

# 时滞诱发的忆阻型 Hopfield 神经网络的复杂动力学\*

乔磊 茅晓晨<sup>†</sup>

(河海大学 力学与材料学院, 南京 211100)

**摘要** 本文研究含时滞的忆阻型环状 Hopfield 神经网络的稳定性、Hopf 分岔以及复杂振荡模式.根据特征方程根分布情况,获得了系统全时滞稳定条件和与时滞相关的稳定条件.通过数值计算揭示了丰富的动力学现象,如多种周期运动和混沌吸引子等,并给出了 Poincaré 截面上的分岔图.设计了电路实验平台,取得了与理论分析和数值计算高度吻合的实验结果.

**关键词** Hopfield 神经网络, 时滞, 忆阻器, 复杂动力学, 电路实验

DOI: 10.6052/1672-6553-2019-036

## 引言

1982 年, Hopfield 基于能量函数提出了著名的 Hopfield 神经网络模型<sup>[1]</sup>, 并广泛应用于联想记忆、模式识别、组合优化、图像处理、保密通信等领域.从动力学角度来看, Hopfield 神经网络是一个复杂的非线性系统, 有着丰富的动力学特性, 而这些特性对于网络的设计和应用有着显著的影响.例如, 在组合优化方面, 网络的稳定平衡状态对应于待求解和优化问题的解.再如, 用于保密通信时, 要求网络是混沌的, 这样可以利用混沌的高度复杂的伪随机性进行加密<sup>[2,3]</sup>.

美国惠普公司实验室 Strukov 等人在纳尺度电路中证实了忆阻的存在<sup>[4]</sup>, 随后还发现忆阻可用于布尔逻辑运算<sup>[5]</sup>. 忆阻器可视作具有记忆功能的非线性电阻元件, 由于忆阻器的阻抗能够随着流经电路的电流变化, 并且其阻值能在电路断电后保持. 这种特性使得忆阻器能成为天然的非易失性存储器. 随着忆阻器在计算机科学、生物工程、电子工程以及控制工程等领域的应用, 其相关研究日益受到关

注. Kengne 等研究了忆阻型二极管桥的 Jerk 系统, 获得了倍周期分岔过程以及多个吸引子共存等复杂现象<sup>[6]</sup>. Ye 等揭示了含忆阻的 Wien-bridge 电路中的周期轨道、混沌以及超混沌吸引子等有趣

行为<sup>[7]</sup>. 研究表明, 忆阻具有类似大脑神经突触在生物电信号激励下的塑性响应的非线性电学特性, 因此, 忆阻可被用于模拟突触, 并可用于构建忆阻型神经网络电路系统. Pershin 和 Di Ventra 在三个电子神经元的忆阻-突触构成的神经网络实验中演示了联想记忆的形成<sup>[8]</sup>. Bao 等考察了具有单个忆阻器的三神经元 Hopfield 神经网络, 揭示了非对称双螺旋混沌吸引子以及周期 1、周期 2 轨道和混沌吸引子共存等多稳态现象, 并设计电路实验进行了验证<sup>[9]</sup>. 通过模拟神经突触处理和学习信息的工作方式, 忆阻有望在联想记忆和模式识别等方面发挥关键作用, 最终引领人工神经网络领域的变革.

自突触是神经元连接自身的特殊结构, 广泛存在于大脑皮质、海马体、小脑等脑域中, 在脑活动中起着重要的作用. Herrmann 和 Klaus<sup>[10]</sup> 以及 Li<sup>[11]</sup> 等发现, 自突触在膜电位上的影响可以映射为在一个延时反馈回路中外加刺激电流. 这种自突触通常称为电性自突触, 其对神经元膜电位的调制可表示为  $I_{aut} = k(x(t-\tau) - x(t))$ . 其中参数  $k$  表示反馈增益,  $\tau$  表示回路动作电位传递过程中引发的时滞. 时滞是自然界中的普遍现象, 并与系统的动力学行为密切相关<sup>[2,3,12-14]</sup>. 电自突触可以影响神经元的电活动规律, 如诱发各类周期性、混沌放电等现象. 此外, 还可用于调控神经网络群体电活动行为及其相互之间的迁移<sup>[15]</sup>.

2018-09-10 收到第 1 稿, 2018-10-10 收到修改稿.

\* 国家自然科学基金资助项目 (11472097 和 11872169), 河海大学中央高校基本科研业务费专项资金项目 (2018B17514)

<sup>†</sup> 通讯作者 E-mail: maochen@hhu.edu.cn

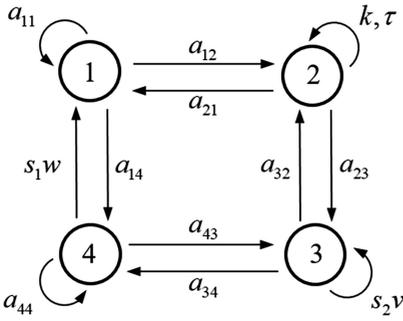


图 1 忆阻型环状 Hopfield 神经网络

Fig.1 Architecture of a memristive ring Hopfield neural network

本文研究忆阻型环状 Hopfield 神经网络,如图 1 所示. 该网络由四个神经元通过双向耦合组成,电自突触位于神经元 2 上,而忆阻性突触分别位于神经元 1 和 4 之间的互连接和神经元 3 内部.事实上,环状结构存在于许多神经结构中,如海马体、小脑、新皮质等<sup>[16]</sup>.

### 1 稳定性和 Hopf 分岔

本文中的双曲型忆阻器满足如下关系式<sup>[9]</sup>:

$$i = h(v_0)v = [a - b \tanh(v_0)]v$$

$$m \frac{dv_0}{dt} = f(v_0, v) = -v_0 - v \quad (1)$$

其中,  $v$  和  $i$  分别表示忆阻器输入端的电压和电流,  $v_0$  为内部状态变量,  $a, b$  为忆阻器的正常数,  $m$  为时间常数.

图 1 所示的忆阻型 Hopfield 神经网络可写为如下无量纲化形式:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + a_{11} \tanh(x_1) + a_{12} \tanh(x_2) + a_{14} \tanh(x_4) \\ \dot{x}_2 = -x_2 + a_{21} \tanh(x_1) + a_{23} \tanh(x_3) + k(x_2(t-\tau) - x_2) \\ \dot{x}_3 = -x_3 + a_{32} \tanh(x_2) + s_2 v \tanh(x_3) + a_{34} \tanh(x_4) \\ \dot{x}_4 = -x_4 + s_1 w \tanh(x_1) + a_{43} \tanh(x_3) + a_{44} \tanh(x_4) \\ \dot{x}_5 = -x_5 + \tanh(x_1) \\ \dot{x}_6 = -x_6 + \tanh(x_3) \end{cases} \quad (2)$$

其中,  $x_i$  为第  $i$  个神经元的状态,  $a_{ij}$  为神经元之间的连接强度,  $w = a_1 - b_1 \tanh(x_5)$  为神经元 1 和 4 之间的连接强度,  $v = a_2 - b_2 \tanh(x_6)$  为神经元 3 上

连接强度  $a_{33}, s_1$  和  $s_2$  分别为双曲型忆阻器的耦合强度,  $k$  和  $\tau$  为电自连接强度和时滞,  $i = 1, 2, 3, 4$ . 显然, 原点  $P_0(0, 0, 0, 0, 0, 0)$  是系统 (2) 的零平衡点. 那么, 在零平衡点附近的线性化系统的特征方程为:

$$\Delta(\lambda, \tau) = (c_0 \lambda^4 + c_1 \lambda^3 + c_2 \lambda^2 + c_3 \lambda^1 + c_4)(\lambda + 1)^2 + (d_0 \lambda^3 + d_1 \lambda^2 + d_2 \lambda^1 + d_3)(\lambda + 1)^2 e^{-\lambda \tau} = P(\lambda) + Q(\lambda) e^{-\lambda \tau} \quad (3)$$

其中,

$$\begin{aligned} c_0 &= 1, c_1 = -a_{11} + k - a_{22}s_2 - a_{44} + 4, \\ c_2 &= -a_{11}k + a_{11}a_{22}s_2 + a_{11}a_{44} - a_{12}a_{21} - a_{14}a_{15} - ka_{22}s_2 - a_{22}a_{44} - a_{23}a_{32} + a_{15}a_{44} + a_{34}a_{43} + 3c_1 - 6 \\ c_3 &= a_{11}ka_{33} + a_{11}ka_{44} + a_{11}a_{23}a_{32} - a_{11}a_{22}s_2a_{44} + a_{11}a_{34}a_{43} + a_{12}a_{21}a_{15} + a_{12}a_{21}a_{44} - a_{14}ka_{22}s_2 + a_{23}a_{32}a_{44} - ka_{34}a_{43} + 4 + 2c_2 + 3c_1 + ka_{22}s_2a_{44} + a_{14}a_{33}a_{22}s_2 \\ c_4 &= -a_{11}ka_{22}s_2a_{44} + a_{11}ka_{34}a_{43} - a_{11}a_{23}a_{32}a_{44} - a_{14}a_{21}a_{32}a_{43} + a_{12}a_{21}a_{34}a_{43} - a_{12}a_{23}a_{34}a_{15} - a_{12}a_{21}a_{22}s_2a_{44} + a_{14}a_{23}a_{32}a_{15} + a_{14}a_{22}a_{15}a_{22}s_2 + c_3 - c_2 + c_1 - 1 \\ d_0 &= -1, d_1 = a_{11} + a_{22}s_2 + a_{44} - 3, \\ d_2 &= -a_{11}a_{22}s_2 - a_{11}a_{44} + a_{14}a_{15} - a_{33}a_{44} + a_{34}a_{43} + 2d_1 + 3, \\ d_3 &= a_{11}a_{22}s_2a_{44} - a_{11}a_{34}a_{43} - a_{14}a_{33}a_{15} - a_{11} - a_{22}s_2 - a_{44} + 2 + d_2 \end{aligned}$$

为确定系统的稳定性, 首先考虑  $\tau = 0$  情形. 此时,

$$\Delta(\lambda, 0) = \lambda^6 + e_1 \lambda^5 + e_2 \lambda^4 + e_3 \lambda^3 + e_4 \lambda^2 + e_5 \lambda + e_6,$$

其中:

$$\begin{aligned} e_1 &= 2c_0 + c_1 + d_0, \\ e_2 &= c_0 + 2c_1 + 2d_0 + c_2 + d_1, \\ e_3 &= c_1 + d_0 + 2c_2 + 2d_1 + c_3 + d_2, \\ e_4 &= c_2 + d_1 + 2c_3 + 2d_2 + c_4 + d_3, \\ e_5 &= c_3 + d_2 + 2c_4 + 2d_3, e_6 = c_4 + d_3. \end{aligned}$$

根据 Routh-Hurwitz 判据可知, 当  $\Delta_i > 0 (i = 1 \sim 6)$  时系统是渐进稳定的, 其中:

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= e_1, \Delta_2 = e_1 e_2 - e_3, \\ \Delta_3 &= \Delta_2 e_3 + e_1 e_5 - e_1^2 e_4, \\ \Delta_4 &= \Delta_3 e_4 - \Delta_2 e_2 e_5 + e_1 e_4 e_5 - e_5^2 - e_1 e_3 e_6 + e_1^2 e_2 e_6, \\ \Delta_5 &= \Delta_4 e_5 - 2\Delta_3 e_3 e_6 + \Delta_2 e_3^2 e_6 + e_1^2 e_2 e_5 e_6 - e_1^2 e_3 e_4 e_6 - e_1^2 e_6^2 \end{aligned}$$

$$\Delta_6 = e_6 \Delta_5.$$

当  $\tau > 0$  时,若式(3)有一对纯虚特征根

$\lambda = \pm i\omega (\omega > 0)$ , 则

$$\begin{aligned} \Delta(i\omega, \tau) = & -\omega^6 + l_1 i\omega^5 + l_2 \omega^4 + l_3 i\omega^3 + l_4 \omega^2 + l_5 i\omega + \\ & l_6 + (-i\omega^5 + l_7 \omega^4 + l_8 i\omega^3 + l_9 \omega^2 + l_{10} i\omega + \\ & l_{11}) (\cos(\omega\tau)) - (-i\omega^5 + l_7 \omega^4 + l_8 i\omega^3 + \\ & l_9 \omega^2 + l_{10} i\omega + l_{11}) i\sin(\omega\tau) \end{aligned}$$

其中,

$$\begin{aligned} l_1 &= 2c_0 + c_1, \quad l_2 = c_0 + 2c_1 + c_2, \\ l_3 &= -(c_1 + 2c_2 + c_3), \quad l_4 = -(c_2 + 2c_3 + c_4), \\ l_5 &= c_3 + 2c_4, \quad l_6 = c_4, \quad l_7 = 2d_0 + d_1, \\ l_8 &= -(d_0 + 2d_1 + d_2), \quad l_9 = -(d_1 + 2d_2 + d_3), \\ l_{10} &= d_2 + 2d_3, \quad l_{11} = d_3 \end{aligned}$$

分离  $\Delta(i\omega, \tau) = 0$  的实部和虚部, 可得:

$$\begin{cases} P_R(\omega) + Q_R(\omega) \cos(\omega\tau) + Q_I(\omega) \sin(\omega\tau) = 0 \\ P_I(\omega) + Q_I(\omega) \cos(\omega\tau) - Q_R(\omega) \sin(\omega\tau) = 0 \end{cases} \quad (4)$$

其中,

$$\begin{aligned} P_R(\omega) &= -\omega^6 + l_2 \omega^4 + l_4 \omega^2 + l_6, \\ P_I(\omega) &= l_1 \omega^5 + l_3 \omega^3 + l_5 \omega, \\ Q_R(\omega) &= l_7 \omega^4 + l_9 \omega^2 + l_{11}, \\ Q_I(\omega) &= -\omega^5 + l_8 \omega^3 + l_{10} \omega. \end{aligned}$$

消去式(4)中的谐波项, 可得:

$$G(\omega) = \omega^{12} + m_1 \omega^{10} + m_2 \omega^8 + m_3 \omega^6 + m_4 \omega^4 + m_5 \omega^2 + m_6 = 0 \quad (5)$$

其中,

$$\begin{aligned} m_1 &= l_1^2 - 2l_2 - 1, \\ m_2 &= 2l_1 l_3 + l_2^2 - l_7^2 - 2l_4 + 2l_8, \\ m_3 &= 2(l_1 l_5 + l_2 l_4 - l_7 l_9 + l_{10} - l_6) + l_3^2 - l_8^2, \\ m_4 &= 2(l_2 l_6 - l_{10} l_8 - l_{11} l_7 + l_3 l_5) + l_4^2 - l_9^2, \\ m_5 &= -l_{10}^2 + l_5^2 + 2l_4 l_6 - 2l_{11} l_9, \\ m_6 &= l_6^2 - l_{11}^2. \end{aligned}$$

通常情况下, 如果式(5)存在正实根  $\omega_i$ , 由式(4)

可确定一组临界时滞为  $\tau_{i,j} = \frac{\varphi_i + 2j\pi}{\omega_i}$ , 其中

$\varphi_i \in [0, 2\pi)$ , 且满足:

$$\begin{cases} \cos(\varphi_i) = -\frac{P_I(\omega_i) Q_I(\omega_i) + P_R(\omega_i) Q_R(\omega_i)}{Q_I^2(\omega_i) + Q_R^2(\omega_i)} \\ \sin(\varphi_i) = \frac{P_I(\omega_i) Q_R(\omega_i) - P_R(\omega_i) Q_I(\omega_i)}{Q_I^2(\omega_i) + Q_R^2(\omega_i)} \end{cases}$$

根据时滞微分方程稳定性和分岔理论<sup>[12]</sup>, 可得如

下结论.

**定理 1:** 当  $\Delta_i > 0 (i=1 \sim 6)$  均成立, 则有:

(1) 若式(5)无正实根, 则系统(2)的零平衡点是全时滞局部渐近稳定的.

(2) 若式(5)存在正实根  $\omega_0$ , 则存在某个常数  $\tau_0 > 0$  使得系统(2)的零平衡点在  $\tau \in [0, \tau_0)$  内是局部渐近稳定的, 并且系统在  $\tau = \tau_0$  时发生 Hopf 分岔, 产生周期振荡. 其中,  $\tau_0 = \min(\tau_{i,j})$ .

## 2 数值算例

(1) 系统参数为  $a_{11} = -2, a_{12} = 0.4, a_{14} = 0.5, k = -0.5, a_{21} = 0.25, a_{23} = 1.6, a_{32} = 0.5, s_2 = -1, a_{34} = 1.2, s_1 = 0.8, a_{43} = 0.6, a_{44} = -1.5, a_1 = 1, a_2 = 1, b_1 = 0.8, b_2 = 0.5$ . 经计算可知:  $\Delta_1 = 10.5, \Delta_2 = 359.76, \Delta_3 = 20876.61, \Delta_4 = 1153790.4, \Delta_5 = 32269551.12, \Delta_6 = 5.2801\Delta_5 > 0$ .

根据 Routh-Hurwitz 判据可知, 系统的特征根均具有负实部, 那么零平衡点是局部渐近稳定的. 当  $\tau > 0$  时, 式(5)可写为:

$$G(\omega) = \omega^{12} + 23.69\omega^{10} + 587.63\omega^6 + 628.26\omega^4 + 196.89\omega^8 + 168.74\omega^2 - 46.09 = 0$$

解得唯一正实根  $\omega = 0.4014$ , 由式(4)可得相应的临界时滞为  $\tau_j = 4.262, 12.088, 19.915, 27.742, \dots$ . 根据定理 1 可知: 当  $\tau \in [0, 4.262)$  时, 系统的零平衡点是渐近稳定的, 而当  $\tau > 4.262$  时, 系统的零平衡点是不稳定的. 显然, 当  $\tau = 4.262$  时, 系统发生了 Hopf 分岔.

图 2(a) 和图 2(b) 分别为  $\tau = 4$  和  $\tau = 4.4$  时系统的响应, 初始条件为  $(0.1, 0.4, 0, 0, 0, 0)$ . 图 2(a) 表明系统状态均收敛到零平衡点, 而图 2(b) 表明系统的零平衡点失去稳定性, 出现周期振荡. 这与定理 1 的结论相一致.

(2) 系统参数为  $a_{11} = -0.8, a_{12} = 1.2, a_{14} = -6.7, a_{21} = 1.1, k = -0.1, a_{23} = 2.8, a_{32} = -2, s_2 = 0.6, a_{34} = 2.8, s_1 = 0.8, a_{43} = -2, a_{44} = 4, a_1 = 1, a_2 = 1, b_1 = 0.8, b_2 = 0.5$ .

图 3 为在初始条件  $(0.3, 1, -0.5, 0.8, 0.2, -0.4)$  下,  $x_1 - x_2$  平面上的相图. 图 3(a) 表明: 无时滞时, 系统为混沌状态. 当  $\tau = 0.06$  时, 出现了周期 8 运动, 如图 3(b) 所示. 当  $\tau = 0.2$  时, 周期 8 运动失稳, 产生了周期 4 运动, 如图 3(c) 所示. 图 3(d) 为当  $\tau = 1$  时的周期 2 运动. 随着时滞量的增加, 系

统经历了周期 4、周期 8 以及混沌运动,如图 3(e)~(g)所示. 当  $\tau = 1.982$  时,系统出现了周期 7 窗口,如图 3(h)所示.

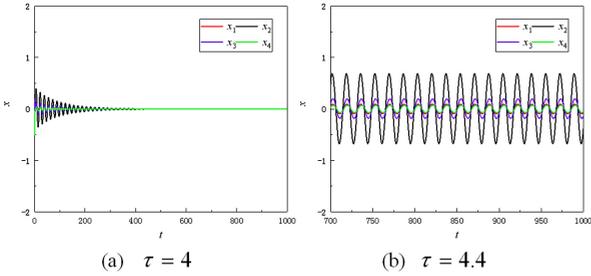


图 2 系统(2)的响应

Fig.2 The responses of the system (2)

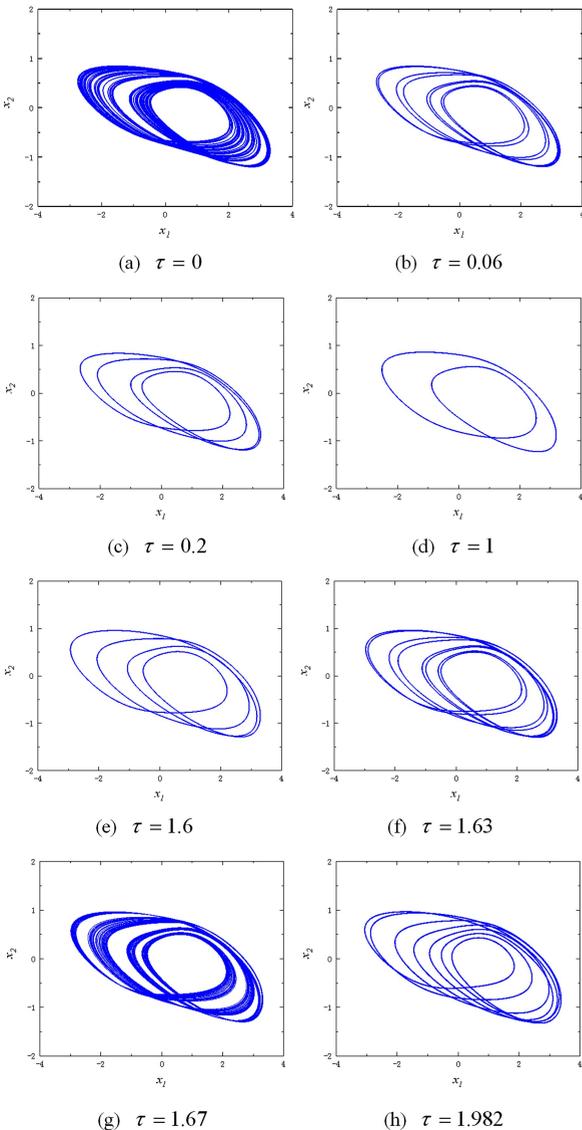


图 3  $x_1-x_2$  平面上的相图

Fig.3 Phase diagram in the  $x_1-x_2$  plane

工具. 例如,周期运动对应于 Poincaré 截面上的孤立点. 图 4 为 Poincaré 截面上的分岔图,其中 Poincaré 截面取为  $\Sigma = \{(\tau_1, x_1) : (x_2 = 0, x_2 > 0)\}$ .

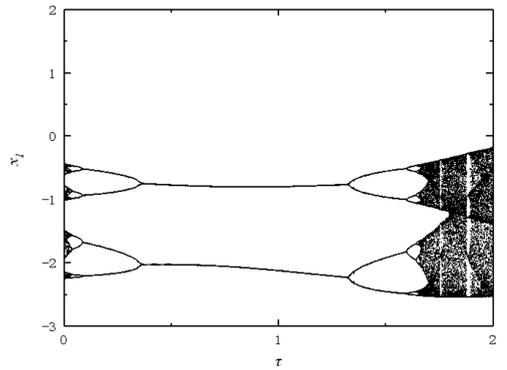


图 4 Poincaré 截面上系统(2)的分岔图

Fig.4 Bifurcation diagram of the system (2) on the Poincaré section

### 3 电路实验

电路实验平台主要由 Hopfield 神经元电路、双曲正切函数电路、忆阻器电路、时滞电路等模块组成. 本文采用 Multisim 软件进行电路仿真,电路原理图如图 5 所示,其中  $v, w$  为忆阻器模块, delay 为时滞电路模块,  $-\tanh$  为负双曲正切转换函数模块.

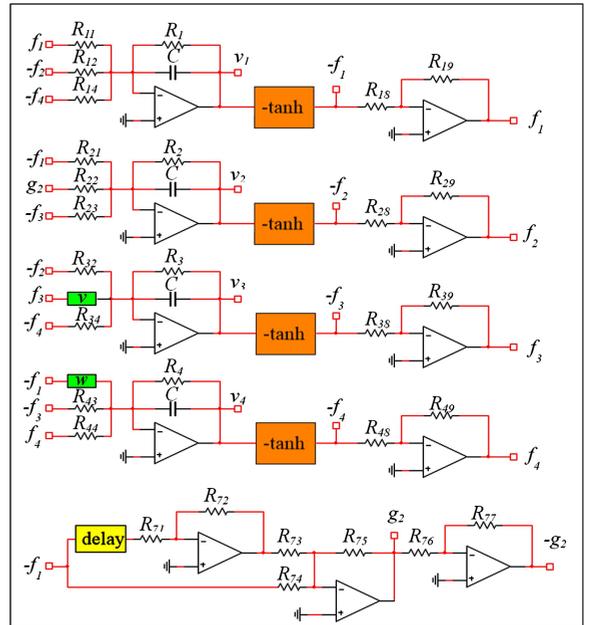


图 5 电路原理图

Fig.5 A circuit implementation of the system (2)

如图 5 所示,电路方程为:

$$R_1 C \frac{dv_1}{dt} = -v_1 \frac{R_1}{R_{11}} \tanh(v_1) + \frac{R_1}{R_{12}} \tanh(v_2) +$$

Poincaré 截面是分析非线性动力学行为的有

$$\begin{aligned}
 & \frac{R_1}{R_{14}} \tanh(v_4) \\
 R_2 C \frac{dv_2}{dt'} &= -v_2 + \frac{R_2}{R_{21}} \tanh(v_1) - \frac{R_2}{R_{22}} (v_2(t' - \tau') - \\
 & \quad v_2(t')) + \frac{R_2}{R_{23}} \tanh(v_3) \\
 R_3 C \frac{dv_3}{dt'} &= -v_3 - \left( \frac{R_3}{R_{va}} - \frac{0.1R_3}{R_{vb}} \tanh(v_6) \right) \tanh(v_3) + \\
 & \quad \frac{R_3}{R_{32}} \tanh(v_2) + \frac{R_3}{R_{34}} \tanh(v_4) \\
 R_4 C \frac{dv_4}{dt'} &= -v_4 + \left( \frac{R_4}{R_{wa}} - \frac{0.1R_4}{R_{wb}} \tanh(v_5) \right) \tanh(v_1) + \\
 & \quad \frac{R_4}{R_{42}} \tanh(v_2) - \frac{R_4}{R_{44}} \tanh(v_4) \\
 RC \frac{dv_5}{dt'} &= -v_5 - \tanh(v_1) \\
 RC \frac{dv_6}{dt'} &= -v_6 - \tanh(v_3) \tag{6}
 \end{aligned}$$

其中,  $v_i$  为第  $i$  个神经元的输出电压值,  $C = 100\text{nF}$ ,  $R_i = 10\text{K}\Omega$  ( $i = 1 \sim 4$ ).  $f_i$  为  $\tanh$ ,  $g_2$  为  $v_2(t' - \tau') - v_2(t')$ . 式(6)电路参数与式(2)中无量纲参数之间满足如下关系  $t = t'/RC_1$ ,  $\tau = \tau'/RC_1$ ,  $a_{ij} = R_i/R_{ij}$ ,  $s_1 = R_4/R_{wa}$ ,  $s_2 = R_3/R_{va}$ ,  $k = R_2/R_{22}$ ,  $b_1 = 0.1R_4/R_{wb}s_1$ ,  $b_2 = 0.1R_3/R_{vb}s_2$ . 显然  $RC = 1\text{ms}$ . 电路中的初始条件可以通过设置电容的初始电压来实现, 神经元初始电压与电容器电压之间关系满足  $v_{i0} = -v_{ci0}$ .

式(1)所示的忆阻器可由图6所示的电路实现. 其中,  $M$  为输出增益为 0.1 的乘法模拟器,  $R = 10\text{K}\Omega$ ,  $C = 100\text{nF}$ . 如图6所示, 忆阻器的电压电流关系如式(1)所示, 其中,  $R_a = 1/a\text{K}\Omega$ ,  $R_b = 0.1/b\text{K}\Omega$ ,  $m = RC = 1\text{ms}$ .

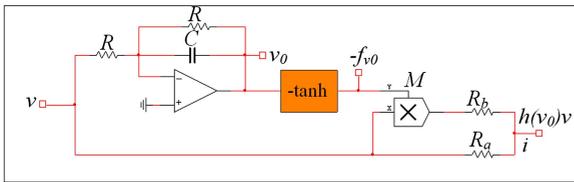


图6 忆阻器电路  
Fig.6 The circuit of memristor

图7为负双曲正切函数电路. 由MPS2222型三极管、运算放大器以及电阻等构成. 其中,  $R = 10\text{K}\Omega$ ,  $R_F = 520\Omega$ ,  $R_1 = 1\text{K}\Omega$ ,  $R_2 = 2\text{K}\Omega$ ,  $R_3 = 9.8\text{K}\Omega$ , 工作电压为  $\pm 15\text{V}$ .

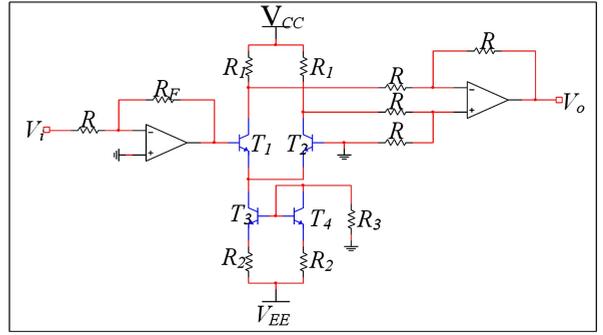


图7 负双曲正切函数电路  
Fig.7 The minus hyperbolic tangent function circuit

图8为时滞电路, 主要由运算放大器、电阻以及电容构成, 可实现时滞量为  $\tau' = 2R_d C_1$ . 其中,  $R_0 = 2.2\text{K}\Omega$ ,  $C_1 = 10\text{nF}$ . 对于时滞量较大的情形, 该电路输出的实际时滞量与理想时滞量之间存在较大误差, 为保证精度, 可采用多个时滞单元模块级联的方式. 本文采用 0.2ms 的时滞量作为时滞单元模块, 此时  $R_d = 10\text{K}\Omega$ . 例如, 时滞量为 4.4ms 时可采用 22 个 0.2ms 的单元模块级联实现; 而 1.76ms 的时滞量可采用 8 个 0.2ms 的单元模块和 1 个 0.16ms 的时滞电路实现.

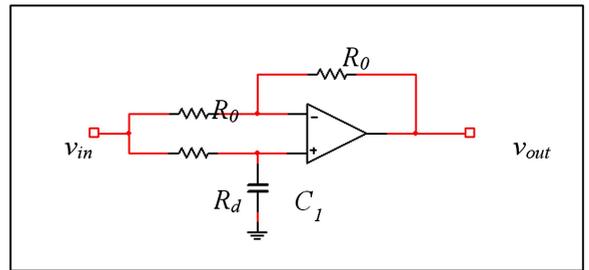


图8 时滞电路  
Fig.8 Time delay circuit

本文采用以下两组参数进行实验:

(1) 电路参数为:  $R_{11} = 5\text{K}\Omega$ ,  $R_{12} = 25\text{K}\Omega$ ,  $R_{14} = 20\text{K}\Omega$ ,  $R_{21} = 40\text{K}\Omega$ ,  $R_{22} = 20\text{K}\Omega$ ,  $R_{23} = 6.25\text{K}\Omega$ ,  $R_{32} = 20\text{K}\Omega$ ,  $R_{34} = 8.33\text{K}\Omega$ ,  $R_{43} = 16.67\text{K}\Omega$ ,  $R_{44} = 6.67\text{K}\Omega$ ,  $R_{va} = 12.5\text{K}\Omega$ ,  $R_{vb} = 1.56\text{K}\Omega$ ,  $R_{va} = 10\text{K}\Omega$ ,  $R_{i8} = R_{i9} = R_{7j} = 10\text{K}\Omega$  ( $i = 1 \sim 4, j = 1 \sim 7$ ),  $R_{vb} = 2\text{K}\Omega$ .

图9为  $\tau' = 4\text{ms}$  和  $\tau' = 4.4\text{ms}$  时的电路实验结果, 其中初始电压设置为  $(-0.1, -0.4, 0, 0, 0, 0)$  (V). 如图9所示, 当  $\tau' = 4\text{ms}$  时, 电压信号很快衰减为零, 而当  $\tau' = 4.4\text{ms}$  时, 电压信号为稳定的周期振荡. 图10为时滞变化时, 振幅与频率的数值仿真与电路实验结果对比图. 两者结果相吻合.

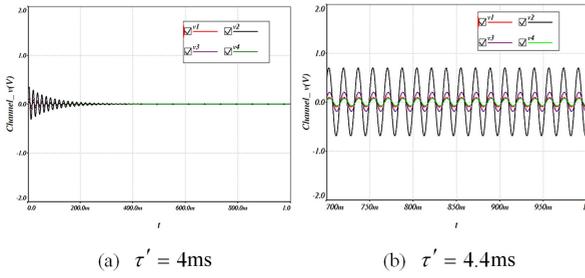


图 9 电路的输出电压

Fig.9 The output voltages  $v_i$  in the electronic circuit

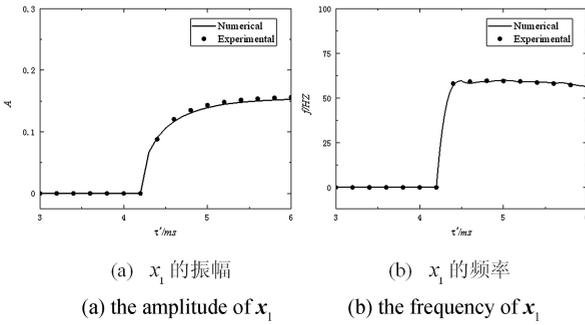


图 10 电路实验与数值结果对比图

Fig.10 The experimental and numerical results

(2)  $R_{11} = 12.5\text{K}\Omega, R_{12} = 8.33\text{K}\Omega, R_{14} = 1.49\text{K}\Omega, R_{22} = 100\text{K}\Omega, R_{32} = 5\text{K}\Omega, R_{34} = 3.57\text{K}\Omega, R_{43} = 5\text{K}\Omega, R_{44} = 2.5\text{K}\Omega, R_{va} = 16.67\text{K}\Omega, R_{vb} = 3.33\text{K}\Omega$ . 其余电阻值不变. 针对系统参数符号的变化情形,可采用反向器实现. 接口调整如下: $R_{14}$ 所对应的 $-f_4$ 改接入 $f_4, R_{43}$ 所对应的 $-f_3$ 改接入 $f_3$ ,忆阻器模块 $v$ 中 $R_{va}$ 所对应的 $f_3$ 改接为 $-f_3$ .

图 11 为初始电压  $(-0.3, -1, 0.5, -0.8, -0.2, 0.4)$  (V)时电路实验结果. (a) 无时滞时,系统运动为混沌吸引子; (b)  $\tau' = 0.06\text{ms}$  时,周期 8 运动; (c)  $\tau' = 0.2\text{ms}$  时,周期 4 运动; (d)  $\tau' = 1\text{ms}$  时,周期 2 运动; (e)  $\tau' = 1.6\text{ms}$  时,周期 4 运动; (f)  $\tau' = 1.76\text{ms}$  时,周期 8 运动; (g)  $\tau' = 1.8\text{ms}$  时,混沌吸引子; (h)  $\tau' = 1.976\text{ms}$  时,周期 7 运动. 比较图 3 和图 11 可知,实验结果与数值仿真结果高度吻合.

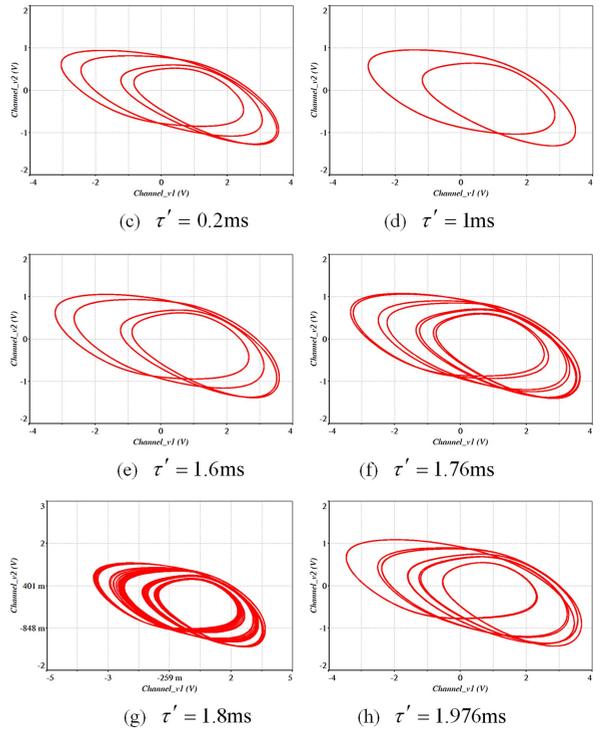
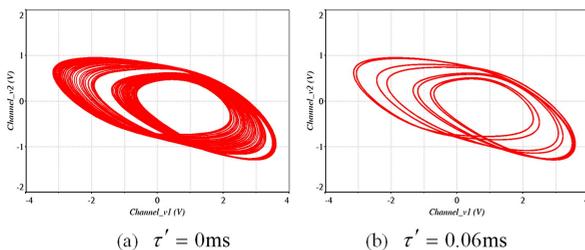


图 11  $v_1-v_2$  平面上的相图

Fig.11 The phase diagram in the  $v_1-v_2$  plane

### 4 结论

本文研究了含时滞的忆阻型双向环状 Hopfield 神经网络的稳定性、Hopf 分岔以及复杂动力学特性. 根据系统特征方程的根分布情况,得到网络零平衡点的全时滞稳定条件,并给出了系统失稳发生 Hopf 分岔的条件. 揭示了多种有趣的动力学现象,如周期 2、周期 4、周期 7、周期 8 等运动,甚至混沌吸引子,并给出了 Poincaré 截面上的分岔图. 基于非线性 Hopfield 神经元及其转换函数电路、忆阻器电路以及时滞电路等,搭建了相应的电路实验平台,有效验证了理论分析和数值模拟的结果.

### 参 考 文 献

- Hopfield J J. Neural networks and physical systems with emergent collective computational abilities. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 1982, 79 (8): 2554 ~ 2558
- 王在华,胡海岩. 时滞动力系统的稳定性与分岔:从理论走向应用. *力学进展*, 2013, 43(1): 3~20 (Wang Z H, Hu H Y. Stability and bifurcation of delayed dynamic systems: from theory to application. *Advances in Mechanics*, 2013, 43(1): 3~20 (in Chinese))

- 3 徐鉴,裴利军. 时滞系统动力学近期研究进展与展望. 力学进展, 2006, 36(1): 17~30 (Xu J, Pei L J. Advances in dynamics for delayed systems. *Advances in Mechanics*, 2006, 36(1): 17~30 (in Chinese))
- 4 Strukov D B, Snider G S, Stewart D R, et al. The missing memristor found. *Nature*, 2008, 453(7191): 80~83
- 5 Borghetti J, Gregory S, Philip J, et al. 'Memristive' switches enable 'stateful' logic operations via material implication. *Nature*, 2010, 464(7290): 873~876
- 6 Kengne J, Nguomkam N A, Tchiotso D. Antimonotonicity, chaos and multiple attractors in a novel autonomous memristor-based jerk circuit. *Nonlinear Dynamics*, 2017, 27(7): 1~20
- 7 Ye X L, Mou J, Luo C F, et al. Dynamics analysis of Wien-bridge hyperchaotic memristive circuit system. *Nonlinear Dynamics*, 2018, 92(3): 923~933
- 8 Pershin Y V, Ventra M D. Experimental demonstration of associative memory with memristive neural networks. *Neural Networks the Official Journal of the International Neural Network Society*, 2010, 23(7): 881~886
- 9 Bao B C, Qian H, Xu Q, et al. Coexisting behaviors of asymmetric attractors in hyperbolic-type memristor based Hopfield neural network. *Frontiers in Computational Neuroscience*, 2017, 11: 81~95
- 10 Herrmann C S, Klaus A, et al. Autapse turns neuron into oscillator. *International Journal of Bifurcation & Chaos*, 2004, 14(2): 623~633
- 11 Li Y, Schmid G, Hänggi P, et al. Spontaneous spiking in an autaptic Hodgkin-Huxley setup. *Physical Review E*, 2010, 82(6): 061907
- 12 Hu H Y, Wang Z H. Dynamics of controlled mechanical systems with delayed feedback. Springer-Verlag, Heidelberg, 2002
- 13 王青云,张红慧. 生物神经元系统同步转迁动力学问题. 力学进展, 2013, 43(1): 149~162 (Wang Q Y, Zhang H H. Advances of synchronization transition in neuronal networks. *Advances in Mechanics*, 2013, 43(1): 149~162 (in Chinese))
- 14 茅晓晨. 时滞耦合系统动力学的研究进展. 动力学与控制学报, 2017, 15(4): 295~306 (Mao X C. Advances in dynamics for coupled systems with time delays. *Journal of Dynamics and Control*, 2017, 15(4): 295~306 (in Chinese))
- 15 Ma J, Song X L, Jin W Y, et al. Autapse-induced synchronization in a coupled neuronal network. *Chaos Solitons & Fractals*, 2015, 80: 31~38
- 16 Guo S J, Huang L H. Hopf bifurcating periodic orbits in a ring of neurons with delays. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 2003, 183(1): 19~44

## DELAY-INDUCED COMPLICATED DYNAMICS OF A MEMRISTIVE HOPFIELD NEURAL NETWORK\*

Qiao Lei Mao Xiaochen<sup>†</sup>

(College of Mechanics and Materials, Hehai University, Nanjing 211100, China)

**Abstract** This paper reveals the stability, Hopf bifurcation and complex oscillations of a bidirectional memristive ring-coupled Hopfield neural network with a time delay. The delay-independent and delay-dependent conditions for the stability of the trivial equilibrium of the system are given. Various dynamical phenomena are explored, such as different periodic orbits and chaotic attractors. The bifurcation diagram as the function of the time delay is given by using Poincaré section techniques. A circuit experiment is designed and the experimental results reach a good agreement with theoretical analysis and numerical simulations.

**Key words** Hopfield neural networks, time delay, memristor, complicated dynamics, circuit experiment

Received 10 September 2018, revised 10 October 2018.

\* The project supported by the National Natural Science Foundation of China (11472097 and 11872169) and Fundamental Research Funds for the Central Universities under Grant (2018B17514).

<sup>†</sup> Corresponding author E-mail: maochen@hhu.edu.cn.