

# 旋转矩形孔薄壁圆环模态特性的行波计算\*

黄迪山<sup>†</sup> 林杰 张月月 何虹

(上海大学 机电工程与自动化学院, 上海 200072)

**摘要** 文中将建立旋转矩形孔薄壁圆环截面突变处的波传播模型,研究振动弹性波反射和透射特性,结合相位封闭原理,给出振动特征方程,得到薄壁圆环的各阶模态频率、模态形状和分支图.将静止矩形孔薄壁圆环的固有频率与有限元分析法求得的固有频率进行比较,验证行波法计算的准确性.研究将为轴承实体保持架的动力学计算提供理论基础.

**关键词** 行波法, 矩形孔薄壁圆环, 传递矩阵, 反射矩阵, 透射矩阵

DOI: 10.6052/1672-6553-2019-035

## 引言

行波法是一种联系时间和空间的解析方法.它将结构的自由振动看成弹性波在固体介质中的传播,其自由模态是由各传递波叠加形成.而且考虑振动波在结构介质中以一定的相速度传播,在遇到边界、接头、变截面等弹性体不连续处会发生波的反射和透射,使得波的扰动能量重新分配.因此,行波法是一种更符合动力响应本质的分析方法.

W.KIM<sup>[1]</sup>基于拉格朗日应变理论和哈密顿原理,对薄壁圆环平面内振动和平面外振动进行了建模和模态法分析.Mead D J<sup>[2]</sup>利用了相位封闭原理建立振动特征方程,通过求解特征方程得到梁的固有频率.相位封闭原理也使行波法成为一种准确有效的计算方法. D.Huang<sup>[3]</sup>等人分析了旋转薄壁圆环的波模式、相速度、波在截面变化处的传递特性以及振动特性等.Mei 利用行波法研究了 H、T 型框架结构<sup>[4]</sup>和十字型<sup>[5]</sup>框架结构的波传递特性.

除了动力学行波计算,黄修长<sup>[6]</sup>等人利用波动法分析曲梁结构中波形转换和能量传递.焦映厚<sup>[7]</sup>等人采用波动法研究有限尺寸加肋 L 型板结构的振动特性及其振动抑制问题.

本文基于旋转欧拉-伯努利弯曲梁模型,在矩形孔薄壁圆环行波动力学计算中,分析矩形孔薄壁圆环在变截面处的传播特性,给出反射和透射矩

阵.根据相位封闭原理,结合波的反射、透射矩阵与波传递矩阵,获得旋转矩形孔薄壁圆环振动特征方程,得到固有频率、模态形状和分支图.为验证行波计算方法的有效性,对静止矩形孔薄壁圆环同时进行行波和有限元分析,并将得出的结果作比较.

## 1 薄壁圆环动力学建模

图 1 所示旋转薄壁圆环,XYZ 是空间中一个固定的惯性坐标系,而 xyz 则是固定于微元上相对于 XYZ 的一个旋转坐标系,故沿圆环中性轴的周向坐标由  $y$  表示,与中性轴垂直的径向坐标与轴向坐标分别由  $x$  和  $z$  表示. $r\theta Z$  是一个圆柱坐标系. $b$  和  $h$  分别表示圆环横截面的宽和高.圆环横截面中性轴上周向和径向的位移分别用  $v$  和  $u$  表示.

根据参考文献[1]得到旋转薄壁圆环平面内的自由振动方程:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2\Omega \left( \frac{\partial^2 u}{\partial \theta \partial t} - \frac{\partial v}{\partial t} \right) + \Omega^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} - 2 \frac{\partial v}{\partial \theta} - u \right) - \\ & \frac{EI_i}{\rho AR^4} \left( \frac{\partial^3 v}{\partial \theta^3} - \frac{\partial^4 u}{\partial \theta^4} \right) + \frac{E}{2\rho R^4} \left[ (2R^2 + 6Ru_c + 3u_c^2) \cdot \right. \\ & \left. \left( \frac{\partial v}{\partial \theta} + u \right) - u_c (2R + u_c) \left( \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} - \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) \right] = 0 \quad (1a) \\ & \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + 2\Omega \left( \frac{\partial^2 v}{\partial \theta \partial t} + \frac{\partial u}{\partial t} \right) + \Omega^2 \left( \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + 2 \frac{\partial u}{\partial \theta} - v \right) - \end{aligned}$$

2017-09-20 收到第 1 稿,2018-05-18 收到修改稿.

\* 国家自然科学基金资助项目(51575330)

<sup>†</sup> 通讯作者 E-mail:hdishan@shu.edu.cn

$$\frac{EI_i}{\rho AR^4} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} - \frac{\partial^3 u}{\partial \theta^3} \right) - \frac{E}{2\rho R^4} \left[ (2R^2 + 6Ru_e + 3u_e^2) \cdot \left( \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + u_e(2R + u_e) \left( \frac{\partial u}{\partial \theta} - v \right) \right] = 0 \quad (1b)$$

由上述方程(1a)和(1b)可知,旋转薄壁圆环的径向位移  $u$  和周向位移  $v$  互相耦合.其中  $E$  是弹性模量,  $I_i$  为  $Z$  轴的惯性矩,  $R$  是常曲率半径,  $\Omega$  为转速,  $\rho$  为密度,  $t$  为时间变量,  $\theta$  是固定坐标系中  $X$  轴到圆柱坐标系中  $r$  轴的角度.  $u_e$  为常数,表示为  $u_e = R(\sqrt{1+2\rho R^2 \Omega^2/E} - 1)$ .

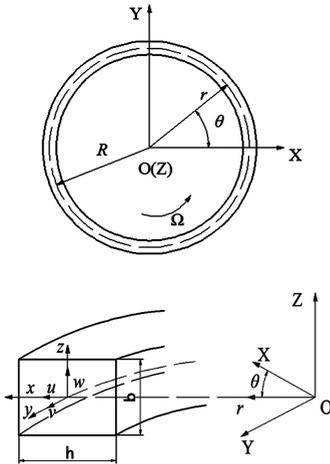


图1 自由旋转薄壁圆环模型

Fig.1 Model of unconstrained thin ring

## 2 行波法分析求解

### 2.1 波动法求解

采用行波法研究旋转薄壁圆环的波动传递特性,故假设振动方程的通解  $u(\theta, t) = \hat{u}e^{i(n\theta - \omega t)}$ ,  $v(\theta, t) = \hat{v}e^{i(n\theta - \omega t)}$ , 且其满足上述径向(1a)和周向(1b)自由振动方程.其中,  $\hat{u}$  和  $\hat{v}$  为径向波动和周向波动的波幅系数,  $n$  为波数且为整数,  $\omega$  为圆频率,  $i = \sqrt{-1}$ .将通解分别带入方程(1a)和(1b)得:

$$\begin{bmatrix} \psi_{11} & \psi_{12} \\ \psi_{21} & \psi_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{u} \\ \hat{v} \end{Bmatrix} = \mathbf{B} \begin{Bmatrix} \hat{u} \\ \hat{v} \end{Bmatrix} = 0 \quad (2)$$

其中:

$$\psi_{11} = 2\rho AR^4(-\omega^2 + 2\Omega n\omega - \Omega^2 n^2 - \Omega^2) + 2EI_i n^4 + EA(a + dn^2)$$

$$\psi_{12} = i(4\rho AR^4 \Omega(\omega - \Omega n) + 2EI_i n^4 + EAn(a + d))$$

$$\psi_{21} = -i(4\rho AR^4 \Omega(\omega - \Omega n) + 2EI_i n^3 + EAn(a + d))$$

$$\psi_{22} = 2\rho AR^4(-\omega^2 + 2\Omega n\omega - \Omega^2 n^2 - \Omega^2) +$$

$$2EI_i n^2 + EA(an^2 + d)$$

$$a = 2R^2 + 6Ru_e + 3u_e^2, \quad d = u_e(2R + u_e)$$

若径向波幅系数  $\hat{u}$  和周向波幅系数  $\hat{v}$  有非零解且满足方程(2),则矩阵  $\mathbf{B}$  的行列式应等于零,即得旋转薄壁圆环的色散方程:

$$\begin{aligned} & EI_i(2R^2 \Omega^2 \rho + E)n^6 + 2EI_i R^2 \Omega \omega n^5 - \\ & EI_i(4R^2 \Omega^2 \rho + R^2 \omega_\rho^2 + 2E)n^4 + \\ & 2\rho \Omega \omega(2\rho AR^6 \Omega^2 - EI_i R^2 + EAR^4)n^3 + \\ & (2\rho^2 AR^6 \Omega^2 \omega^2 - EI_i R^2 \omega_\rho^2 - EAR^4 \omega_\rho^2 + \\ & 2EI_i R^2 \Omega^2 \rho + E^2 I_i)n^2 - \\ & 2AR^4 \Omega \omega \rho(2R^2 \omega_\rho^2 + 2R^2 \Omega^2 \rho + E)n + \\ & \rho AR^4 \omega^2(R^2 \omega_\rho^2 - 6R^2 \Omega^2 \rho - E) = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

从式(3)可知,该式可用于求解波数  $n$  或圆频率  $\omega$ .若已知波数,则可求得对应各波数下的频率.反之在已知频率的情况下,求解其波数.此时公式(3)可被视为旋转圆环的色散方程,其求解得到6种波,其中包含正行波和负行波(波数为实数,虚数,或为复数).

再者,由式(2)可得径向位移  $u$  和周向位移  $v$  的耦合系数  $\alpha$ ,其表达式如下:

$$\alpha = \frac{\hat{v}}{\hat{u}}$$

$$\begin{aligned} & 2\rho AR^4(-\omega^2 + 2\Omega n\omega - \Omega^2 n^2 - \Omega^2) + \\ & 2EI_i n^4 + EA(a + dn^2) \\ & = \frac{-i(4\rho AR^4 \Omega(\omega - \Omega n) + 2EI_i n^3 + EAn(a + d))}{-i(4\rho AR^4 \Omega(\omega - \Omega n) + 2EI_i n^3 + EAn(a + d))} \end{aligned} \quad (4)$$

从式(4)可知,周向位移  $v$  可由径向位移  $u$  以及耦合系数  $\alpha$  求得.转速对薄壁圆环周向位移  $v$  和径向位移  $u$  的影响也可通过耦合系数  $\alpha$  更加直观的表现出来.

因此,径向位移  $u$  以及沿圆环中性线的周向位移  $v$  可由多个简谐波表示,故其波动表达式的通解如下方程:

$$u(\theta, t) = (\hat{u}_1^+ e^{in_1\theta} + \hat{u}_2^+ e^{in_2\theta} + \hat{u}_3^+ e^{in_3\theta} + \hat{u}_4^+ e^{in_4\theta} + \hat{u}_5^- e^{in_5\theta} + \hat{u}_6^- e^{in_6\theta}) e^{-i\omega t}$$

$$v(\theta, t) = (\alpha_1 \hat{u}_1^+ e^{in_1\theta} + \alpha_2 \hat{u}_2^+ e^{in_2\theta} + \alpha_3 \hat{u}_3^+ e^{in_3\theta} + \alpha_4 \hat{u}_4^+ e^{in_4\theta} + \alpha_5 \hat{u}_5^- e^{in_5\theta} + \alpha_6 \hat{u}_6^- e^{in_6\theta}) e^{-i\omega t}$$

其中,上标“+”和“-”分别表示沿圆环正方向传播和负方向传播的弹性波;  $n_1, n_2, n_3$  表示沿正方向传播的波数,  $n_4, n_5, n_6$  表示沿负方向传播的波数.

### 2.2 正负行波判别

基于上述振动方程的通解,另波数  $n = a + bi$ , 故其中  $e^{in\theta} = e^{ia\theta - b\theta}$ .  $e^{ia\theta}$  表示波在空间中的相位变化.  $e^{-b\theta}$  表示随着波在圆环波导中的传递, 波幅值的变化. 根据文献 [8], Lee 对正行波给出如下定义: ① 当  $\text{Im}\{n\} \neq 0$  时, 正行波的幅值应沿着波传递的正方向逐渐衰减. ② 当  $\text{Im}\{n\} = 0$  时, 正行波所携带能量的传递速度即其群速度应大于零.

因此基于上述假设的振动方程通解及 Lee<sup>[8]</sup> 对正行波的定义, 可知正行波应满足以下判别条件:

$$\text{Im}\{n\} \geq 0 \text{ 或当 } \text{Im}\{n\} = 0 \text{ 时, } \text{Re}(\partial n / \partial \omega) > 0$$

## 3 旋转不等截面薄壁圆环的动力学特性

### 3.1 波在连续弹性体中的传递矩

波在连续的弹性体中传播, 其幅值将随着波的相位变化而逐渐衰减. 由此, 波沿波导的某一位置传递到另一位置的变化可以由一个传递矩阵来表示. 在旋转薄壁圆环中, 如图 2 所示, 出现沿正方向传播的正行波和负方向传播的负行波. 正负行波的波传递矩阵分别由矩阵 (5) 和 (6) 表示.

$$T^+(\theta) = \begin{bmatrix} e^{in_1\theta} & 0 & 0 \\ 0 & e^{in_2\theta} & 0 \\ 0 & 0 & e^{in_3\theta} \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$T^-(-\theta) = \begin{bmatrix} e^{in_4(-\theta)} & 0 & 0 \\ 0 & e^{in_5(-\theta)} & 0 \\ 0 & 0 & e^{in_6(-\theta)} \end{bmatrix} \quad (6)$$

如图 2 所示, 正行波沿逆时针方向传播  $\theta$  角 (以逆时针方向为正) 以及负行波沿顺时针方向传播  $\theta$  角可以表示为如下形式:

$$a_2^+ = T^+(\theta) a_1^+, \theta > 0 \quad (7)$$

$$b_1^- = T^-(-\theta) b_2^-, \theta > 0 \quad (8)$$

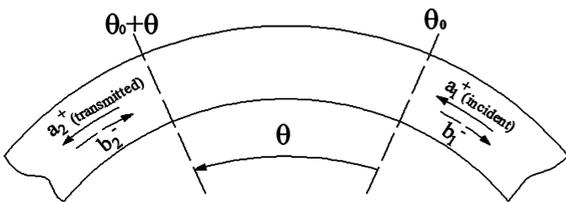


图 2 波在旋转等截面圆环中传播

Fig.2 Wave propagation in the rotating ring

### 3.2 波在不连续弹性体处的反射矩阵和透射矩阵

由于波在弹性体不连续处会发生透射和反射. 因此, 在矩形孔薄壁圆环的截面突变处的波将发生反射和透射. 如图 3 所示, 圆环截面突变处可划分为单元 1, 单元 2, 单元 3 和单元 4 组合而成, 这样波传递有四种模式.

模式一为波的左扩散, 表示入射波  $a_1^+$  传递至截面变化处 (即单元 1 与单元 2 和单元 3 的边界处) 产生一个反射波  $a_1^-$  以及沿着单元 2 和单元 3 传递的透射波  $a_2^+$  和  $a_3^+$ ; 模式二为波的右聚集, 表示入射波  $a_2^-$  和  $a_3^-$  传递至截面变化处分别在单元 2 和单元 3 产生两个反射波  $a_2^+$  和  $a_3^+$  以及沿着单元 1 传递的透射波  $a_1^-$ ; 模式三为波的左聚集, 入射波  $a_2^+$  和  $a_3^+$  传递至截面变化处分别在单元 2 和单元 3 产生两个反射波  $a_2^-$  和  $a_3^-$  以及沿着单元 4 传递的透射波  $a_4^+$ ; 模式四为波的右扩散, 表示入射波  $a_4^-$  传递至截面变化处产生一个反射波  $a_4^+$  以及沿着单元 2 和单元 3 传递的透射波  $a_2^-$  和  $a_3^-$ .

模式一中各传递波之间关系可表示为:

$$a_1^- = r_1^+ a_1^+, a_2^+ = t_{12} a_1^+, a_3^+ = t_{13} a_1^+ \quad (9)$$

$$a_1^- = [\hat{u}_{14} \quad \hat{u}_{15} \quad \hat{u}_{16}], a_2^+ = [\hat{u}_{21}^+ \quad \hat{u}_{22}^+ \quad \hat{u}_{23}^+]$$

$$a_1^+ = [\hat{u}_{11}^+ \quad \hat{u}_{12}^+ \quad \hat{u}_{13}^+], a_3^+ = [\hat{u}_{31}^+ \quad \hat{u}_{32}^+ \quad \hat{u}_{33}^+]$$

$$(10)$$

模式二中各传递波之间关系可表示为:

$$a_2^- = r_2^+ a_2^+, a_3^- = r_3^+ a_3^+, t_{21} a_2^+ + t_{31} a_3^+ = a_1^- \quad (11)$$

$$(11)$$

$$a_2^- = [\hat{u}_{24}^- \quad \hat{u}_{25}^- \quad \hat{u}_{26}^-], a_3^- = [\hat{u}_{34}^- \quad \hat{u}_{35}^- \quad \hat{u}_{36}^-]$$

$$(12)$$

其中, 用  $r_1^+, r_2^+, r_3^+$  分别表示波传递至单元 1, 2, 3 不连续处的反射矩阵, 用  $t_{12}^+$  和  $t_{13}^+$  分别表示波由单元 1 传递至单元 2 和单元 3 的透射矩阵,  $t_{21}^+$  和  $t_{31}^+$  则表示波由单元 2 和单元 3 传递至单元 1 的透射矩阵.  $a^+$  和  $a^-$  分别是包含波幅系数在内的正向传播弹性波和负向传播弹性波的向量, 其中第一个下标代表单元, 第二个下标 1~3 为正向传播弹性波, 4~6 为负向传播弹性波.

以模式一为例, 详细地分析反射和透射矩阵, 其余模式求解方法均与模式一的相似, 下文不加以赘述.

通过位移连续性和力平衡条件求解波在薄壁圆环截面突变处的透射矩阵和反射矩阵.

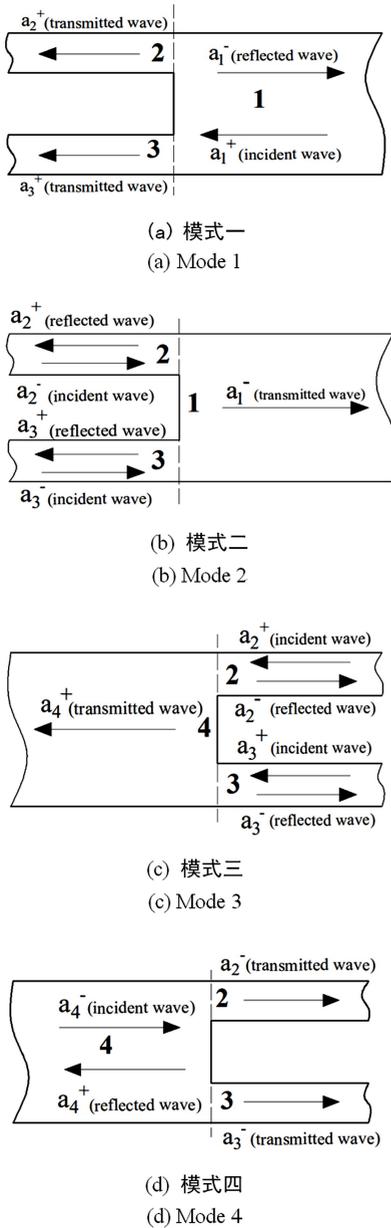


图3 波在变截面处的传递特性

Fig.3 Wave transmission characteristics at changed section

如图4所示,薄壁圆环在变截面处受切向力  $T$ , 剪切力  $S$  和平面内弯矩  $M$  的影响。

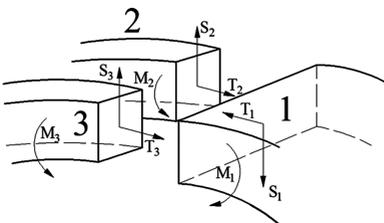


图4 变截面处的受力情况

Fig.4 Force diagram at the change of section

根据文献[9],切向力  $T$ , 剪切力  $S$  和平面内弯

矩  $M$  的表达式如下所示:

$$T = \frac{EA}{R} \left( u + \frac{\partial v}{\partial \theta} \right)$$

$$S = -\frac{EI_i}{R^3} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \left( v - \frac{\partial u}{\partial \theta} \right)$$

$$M = -\frac{EI_i}{R^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( v - \frac{\partial u}{\partial \theta} \right)$$

单元1在截面突变处的径向、周向和转角位移可表示为:

$$u_1(\theta) = \hat{u}_{11}^+ e^{in_{11}\theta} + \hat{u}_{12}^+ e^{in_{12}\theta} + \hat{u}_{13}^+ e^{in_{13}\theta} + \hat{u}_{14}^- e^{in_{14}\theta} + \hat{u}_{15}^- e^{in_{15}\theta} + \hat{u}_{16}^- e^{in_{16}\theta}$$

$$v_1(\theta) = \alpha_{11} \hat{u}_{11}^+ e^{in_{11}\theta} + \alpha_{12} \hat{u}_{12}^+ e^{in_{12}\theta} + \alpha_{13} \hat{u}_{13}^+ e^{in_{13}\theta} + \alpha_{14} \hat{u}_{14}^- e^{in_{14}\theta} + \alpha_{15} \hat{u}_{15}^- e^{in_{15}\theta} + \alpha_{16} \hat{u}_{16}^- e^{in_{16}\theta}$$

$$\xi_1(\theta) = \frac{1}{R} \left( \frac{\partial u_1(\theta)}{\partial \theta} + v_1(\theta) \right)$$

单元2在截面突变处的位移可表示为:

$$u_2(\theta) = \hat{u}_{21}^+ e^{in_{21}\theta} + \hat{u}_{22}^+ e^{in_{22}\theta} + \hat{u}_{23}^+ e^{in_{23}\theta}$$

$$v_2(\theta) = \alpha_{21} \hat{u}_{21}^+ e^{in_{21}\theta} + \alpha_{22} \hat{u}_{22}^+ e^{in_{22}\theta} + \alpha_{23} \hat{u}_{23}^+ e^{in_{23}\theta}$$

$$\xi_2(\theta) = \frac{1}{R} \left( \frac{\partial u_2(\theta)}{\partial \theta} + v_2(\theta) \right)$$

单元3在截面突变处的位移可表示为:

$$u_3(\theta) = \hat{u}_{31}^+ e^{in_{31}\theta} + \hat{u}_{32}^+ e^{in_{32}\theta} + \hat{u}_{33}^+ e^{in_{33}\theta}$$

$$v_3(\theta) = \alpha_{31} \hat{u}_{31}^+ e^{in_{31}\theta} + \alpha_{32} \hat{u}_{32}^+ e^{in_{32}\theta} + \alpha_{33} \hat{u}_{33}^+ e^{in_{33}\theta}$$

$$\xi_3(\theta) = \frac{1}{R} \left( \frac{\partial u_3(\theta)}{\partial \theta} + v_3(\theta) \right)$$

根据变截面处的位移连续性条件,可得:

$$u_1(0) = u_2(0) = u_3(0)$$

$$\xi_1(0) = \xi_2(0) = \xi_3(0)$$

$$v_1(0) = v_2(0) = v_3(0)$$

根据变截面处的力平衡条件,可得:

$$S_1 = S_2 + S_3$$

$$T_1 = T_2 + T_3$$

$$M_1 = M_2 + M_3$$

将式(14), (15), (16)代入式(17)整理,可得:

$$M_{11} a_1^+ + M_{12} a_1^- = M_{21} a_2^+ = M_{31} a_3^+ \tag{19}$$

其中,

$$M_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \frac{in_{11} + a_{11}}{R} & \frac{in_{12} + a_{12}}{R} & \frac{in_{13} + a_{13}}{R} \end{bmatrix}$$

$$M_{12} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ \frac{in_{14}+a_{14}}{R} & \frac{in_{15}+a_{15}}{R} & \frac{in_{16}+a_{16}}{R} \end{bmatrix}$$

$$M_{21} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \frac{in_{21}+a_{21}}{R} & \frac{in_{22}+a_{22}}{R} & \frac{in_{23}+a_{23}}{R} \end{bmatrix}$$

$$M_{31} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ \frac{in_{31}+a_{31}}{R} & \frac{in_{32}+a_{32}}{R} & \frac{in_{33}+a_{33}}{R} \end{bmatrix}$$

将式(14a), (14b), (15a), (15b)和(16a), (16b)代入式(18)整理可得:

$$N_{11}a_1^+ + N_{12}a_1^- = N_{21}a_2^+ + N_{31}a_3^+ \quad (20)$$

其中:

$$\kappa = EI_i, \zeta = EA$$

$$N_{11} = \begin{bmatrix} \frac{\kappa_1}{R^3}n_{11}^2(a_{11}-in_{11}) & \frac{\kappa_1}{R^3}n_{12}^2(a_{12}-in_{12}) & \frac{\kappa_1}{R^3}n_{13}^2(a_{13}-in_{13}) \\ \frac{\zeta_1}{R}(ia_{11}n_{11}+1) & \frac{\zeta_1}{R}(ia_{12}n_{12}+1) & \frac{\zeta_1}{R}(ia_{13}n_{13}+1) \\ -\frac{\kappa_1}{R^2}n_{11}(ia_{11}+n_{11}) & -\frac{\kappa_1}{R^2}n_{12}(ia_{12}+n_{12}) & -\frac{\kappa_1}{R^2}n_{13}(ia_{13}+n_{13}) \end{bmatrix}$$

$$N_{12} = \begin{bmatrix} \frac{\kappa_1}{R^3}n_{14}^2(a_{14}-in_{14}) & \frac{\kappa_1}{R^3}n_{15}^2(a_{15}-in_{15}) & \frac{\kappa_1}{R^3}n_{16}^2(a_{16}-in_{16}) \\ \frac{\zeta_1}{R}(ia_{14}n_{14}+1) & \frac{\zeta_1}{R}(ia_{15}n_{15}+1) & \frac{\zeta_1}{R}(ia_{16}n_{16}+1) \\ -\frac{\kappa_1}{R^2}n_{14}(ia_{14}+n_{14}) & -\frac{\kappa_1}{R^2}n_{15}(ia_{15}+n_{15}) & -\frac{\kappa_1}{R^2}n_{16}(ia_{16}+n_{16}) \end{bmatrix}$$

$$N_{21} = \begin{bmatrix} \frac{\kappa_2}{R^3}n_{21}^2(a_{21}-in_{21}) & \frac{\kappa_2}{R^3}n_{22}^2(a_{22}-in_{22}) & \frac{\kappa_2}{R^3}n_{23}^2(a_{23}-in_{23}) \\ \frac{\zeta_2}{R}(ia_{21}n_{21}+1) & \frac{\zeta_2}{R}(ia_{22}n_{22}+1) & \frac{\zeta_2}{R}(ia_{23}n_{23}+1) \\ -\frac{\kappa_2}{R^2}n_{21}(ia_{21}+n_{21}) & -\frac{\kappa_2}{R^2}n_{22}(ia_{22}+n_{22}) & -\frac{\kappa_2}{R^2}n_{23}(ia_{23}+n_{23}) \end{bmatrix}$$

$$N_{31} = \begin{bmatrix} \frac{\kappa_3}{R^3}n_{31}^2(a_{31}-in_{31}) & \frac{\kappa_3}{R^3}n_{32}^2(a_{32}-in_{32}) & \frac{\kappa_3}{R^3}n_{33}^2(a_{33}-in_{33}) \\ \frac{\zeta_3}{R}(ia_{31}n_{31}+1) & \frac{\zeta_3}{R}(ia_{32}n_{32}+1) & \frac{\zeta_3}{R}(ia_{33}n_{33}+1) \\ -\frac{\kappa_3}{R^2}n_{31}(ia_{31}+n_{31}) & -\frac{\kappa_3}{R^2}n_{32}(ia_{32}+n_{32}) & -\frac{\kappa_3}{R^2}n_{33}(ia_{33}+n_{33}) \end{bmatrix}$$

由上述可知  $N_{21} = N_{31}, t_{12} = t_{13}$  故将式(9)代入式(19)和式(20)化简为:

$$\begin{cases} M_{11} + M_{12}r_1^+ = M_{21}t_{12} \\ N_{11} + N_{12}r_1^+ = 2N_{21}t_{12} \end{cases} \quad (21)$$

由方程(21)可解得透射矩阵和反射矩阵:

$$\begin{cases} t_{12} = (M_{12}^{-1}M_{21} - 2N_{12}^{-1}N_{21})^{-1}(M_{12}^{-1}M_{11} - N_{12}^{-1}M_{11}) \\ r_1^+ = -(2M_{21}^{-1}M_{12} - N_{21}^{-1}N_{12})^{-1}(2M_{21}^{-1}M_{11} - N_{21}^{-1}N_{11}) \end{cases} \quad (22)$$

### 4 数值算例

如图 5 所示,给定矩形孔薄壁圆环的几何尺寸和物理参数,弹性模量  $E = 207\text{GPa}$ ,剪切模量  $G = 80\text{GPa}$ ,泊松比  $\nu = 0.3$ ,密度  $\rho = 7850\text{kg/m}^3$ ,半径  $R = 0.1\text{m}$ ,大截面宽度  $b_1 = 0.02\text{m}$ ,小截面宽度  $b_2 = 0.005\text{m}$ ,截面高度  $h = 0.002\text{m}$ .求解固有频率及分析模态形状.

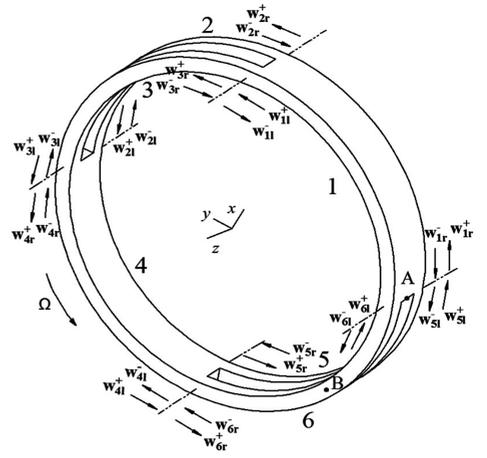


图 5 旋转矩形孔薄壁圆环波传播模型

Fig.5 Wave motion model of rotating thin ring with two rectangular holes

#### 4.1 两矩形孔薄壁圆环振动特征方程

根据相位封闭原理,若波在圆环中传播的相位变化为  $2\pi$  或者  $2\pi$  的整数倍时,系统将会发生共振.对于整个两矩形孔薄壁圆环,根据波在不等截面薄壁圆环中的传播特性,建立各单元波幅矢量关系式:

$$w_{1l}^- = r_1^+ w_{1l}^+ + t_{21} w_{2r}^- + t_{31} w_{3r}^-, w_{1l}^+ = T_1^+(\theta_1) w_{1r}^+ \quad (23a)$$

$$w_{1r}^+ = r_1^- w_{1r}^- + t_{51} w_{5l}^+ + t_{61} w_{6l}^+, w_{1r}^- = T_1^-(\theta_1) w_{1l}^- \quad (23b)$$

$$w_{2l}^- = r_2^+ w_{2l}^+ + t_{42} w_{4r}^-, w_{2l}^+ = T_2^+(\theta_2) w_{2r}^+ \quad (23c)$$

$$w_{2r}^+ = r_2^- w_{2r}^- + t_{12} w_{1l}^+, w_{2r}^- = T_2^-(\theta_2) w_{2l}^- \quad (23d)$$

$$w_{3l}^- = r_3^+ w_{3l}^+ + t_{43} w_{4r}^-, w_{3l}^+ = T_3^+(\theta_3) w_{3r}^+ \quad (23e)$$

$$w_{3r}^+ = r_3^- w_{3r}^- + t_{13} w_{1l}^+, w_{3r}^- = T_3^-(\theta_3) w_{3l}^- \quad (23f)$$

$$w_{4l}^- = r_4^+ w_{4l}^+ + t_{54} w_{5l}^- + t_{64} w_{6r}^-, w_{4l}^+ = T_4^+(\theta_4) w_{4r}^+ \quad (23g)$$



十分相近,误差值均不超过 1%.

### 4.3 旋转矩形孔薄壁圆环

转速为  $\Omega=500\text{rad/s}$  时,圆环各阶固有频率如表 2.旋转的矩形孔薄壁圆环在转速的影响下会出现两个相异的频率值,即频率分支.如图 7,随着转速的增加,正行波的固有频率逐渐增加,而负行波的固有频率逐渐减少.因此,正行波可以使旋转圆环刚度增加,而负行波对旋转圆环作用正好相反.

表 1 行波法与有限元分析法计算固有频率对比

Table 1 Comparison of natural frequency obtained by wave motion method and finite element analysis

Mode	Natural Frequency (HZ)		Relative Error (%)
	ANSYS	In this study	
1	125.8	125.6	0.16
2	355.9	356.3	0.11
3	669.5	674.5	0.75
4	1104.5	1107.6	0.28

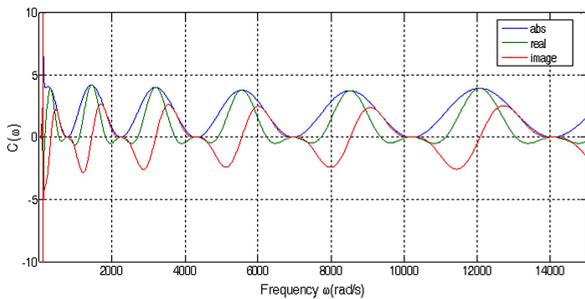


图 6 特征多项式幅值曲线

Fig.6 Magnitudes of the characteristic polynomial of the thin ring with rectangular holes

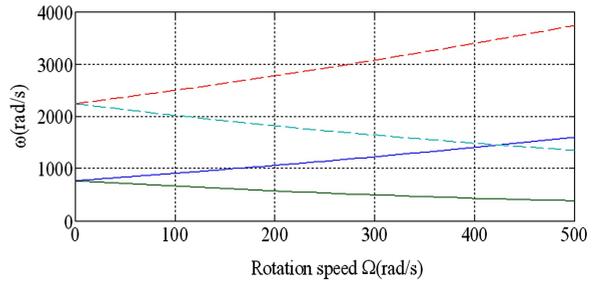
表 2 当  $\Omega=500\text{rad/s}$  时两矩形孔薄壁圆环的固有频率

Table 2 Natural frequency of thin ring with two rectangular holes when  $\Omega=500\text{rad/s}$

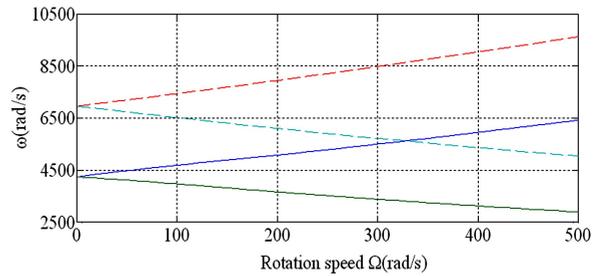
Natural Frequency (Hz)	1 <sup>st</sup> order	2 <sup>nd</sup> order	3 <sup>rd</sup> order	4 <sup>th</sup> order
Positive wave	254.6	595.1	1022.7	1533.0
Negative wave	60.3	214.7	459.8	801.7

### 4.4 模态形状

在矩形孔薄壁圆环中,结构振动模态是由不同谐波叠加而成,且不同谐波之间是互相独立的.随着波在系统中传播,复波数和虚波数对应的波逐渐衰减为零,只有实波数对应的波才能引起共振模态.所以当圆环发生共振时,至少有一个简谐波是符合相位封闭原理的.在求得系统的固有频率后代入式(3),可求得该频率下对应的实波数.将该实波



(a) 实线对应第一阶模态;虚线对应第二阶模态  
(a) First Mode (solid line) and Second Mode (dashed line)



(b) 实线对应第三阶模态;虚线对应第四阶模态  
(b) Third Mode (solid line) and Forth Mode (dashed line)

图 7 旋转矩形孔薄壁圆环各阶固有频率

Fig.7 Natural frequency for different orders of rotating thin ring with rectangular holes

数代入简谐波的传递关系式:

$$u(\theta, t) = \hat{u}e^{in\theta} \quad (26)$$

得固有频率对应的模态形状.将表 1 中求得的前四阶固有频率代入式(3),可得到对应的实数波数分别为 2,3,4,5.图 8 为转速  $\Omega=0\text{rad/s}$  时,行波法与有限元分析法所得模态形状对比.

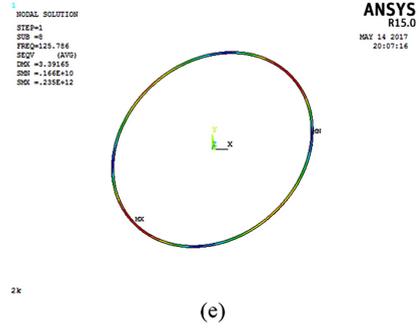
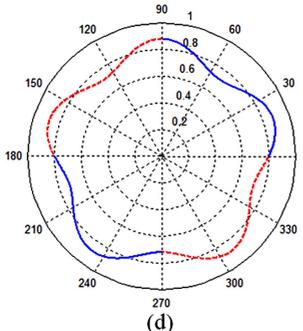
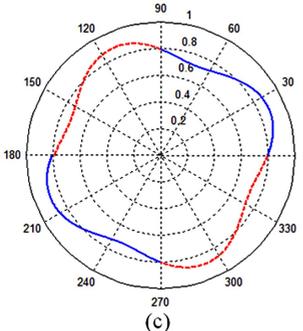
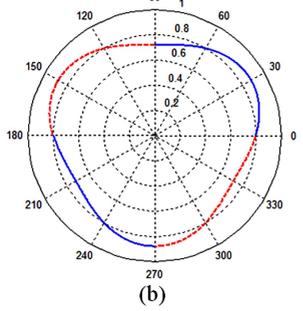
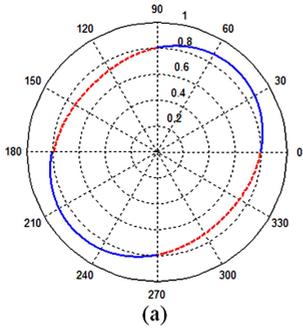
从模态形状可看出,行波法模态分析的结果与有限元模态分析和文献[10]的结果一致.但在有限元计算中,每一阶有两个频率接近的振动模态,它们对应于行波法得到的虚实模态形状.

## 5 结论

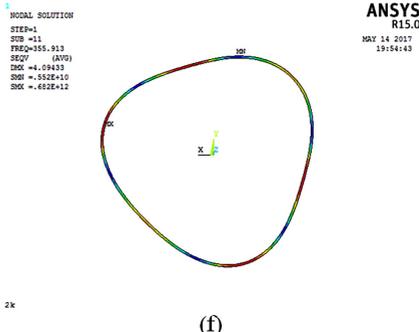
在行波法分析旋转矩形孔薄壁圆环的波传播特性中,将相位封闭原理与波在截面突变处的反射和透射矩阵和波传递矩阵结合,获得旋转矩形孔薄壁圆环的振动特征方程.通过求解频率特征方程得到圆环的固有频率.当矩形孔薄壁圆环为静止时,将行波法求得的前四阶固有频率与有限元法求解结果对比.结果表明,两种方法相对误差不超过 1%,证明行波法计算的可行性.在转速的影响下,圆环的固有频率会出现分支现象即出现正行波和负行波.随着转速的增加,正行波的固有频率逐渐增加,而负行波的固有频率则逐渐减少.

行波研究方法可以应用于旋转、厚壁、复杂环状模型如航天桁架结构,多孔实体保持架等的动力

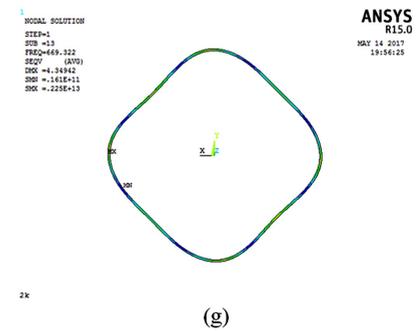
学计算.



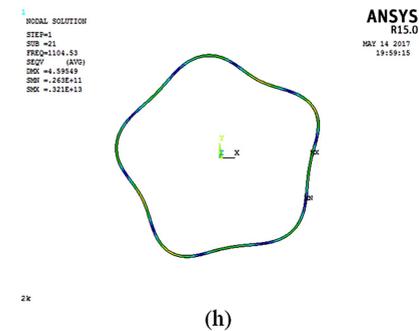
ANSYS  
R15.0  
MAY 14 2017  
20:07:16



ANSYS  
R15.0  
MAY 14 2017  
19:54:43



ANSYS  
R15.0  
MAY 14 2017  
19:56:25



ANSYS  
R15.0  
MAY 14 2017  
19:59:15

图8 转速  $\Omega=0\text{rad/s}$  时,行波法分析与有限元模态分析对比

(a~d)为基于行波法,1~4阶模态形状;(e~h)为基于有限元法,1~4阶模态形状

Fig.8 Comparison of Mode shapes between WPM and FEA when  $\Omega=0\text{rad/s}$

(a~d) the 1<sup>st</sup>~4<sup>th</sup> mode shapes with WPM; (e~h) the 1<sup>st</sup>~4<sup>th</sup> mode shapes with FEA

## 参 考 文 献

- 1 Kim W. Free non-linear vibration of a rotating thin ring with the in-plane and out-of-plane motions. *Journal of Sound and Vibration*, 2002, 258(1):167~178
- 2 Mead D J. Waves and modes in finite beams: application of the phase-closure principle. *Journal of Sound and Vibration*, 1994, 171(5):695~702
- 3 Huang D, Tang L. Free vibration analysis of planar rotating rings by wave propagation. *Journal of Sound and Vibration*, 2013, 332(20):4979~4997
- 4 Mei C. Free vibration analysis of classical single-story multi-bay planar frames. *Journal of Vibration and Control*, 2013, 19(13):2022~2035
- 5 Mei C. Wave analysis of in-plane vibrations of H- and T-shaped planar frame structure. *Journal of Vibration and Acoustics*, 2008, 130(6):061004~061014
- 6 黄修长,徐时吟,章振华等. 利用波动法研究曲梁结构中的波形转换和能量传递. *振动与冲击*, 2012, 31(8):38~46 (Haung X C, Xu S Y, Zhang Z H, et al. Application of wave approach in wave mode conversion and energy transmission of curved beams. *Journal of Vibration and Shock*, 2012, 31(8):38~46 (in Chinese))
- 7 焦映厚,侯守武,陈照波等. 采用波动法研究有限尺寸加肋L型板结构的振动特性. *振动工程学报*, 2013, 26(6):871~878 (Jiao Y, Hou S W, Chen Z B, et al. Research on Vibration properties of finite rib-stiffened L-shaped plate using wave method. *Journal of Vibration Engineering*, 2013, 26(6):871~878 (in Chinese))
- 8 Lee S K, Mace B R, Brennan M J. Wave propagation, reflection and transmission in curved beams. *Journal of Sound and Vibration*, 2007, 306(3):636~656
- 9 Graff K F. Wave motion in elastic solids. London: Oxford University Press, 1975:197~199
- 10 Eley R, Fox C H J, Mc William S. Coriolis coupling effects on the vibration of rotating rings. *Journal of Sound and Vibration*, 2000, 238(3):459~480

## WAVE MOTION CALCULATION ON MODE CHARACTERISTICS OF ROTATING THIN RING WITH RECTANGULAR HOLES<sup>\*</sup>

Huang Dishan<sup>†</sup> Lin Jie Zhang Yueyue He Hong

(School of Mechatronical Engineering and Automation, Shanghai 200072, China)

**Abstract** In this paper, the model of wave motion at the abruptly changed section of rotating thin ring with rectangular holes was built up, and wave transmission and reflection were analyzed. Combined with closure phase principle, the vibration characteristic equation was derived. Then, natural frequency, mode shape and bifurcation of frequency were given. Natural frequencies of static ring derived by wave propagation method are compared with the results of finite element analysis, which validates the wave propagation approach, and it provides a theoretical basis for dynamic calculation of bearing solid cage by wave propagation approach.

**Key words** wave motion, thin ring with rectangular holes, propagation matrix, reflected matrix, transmitted matrix