,它是一个约化辛流形.设投影 $\pi:M_\mu\to\mathcal{M}_\mu$,$i_\mu:M_\mu\to M$.其辛结构 Ω_μ 满足 $\pi^*\Omega_\mu=i_\mu^*\Omega$.$M_\mu$ 上的约化向量场是 Hamilton 的,相应的 Hamilton 函数拉回到 M_μ 上恰是原始 Hamilton 函数对 M_μ 的限制,此时 $\dim\mathcal{M}_\mu=\dim M-\dim G-\dim G_\mu$[78,81].

如前所述,利用动量映射 $\mathbf{J}$ 可以将辛流形 M 上的辛轨道空间$\mathcal{M}_\mu=\mathfrak{g}_x$ 映射到 $\mathfrak{g}^*$ 上去,得到 Ad_g 对 $\mathfrak{g}^*$ 的作用轨道$\mathcal{O}_\mu$,它同样具有辛结构.这一点可以换个思路来理解[86],对于 Lie 群 G 上的左不变 1-形式 ω_μ,以及浸没映射 $\psi:G\to\mathcal{O}_\mu$,$\mu\in g*$,可以证明:在余伴随轨道$\mathcal{O}_\mu$上存在唯一的辛结构$\Omega_{\mathcal{O}_\mu}$,它满足 $\psi*(\Omega_{\mathcal{O}_\mu})=\mathrm{d}\omega_\mu$.这个辛轨道的存在使得$\mathfrak{g}^*$称为具有辛叶层结构的 Poisson 流形.但是与辛流形(M,Ω)上的正则 Poisson 结构不同,在 $\mathfrak{g}^*$ 的 Poisson 结构是非正则的,即为 Lie-Poisson 结构.利用这个约化理论,将 $SO(3)$群作用于辛流形 $T^*SO(3)$,则刚体运动的 6 个正则方程就可以约化为 3 个 Euler方程.

需要指出的是, Kostant (1966)[87]、Meyer (1973)[88]和 Marle(1976)[89]对现代对称性约化理论也有过奠基性贡献,Kostant 主要是对一般动量映射的发现上,这一点与 Souriau 类似,Meyer 的贡献类似于 Smale,也是在利用余迷向群对动量映射水平集的叶层化分解上;Marle 的贡献主要是 Poisson 流形辛约化轨道的叶层分解.近些年来,对称性约化的理论和应用研究成果累累,在 Lagrange 约化、非 Abel 的 Routh 约化、半直积约化、切丛和余切丛约化、分部约化、奇异约化、多辛约化,以及在非完整力、量子力学的对称性约化方面的文献不胜枚举,在此仅介绍对称性约化的最基本框架,有兴趣的读者可以参阅几何力学的近期相关文献.

8 完整和非完整系统的可积性

力学系统的可积性最早始于 Newton 引力场中 Kepler 问题,但最早的标志性成果是分析力学中的 Liouville 可积性定理(1853~1855):如果 $2n$ 维哈密顿系统存在 n 个函数独立的、Poisson 对易的第一积分$(F_1,\cdots,F_N)$,则这个哈密顿系统是完全可积的,并且可以用求积方法求得其方程的解[1,58].然而,在之后长达一个世纪的历程中,人们能够找到的可积系统是屈指可数的,如刚体定点转动的三种可积情形、Neumann 模型、椭球上的测地运动等.这种局面导致动力学系统的完全可积性问题进入二十世纪后被沉寂了半个多世纪,人们在 Poincare 的影响下转向了动力学系统的定性理论.直到 1967 年,逆散射法的提出[90],以及紧接着的等谱变形法[91],给偏微分方程的求解带来全新局面,不久这种方法与可积性的关系也明确下来[92],从此 Kdv 方程、Sin-Gordon 方程、方线性 Schrödinger 方程等许多非线方程的可积性研究取得了丰硕成果,例如 Kdv 方程具有无穷多第一积分.

8.1 Hamilton 系统的可积性

上述重大进展也大大促动有限维 Hamilton 系统的可积性研究,开始突破了经典 Hamilton-Jacobi 方程的分离变量法求解可积系统作用-角变量局限,取得一系列新进展,主要表现在如下几个方面:(1)Lax 等谱变换理论:利用相空间上的 Lax 矩阵函数对(L 和 M).将 Hamilton 演化方程表示为 $\dot{L}=[M,L]$,其解为 $L(t)=g(t)L(0)g(t)^{-1}$,可逆矩阵$g(t)$由 $M=\dot{g}g^{-1}$确定.显见,Lax 演化方程就是等谱的,紧密联系于第一积分[81].(2)整体可积性理论:如果 $2n$ 维可积 Hamilton 系统的 n 个第一积分的水平集是连通的和紧致的,则这个水平集微分同胚于 n 维环面 T^n,其邻域上存在作用-角变量 I_i 和 θ_i,使得辛形式为 $\mathrm{d}I_i\wedge d\theta_i$,这种可积性被称为 Liouville-Arnold可积性[23,58].因而,力学系统的可积性不必再局限于局部可积性.(3)不变测度理论:对于没有辛结构的非 Hamilton 动力学系统 $\dot{x}=f(x)$, $x\in R^n$,假设它具有不变测度,并存在 $n-2$ 个独立的第一积分,则这个系统运动方程的解可以通过求积法得到,而且这些第一积分水平集的紧致连通分支微分同胚于环面 T^2,这被称为 Kolmogorov 定理.(4)Lagrange子流形法:经典分析力学研究可积性要依赖于 Hamilton-Jacobi 方程的求解,这是一个局部理论.上个世纪 70 年代,Weinstein 根据 Moser 同伦变换方法,将辛流形局部正则化推广到 Lagrange 流形的管状邻域[58],从而 Hamilton-Jacobi 理论以及以此为基础的可积性研究可以推广到一般 Lagrange流形的邻域[93,94].(5)动量映射与对称约化法:对于具有对称性的 Hamilton 系统,存在动量映射,它能将对称操作和运算从辛流形约化到 Lie 代数对偶空间上去[96],有时约化后的系统在该空间的余自伴随轨道上还会有对称性,甚至完全可积[81].(6)其它方面:还有大量其它关于可积性的研究成果.如利用 Moser 同伦变换法可以处理不少可积性问题,可将 Neuman 模型变成椭球面上的测地问题,将 Kepler 椭圆运动转化为球面上的测地运动[81].利用辛拓扑中的重要不变量-单值性可以考量 Hamilton 系统作用-角变量存在范围,即完全可积性的整体程度.

8.2 非完整系统的可积性

非完整系统运动微分方程的可积性研究从这个系统在 1894 年被著名物理学家 Hertz 定义之后不久就开始了,只不过在这类系统的研究过程中,它因为已经“成型”的分析力学竟然无法直接适用,而受到建模问题的困扰.另外,早期动力学系统积分理论的局限性,也使得非完整系统的可积性问题研究进展不大.但是,由于当时诸多著名学者(如

Chaplygin, Volterra, Appell, Voronec, Hamel 等)的开拓性研究,建立了非完整系统的几类运动微分方程,使得非完整系统的可积性研究成为可能和必然.至今已经积累了诸多典型的非完整系统和相应的非完整问题,如 Chaplygin 雪橇、匀质滚球、Chaplygin 滚球、Vierkandt 滚盘、蛇形板、滚轴赛车、回旋陀螺、Heisenberg 系统,以及大量在自力运动等非完整运动规划与控制中的实例[22,96].同时,几何力学的发展、几何数值积分方法的成熟、现代可积性理论的发展也为非完整约束力学的可积性研究提供了良机.目前,非完整系统可积性研究成果可归纳如下:(1)Hamilton 化方法:这种方法是设法将非完整系统 Hamilton 化,在研究其在通常 Liouville 意义下的可积性.实现非完整系统 Hamilton 化的方法重要有以下几种:一是将非完整系统(主要是 Chaplygin 系统)先进行 Lagrange 化,在借助 Legendre 变换实现 Hamilton 化.二是 BFM(Bloch-Fernandez-Mestdag)[97],即在那些与非完整系统有同解的完整力学系统中,找出一个存在正规 Lagrange 函数的完整系统,再借助 Legendre 变换构造 Hamilton 量,实现 Hamilton 化.三是 Chaplygin-Hamilton 化法[11],这个方法是重新参数化时间标度,使得约化后的非完整系统在新的时间标度下表示为 Hamilton 形式,而这样的新约化 Hamilton 系统存在着通常意义下的可积情形[98,99].此外,还可以考虑坐标系的变换,得到某些非完整系统的可积性[100].(2)不变测度法:对于一个 $2n$ 维动力学系统 $\dot{x}=f(x)$, $x\in R^{2n}$,如果受到 k 个非完整约束,在一般情况下,它还需要($2n-k-1$)个独立第一积分才能是完全可积的.如果这个系统存在不变测度,则仅需要($2n-k-2$)个独立第一积分就能使得该系统完全可积,其方程可以用求积法得到;进而假设这 k 个约束和($2n-k-2$)个第一积分的水平集是紧致的,则这个完全可积系统的轨迹就处在不变环面 T^2 上[96,101].但是这个方法中不变测度的条件充分但不必要,即存在着一些非完整系统,它们即使是变测度的,也会具有完全可积性[96,102,103].(3)Hamilton-Jacobi 方法:将 Hamilton-Jacobi 方程及其分离变量法推广到非完整系统的研究近些年来也有了一定的积累,这些推广既有基于微分方程层面的[104-106],也有基于几何力学层面的[107-111],后者主要利用 Lagrange 流形理论来推广 Hamilton-Jacobi 理论.这方面的进展有两个代表性工作:一个是 M.de Leon 群组的工作[108,109],他们的主要贡献是将 Lagrange 流形由余切丛上局部恰当 1-形式的图推广到一般闭 1-形式情况,从而涵盖了完整和非完整系统的 Hamilton-Jacobi 方程;另一个是 Bloch 群组的工作[99,110],他们是采用了 Chaplygin-Hamilton 化方法,以此建立非完整系统的 Hamilton-Jacobi 定理,来积分非完整系统的运动微分方程,这个定理既可适用于分离变量法,也可适用于非分离变量法.目前,关于非完整力学系统的可积性研究方法过于局限于完整 Hamilton 系统的现有方法,应该探讨适用于非完整力学系统自身特点的可积性方法,这有赖于对非完整力学系统几何结构的深入分析.

9 结语

本文受篇幅和作者知识面所限,对分析力学的基础与展望概括的还不够全面、深入和细致.一方面,在所述部分的若干方面多是提纲携领,还没有详细介绍,对文献的引用也远未详尽;另一方面,还有诸多分析力学的方向没有论及,例如本文并没有包括辛算法在内的几何数值积分方法[112]、基于 Cartan 活动标价法的 Hamel 方程在非完整系统和无穷维系统中的应用[113]、分析力学的各种场积分方法、时滞约束系统的分析力学建模和计算、多自变量分析力学理论、非完整运动规划与控制,以及分析力学与多体动力学和机器人动力学等应用学科的交叉应用研究等,而这些领域也聚集了大量研究成果,且方兴未艾.我们将另撰长文尽可能地对分析力学的现有成果、研究热点和发展方向予以介绍.近两个半世纪以来,分析力学的发展没有停留脚步,它或是表现在对数学、物理学和力学新兴方向的产生和发展推波助澜,或是受数学和物理学新成果驱动而前进.例如,它在上个世纪初对流形、纤维丛等现代微分几何的建立和早期量子力学的发展[55]、上个世纪中叶 Feynman 路径积分量子化,以及广义相对论和规范场论的发展等方面都发挥了重要作用,而由分析力学所衍生出来的辛拓扑的发展也将是本学科未来的重要发展方向,并对量子理论和非线性科学产生重要影响.

本文是对《动力学与控制学报—分析力学专刊》撰写的综述文章.本专刊的论文来源于 2018 年 10 月份在绍兴召开的第十三届全国分析力学学术会议,论文主要包括了可控完整力学系统的自由运动与初始运动,分析力学研究应当重视物理意义,二维分布式陀螺结构带隙特性,非保守非线性刚-热-弹耦合动力学问题,Lagrange 子流形理论,广义动能原理,强非线性二阶微分方程的多模态近似解析解,分数阶动力学,耦合动力学的保结构分析,非定常完整约束系统,多体系统动力学的建模和数值方法,弹性细杆问题的分析力学方法,时间尺度上约束 Birkhoff 系统的 Noether 对称性与守恒量等问题的研究.这些问题的研究既包括了分析力学的基础理论研究,也体现了分析力学的应用研究成果.期望通过本专刊的出版能够更好地使国内外读者对我国分析力学研究有一个较全面的了解,扩大分析力学学科的影响力,促进分析力学学科向更高层次发展.

参　考　文　献

1　Jose J, Saletan E. Classical dynamics: a contemporary approach. NewYork: Cambridge University Press, 2002

2　陈滨. 分析动力学(第二版). 北京:北京大学出版社, 2012 (Chen B. Analytical Dynamics. Beijing: Beijing University Press, 2012 (in Chinese))

3　Udwadia F E, Kalaba R E. Analytical dynamics: a new approach. NewYork: Cambridge University Press, 1996

4　马尔契夫 A. П.理论力学 (第三版). 李俊峰 译. 北京: 高等教育出版社, 2006(Markov A. П. Li J F. Theoretical mechanics (3rd edition). Beijing: Higher Education Press,2006 (in Chinese))

5　Neimark Ju I, Fufaev N A. Dynamics of nonholonomic systems. Providence: American Mathematical Society, 1972

6　梅凤翔,刘端,罗勇. 高等分析力学. 北京: 北京理工大学出版社, 1991(Mei F X, Liu D, Luo Y. Advance of analytical mechanics. Beijing: Beijing Institute of Technology Press, 1991 (in Chinese))

7　梅凤翔. 分析力学 (上下卷). 北京:北京理工大学出版社, 2013 (Mei F X. Analytical mechanics (Ⅰ,Ⅱ). Beijing: Beijing Institute of Technology Press, 2013 (in Chinese))

8　郭仲衡. 一类非完整力学问题的合理解. 中国科学 A, 1994,24(5):485~497 (Guo Z H. A reasonable solution to a class of nonholonomic mechanical problems. *Science in China A*, 1994,24(5):485~497 (in Chinese))

9　陈滨. 关于非完整力学的一个争论. 力学学报, 1991, 23(3):379~384 (Chen B. A contention to the classic nonholonomic dynamics. *Acta Mechanica Sinica*, 1991,23(3):379~384 (in Chinese))

10　梁立孚. 非完整系统动力学中的 vakonomic 模型 Chetaev 模型. 力学进展, 2000,30(3):358~369 (Liang L F. The vakonomic model and Chetaev's model in analytical dynamics of nonholonomic systems. *Advances in Mechanics*, 2000,30(3):358~369 (in Chinese))

11　查浦雷金. 张燮 译. 非全定系统的动力学研究. 北京: 科学出版社, 1956 (Chaplygin S. A. Zhang X. Analysis of the dynamics of nonholonomic systems. Beijing: Science Press, 1956 (in Chinese))

12　Cardin F, Favretti M. On nonholonomic and vakonomic dynamics of mechanical systems with nonintegrable constraints. *Journal of Geometry and Physics*, 1996,18:295~325

13　Guo Y X, Wang Y, Chee G Y, et al. Nonholonomic versus vakonomic dynamics on a Riemann-Cartan manifold. *Journal of Mathematical Physics*, 2005,46(6):062902

14　Guo Y X, Liu S X, Liu C, et al. Influence of nonholonomic constraints to variations, symplectic structure and dynamics of mechanical systems. *Journal of Mathematical Physics*, 2007,48(8):082901

15　Cortés J, León M D, Diego D M D, Geometric description of vakonomic and nonholonomic dynamics: comparison of solutions. arXiv: Math D G/0006183, June 2000

16　León M D, Marrero J C, Diego D M D. Vakonomic mechanics versus nonholonomic mechanics: a unified geometrical approach. *Journal of Geometry and Physics*, 2000,35:126~144

17　Zampieri G. Nonholonomic versus vakonomic dynamics. *Journal of Differential Equations*, 2000,163(2):335~347

18　Lewis A D, Murray R M. Variational principles for constrained systems: theory and experiment. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 1995,30(6):793~815

19　Jóźwikowski M, Respondekm W. A comparison of vakonomic and nonholonomic dynamics with applications to non-invariant Chaplygin systems. *Journal of Geometric Mechanics*, 2019,11(1):77~122

20 Borisov A V, Mamaev I S, Bizyaev I A. Dynamical systems with non-integrable constraints, vakonomic mechanics, sub-Riemannian geometry, and nonholonomic mechanics. *Russian Mathematical Surveys*, 2017,72(5):783~840

21 Golubowska B. Some aspects of affine motion and nonholonomic constraints. Two ways to describe homogeneously deformable bodies. *ZAMM Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2016,96(8):968~985

22 Bloch A M. Nonholonomic mechanics and controll. Springer-Verlag, First Edition 2003, Second Edition, 2015

23 Arnold V I. Mathematical methods of classical mechanics. 2nd Edtion, Springer-Verlag, 1989

24 Guo Y X, Mei F X. Integrability for Pfafifan constrained systems: a connection theory. *Acta Mechanica Sinica*, 1998,14(1):85~91

25 Mei F X. Nonholonomic mechanics. *Applied Mechanics Reviews*, 2000,53(11):283~306

26 郭永新,罗绍凯,梅凤翔. 非完整约束系统几何动力学研究进展:拉格朗日理论及其它. 力学进展, 2004,34(4):477~492 (Guo Y X, Luo S K, Mei F X. Progress of geometric dynamics of nonholonomic constrained mechanical systems: Lagrange theory and others. *Acta Mechanica Sinica*, 2004,34(4):477~492 (in Chinese))

27 Jimenez F, Yoshimura H. Dirac structures in vakonomic mechanics. *Journal of Geometry and Physics*, 2014, 94: 158~178

28 Llibre J, Ramírez R, Sadovskaia N. A new approach to the vakonomic mechanics. *Nonlinear Dynamics*, 2014,78: 2219~2247

29 Kozlov V V. The Dynamics of systems with servoconstraints II. *Regular and Chaotic Dynamics*, 2015,20(4): 401~427

30 Borisov A V, Kilin A A, Mamaev I S. Hamilton's principle and the rolling motion of a symmetric ball. *Doklady Physics*, 2017,62:314~317

31 Brockett R W. Control theory and analytical mechanics. In: C. Martin and R. Hermann, Eds. The 1976 Ames Research Center (NASA) Conference on Geometric Control Theory, Math Sci Press, Brookline, MA

32 Shi D H, Berchenko-Kogan Y, Zenkov D V, et al. Hamel's formalism for infinite dimensional mechanical systems. *Journal of Nonlinear Science*, 2017,27:241~283

33 Cushmann R H, Bates L M. Global aspects of classical integrable systems. Springer: Basel AG, 1997

34 Santilli R M. Foundations of theoretical mechanics I: Inverse problem in Newtonian mechanics. New York: Springer-Verlag, 1978

35 Santilli R M. Foundations of theoretical mechanics II: Birkhoffian generalization of Hamiltonian mechanics. New York: Springer-Verlag, 1983

36 梅凤翔,史昌荣,张永发,等. Birkhoff 系统动力学. 北京:北京理工大学出版社, 1996 (Mei F X, Shi C R, Zhang Y F. Dynamics of Birkhoff system. Beijing: Beijing Institute of Technology Press, 1996 (in Chinese))

37 Guo Y X, Liu C, Liu S X. Generalized Birkhoffian realization of nonholonomic systems. *Communications in Mathematics*, 2010,18:21~35

38 Sarlet W, Cantrijn F. Generalizations of noether's theorem in classical mechanics. *SIAM Review*, 1981,23(4):467~494

39 常广石,郭永新,吴兴伟. 关于 Killing 方法及其物理意义. 北京理工大学学报, 1995,15(4):353~358 (Chang G S, Guo Y X, Wu X W. Killing equations of nonholonomic systems. *Journal of Beijing Institute of Technology*, 1995,15(4):353~358 (in Chinese))

40 郭永新. 非完整约束力学的几何结构研究博士学位论文. 北京:北京理工大学, 1996 (Guo Y X. Studies of geometric frameworks for constrained mechanical systems. Beijing: Beijing Institute of Technology, 1996 (in Chinese))

41 Goldstein H, Poole C, Salfko J. Classical Mechanics. 3rd edition. NewYork: Addision-Wesley, 2000

42 Martinez-y-Romerot R P, Nuiier-Yepezz N N, Salas-Brito A L. The Hamilton vector as an extra constant of motion in the Kepler problem. *European Physical Journal*, 1993, 14:71~73

43 Sarlet W, Cantrijn F, Crampin M. Pseudo-symmetries, Noether's theorem and the adjoint equation. *Journal of Physics A-Mathematical and General*, 1987,20:1365~1376

44 Prince G E, Eliezer C J. On the Lie symmetries of the classical Kepler problem. *Journal of Physics A-Mathematical and General*, 1981,14:587~596

45 Prince G E, Eliezer C J. Symmetries of the time-dependent N-dimensional oscillator. *Journal of Physics A-Mathematical and General*, 1980,13:815~823

46 赵跃宇,梅凤翔. 力学系统的对称性与不变量. 北京:

科学出版社, 1999 (Zhao Y Y, Mei F X. Symmetry and Invariant of Mechanical System, Beijing: Science Press, 1999 (in Chinese))

47 Guo Y X, Shang M, Mei F X. Poincare-Cartan integral invariants of nonconservative dynamical systems. *International Journal of Theoretical Physics*, 1999,38:1017~1027

48 Lutzky M. New classes of conserved quantities associated with non-Noether symmetries. *Journal of Physics A-Mathematical and General*, 1982,15(3):L87~91

49 Fu J L, Chen L Q. Non-Noether symmetries and conserved quantities of nonconservative dynamical systems. *Physics Letters A*, 2003,317(3-4):255~259

50 Fu J L, Chen L Q, Jiménez S, et al. Non-Noether symmetries and Lutzky conserved quantities for mechanico-electrical systems. *Physics Letters A*, 2006,358(1):5~10

51 Lutzky M. Symmetry groups and conserved quantities for the harmonic oscillator. *Journal of Physics A-Mathematical and General*, 1978,11(2):249~258

52 Leach P G L. The first integrals and orbit equation for the Kepler problem with drag. *Journal of Physics A-Mathematical and General*, 1987,20:1997~2002

53 Danby J M A. Fundamentals of celestial mechanics. New York: Macmillan, 1962

54 温伯格 S. 引力论与宇宙论:广义相对论的原理和应用. 邹振隆,张历宁 等译. 北京:科学出版社, 1984 (Weinberg S. Gravitation and cosmology, Zou Z L and Zhang L N, Beijing: Science Press, 1999 (in Chinese))

55 McCauley J L. Classical mechanics: transformations, flows, integrable and chaotic dynamics. New York: Cambridge University Press, 1997

56 Weyl H. The classical groups. Princeton: Princeton University Press, 1946.

57 Weinstein A. Symplectic manifolds and their lagrangian submanifolds. *Advances in Mathematics*, 1971,6(3):329~346

58 Libermann P, Marle C M. Symplectic geometry and analytical mechanics. Reidel Publ., Dordrecht, 1986

59 Arnold V I, Kozlov V V, Neishtadt A I. Mathematical aspects of classical and celestial mechanics. 3rd Edition. Berlin: Springer-Verlag, 200

60 Abraham R, Marsden J E. Foundations of mechanics. Second Edition. Reading: Addison-Wesley, 1978

61 Kiesenhofer A,Eva Miranda E. Cotangent models for integrable systems. *Communications in Mathematical Physics*, 2017,350(3):1123~1145

62 Weinstein A. On the hypotheses of Rabinowitz periodic orbit theorems. *Journal of Differential Equations*, 1979,33(3):353~358

63 Moser J. On the volume elements on a manifold. Trans. *American Mathematical Society*, 120:286~294

64 Rabinowitz P H. Periodic solutions of Hamiltonian systems. *Pure and Applied Mathematics Journal*, 1978,31:157~184

65 Conley C, Zehnder E. The Birkhoff Lewis fixed point theorem and a conjecture of V.I.Arnold. *Inventiones Mathematicae*, 1983,73(1):33~49

66 Ekeland I, Hofer H. Symplectic topology and Hamiltonian dynamics. *Mathematische Zeitschrift*, 1990,200(3):355~378

67 Ekeland I, Hofer H. Symplectic topology and Hamiltonian dynamics II. *Mathematische Zeitschrift*, 1990,203:553~567

68 Hofer H, Zehnder E. A new capacity for symplectic manifolds. Rabinowitz P, Zehnder E. Analysis et cetera, San Diego: Academic Press, 1990:405~428

69 Gromov M. Pseudoholomorphic curves in symplectic manifolds. *Inventiones Mathematicae*, 1985,82:307~347

70 McDuff D, Salamon D. Introduction to symplectic topology. *Oxford University Press*, 1998

71 Viterbo C. Symplectic topology as the geometry of generating functions. *Mathematische Annalen*, 1992,292(1):685~710

72 Floer A. Proof of the Arnold conjecture for surfaces and generalizations to certain Kahler manifolds. *Duke Mathematical Journal*, 1986,53(1):1~32

73 Floer A, Hofer H. Symplectic homology I: Open sets in En. *Mathematische Zeitschrift*, 1994,215(1):37~88,

74 McDuff D, Salamon D. J, Holomorphic curves and symplectic topology. Rhode Island:American Mathematical Society colloquium publication, 2004

75 Gosson M D. The principles of newtonian and quantum mechanics. London: Imperial College Press, 2001

76 Gosson M D. Symplectic geometry and quantum mechanics, series operator theory: Advances and Applications Vol.166, Basel: Birkhäuser, 2006

77 Gosson M D. The symplectic egg in classical and quantum mechanics. *American Journal of Physics*, 2013,81(5):328~337

78 Marsden J E, Ratiu T S. Introduction to mechanics and

symmetry. NewYork: Springer-Verlag, 1999

79 Atiyah M F. Convexity and commuting Hamiltonians. *Bulletin of the London Mathematical Society*, 1982,14(1):1~15

80 Guillemin V, Sternberg S.Convexity properties of the moment map. *Inventiones Mathematicae* , 1982,61:491~513

81 Perelomov A M. Integrable systems of classical mechanics and lie algebras. Vol. I (A. G. Reyman, trans.,) Berlin: Birkhäuser Basel, 1990

82 Arnold V I. Sur la geometric differential des group de Lie de dimension infinite applications d l′ hydro dynamique des fluids parfaits. *Annales de I′ Inst Fourier Grenoble*, 1966,16:319~36l

83 Smale S. Topology and mechanics. *Inventiones Mathematicae*, 1970,10:305~331; 1970,11:45~64

84 Marsden J E, Weinstein A. Reduction of symplectic manifolds with symmetry. *Repotson Mathematical Physics*, 1974,5(1):121~130

85 Marsden J E, Weinstein A. Some comments on the history, theory and applications of symplectic reduction. In: Landsman N P, Pflaum M J, Schlichenmaier M. (eds.) Quantization of Singular Symplectic Quotients, 2001

86 Bryant R L. An introduction to lie groups and symplectic geometry. In:The Regional Geometry Institute in Park City, Utah, 24 June-20 July, 1991

87 Kostant B. Orbits, symplectic structures and representation theory. In: Proc. US-Japan Seminar on Diff Geom (Kyoto), 77, Tokyo: Nippon Hyronsha, 1966

88 Meyer K R. Symmetries and integrals in mechanics. Peixoto M M, Dynamical systems. New York: Academic Press, 1973:259~273

89 Marle C M. Symplectic manifolds, dynamical groups and Hamiltonian mechanics, Caben M, Flato M, Differential geometry and relativity. Boston: D. Reidel Publishing Company, 1976:249~269,

90 Gardner C S, Greene J M, Kruskal M D, et al. Method for solving the Kortewegde Vries equation. *Physical Review Letters*, 1967,19(19):1095~1097

91 Lax P D. Integrals of non-linear equations of evolution and solitary waves. *Communicatins on Pure and Applied Mathematics*, 1968,21:467~490

92 Faddeev L D, Zakharov V E. Kortewegde Vries equation: a completely integrable Hamiltonian system. *Funets Anal Prilozh*, 1971,5(4):18~27

93 Barbero-Linna M, de León M, de Diego D M. Lagrangian submanifolds and the Hamilton-Jacobi equation. *Monatshefte Mathematik*, 2013,171:(3-4):269~290

94 Bates L, Fassò F, Sansonetto N. The Hamilton-Jacobi equation, integrability, and nonholonomic systems. *Journal of Geometry and Physics*, 2014,6(4):441~449

95 Marsden J E, Ratiu T S. Introduction to mechanics and symmetry. texts in applied mathematics. Berlin:Springer-Verlag, 17, Second Edition, 1999

96 Monforte J C. Geometric control and numerical aspects of nonholonomic systems. Berlin:Springer-Verlag, 2002

97 Bloch A M, Fernandez O E, Mestdag T. Hamiltonization of nonholonomic systems and the inverse problem of the calculus of variations. *Reports Mathematical Physics*, 2009,63(1):225~249

98 Fernandez O E, Bloch A M, Zenkov D V. The geometry and integrability of the Suslov problem. *Journal of Mathematical Physics*, 2014,55(11):112704-1-14

99 Ohsawa T, Bloch A M, Leok M. Nonholonomic Hamilton-Jacobi theory via Chaplygin Hamiltonization. *Journal of Geometry and Physics*, 2011,61(8):1263~1291

100 Fasso F, Sansonetto N. Conservation of ‘Moving’ Energy in nonholonomic systems with affine constraints and integrability of spheres on rotating surfaces. *Journal Nonlinear Science*, 2016, 26(2):519~544

101 Koiller J. Reduction of some classical non-holonomic systems with symmetry. *Archive Rational Mechanics and Analysis*, 1992,118(2):113~148

102 Jovanovic B. Geometry and integrability of Euler-Poincare-Suslov equations. *Non-linearity*, 2001,14(6):1555~1567

103 Bloch A M. Asymptotic Hamiltonian dynamics: The Toda lattice, the three-wave interaction and the non-holonomic Chaplygin sleigh. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 2000,141(3):297~315

104 Tan L N. Omnidirectional-vision-based distributed optimal tracking control for mobile multirobot systems with kinematic and dynamic disturbance rejection. *IEEE T Ind Electron*, 2018,65(7):5693~5703

105 王勇,梅凤翔,曹会英,等. 场方法的改进及其在积分Riemann-Cartan空间运动方程中的应用. 物理学报, 2018,67(3):034501 (Wang Y, Mei F X, Cao H Y, et al. Improvement of field method and its application to integrating motion equation in Riemann-Cartan space. *Acta Physica Sinica*, 2018,67(3):034501 (in Chinese))

106 Wang J, Wang T, Yao C. et al. Active tension optimal

control for WT wheelchair robot by using a novel control law for holonomic or nonholonomic systems. *Science China Information Sciences*, 2014, 57 (11) : 112203: 1 - 112203:15

107 De León M, Marrero J C, Martín De Diego D. Linear almost poisson structures and hamilton-jacobi equation. Applications to Nonholonomic Mechanic. *Journal of Geoetricm Mechanics*, 2010,2(2):159~198

108 Iglesias-Ponte D, De León M, De Diego D M. Towards a Hamilton-Jacobi theory for nonholonomic mechanical systems. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 2008,41:015205

109 Barbero-Linan M, De León M, De Diego D M. Lagrangian submanifolds and Hamilton-Jacobi equation. *Monatshefte Mathematik*, 2013,171(3-4):269~290

110 Ohsawa T, Bloch A M. Nonholonomic Hamilton-Jacobi equation and integrability. *Journal of Geoetricm Mechanics*, 2011,1(4):461~481

111 Grillo S, Padron E. A Hamilton-Jacobi theory for general dynamical systems and integrability by quadratures in symplectic and Poisson manifolds. *Journal of Geometry and Physics*, 2016,110:101~129

112 Marsden J E, West M. Discrete mechanics and variational integrators. *Acta Numerica*, 2001,10(1):357~514

113 Shi D H, Berchenko-Kogan Y, Zenkov D V, et al. Hamel's Formalism for infinite-dimensional mechanical systems. *Journal of Nonlinear Science*, 2017,27:241~283

THE FOUNDATION AND PROSPECT OF ANALYTICAL MECHANICS *

Guo Yongxin† Liu Shixing

(*College of Physics*, *Liaoning University*, *Shenyang* 110036, *China*)

Abstract Starting from the analysis of the under-determined problem of constrained mechanical systems, the fundamental variational principles of analytical mechanics and three kinds of differential equations of motion are introduced and the universality of analytical mechanics is analyzed in this paper. For nonholonomic constrained mechanical systems, the dynamic modeling, geometric structure and key development directions are emphatically analyzed. At the same time, the general symplectic structure and research significance of Birkhoffian systems are briefly introduced, as well as the key problems to be solved. The Noether symmetry of mechanical systems and the symmetry of differential equations of motion are discussed in detail, and corresponding examples are given to illustrate the relationship between the two symmetries and conserved quantities. In the part of geometric mechanics, the symplectic geometric structure and symmetry reduction theory of analytical mechanics are mainly described, including local canonical structure of symplectic manifolds by Darboux-Moser-Weinstein theorem, global topological structure and its influence on quantum mechanics, adjoint and co-adjoint representation of Lie group and Lie algebra, momentum mapping, Cartan symplectic reduction, Marsden-Weinstein reduction and so on. At the end of the paper, the research methods and results of the integrability of holonomic and nonholonomic mechanical systems are discussed, and the limitations of the existing integrability methods of nonholonomic mechanical systems are pointed out.

Key words variational principles, nonholonomic mechanics, Birkhoffian systems, symmetries, sympletic geometry, symmetry reduction, integrability

---

Received 7 October 2019, revised 12 October 2019.

* The project supported by the National Natural Science Foundation of China(11572145, 11872030, 11972177, 11772144) and Liaoning provincial departmentof science and technology of China(20180550400).

† Corresponding author E-mail: yxguo@ lnu.edu.cn