

基于双率采样的智能车辆弯道轨迹跟踪控制

孙娜[†]

(山西工商学院 计算机信息工程学院, 太原 030006)

摘要 本文研究在双率采样下智能车辆弯道轨迹跟踪问题.首先,针对车辆车道保持的转向控制,建立相对路面误差的侧向动力学模型.其次,假设系统状态变量被分为两个子向量并分别由两类传感器以不同的采样周期采样,针对这类双率采样系统,充分考虑这两类传感器的采样时刻特征,设计一类基于采样时刻的切换控制器.然后,利用输入时滞方法,将最终的闭环系统建模为带有两个模态的切换时滞系统,并以线性矩阵不等式(LMI)形式给出闭环系统指数稳定性条件和切换控制器的设计方法.最后,在 Matlab/Simulink 环境下对汽车模型的路径跟踪控制进行仿真,验证本文所提方法的有效性,并与单率采样方法进行比较,说明本文方法相比于单率采样方法的优势.

关键词 智能车辆控制, 轨迹跟踪, 双率采样, 切换控制, 线性矩阵不等式(LMI)

DOI: 10.6052/1672-6553-2019-031

引言

智能交通系统^[1-3](ITS)是指将先进的控制、计算机及通信技术应用于现有的公路交通系统中,来实现车辆与公路的自动化控制,进而解决当今和未来的交通问题,使公路系统实现智能化,提高公路系统的安全性和运行效率.自动化公路系统^[4](Automated Highway System,简称 AHS)是智能交通系统的一个重要研究分支,它能够显著地增加城市道路通行的通行能力,同时改善公路安全性,减少由于交通事故导致的经济损失,减少车辆对环境的负面影响,是具有科研挑战性和广阔应用前景的研究性课题.智能车辆的轨迹跟踪控制是自动化公路系统的一个重要研究方面,也是一个复杂的控制问题,对于智能车辆,最主要的是路径跟踪问题^[5,6].在直道上智能车辆可能遇到坑道,路面不平,风力等干扰,所以,研究智能车辆在直道克服随机干扰的轨迹跟踪^[7]是一个重要问题.而弯道上智能车辆的侧向路径跟踪控制^[8]是另一个主要研究内容.要保证车辆能够实现对弯道路径的稳定自动跟踪控制,需要首先根据车辆获取的信号计算出该时刻车辆对目标路径的横向位移偏差和方位偏差

角,并通过计算机根据所获得的两种偏差计算出转向轮的偏转角度和方向.当车辆在目标路径转弯行驶时,除了保证车辆进行稳定的跟踪自动控制外,还需要保持弯道的行驶,同时要判断弯道的行驶何时结束.本文设计的智能车辆控制方法是考虑智能车辆的物理信号传感器采样周期不同,选取状态补偿机制来实现大采样率下不可量测的状态估计,结合多率采样系统^[9,10]的建模,进而设计与采样时刻相关的切换控制器^[11,12].将切换控制方法应用到控制器的设计中,基于 LMI 得到较低保守性的条件,使得智能汽车在弯道上利用所设计的切换控制器,以很好的性能沿着目标路径行驶.

1 车辆侧向动力学模型

将以恒定速度行驶在半径较大的高速公路上的 4 轮车辆模型简化为 2 轮自行车模型(图 1).图中 XOY 为大地坐标系; $X_v CGY_v$ 为车体坐标系, CG 为车辆质心;虚线是道路中心线,其切线与 X 轴的夹角为 ψ_{des} ,称为道路横摆角;车辆纵轴方向与 X 轴的夹角为 ψ ,称为横摆角; F_{y_f} 和 F_{y_r} 分别是作用于前,后轮的侧向力; r 为横摆角速度.该模型在车辆正常行驶时已被证明是有效的^[13].该模型假设如

下:

- 1) 不考虑道路俯仰,侧倾因素;
- 2) 车辆和道路间的相对横摆角很小;
- 3) 前轮转向角很小.

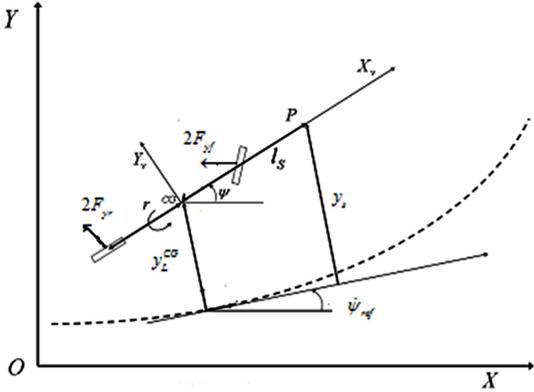


图1 车辆模型

Fig.1 Vehicle model

注1:针对作用于车辆上的轮胎侧向力 F_{yf} 和 F_{yr} 模型,轮胎的侧偏角定义为轮胎平面方向与轮胎速度矢量方向之间的角度.本文假设侧偏角较小,经实验结果表明当侧偏角较小时,轮胎的侧向力与“侧偏角”成正比.

前轮侧偏角定义为 $\alpha_f = \delta - \theta_{vf}$,其中 θ_{vf} 表示车辆速度矢量和车辆纵轴之间的夹角, δ 表示前轮转向角,后轮侧偏角近似表示为 $\alpha_r = -\theta_{vr}$.相应地,车辆的前轮侧向力可表示为 $F_{yf} = 2C_{\alpha f}(\delta - \theta_{vf})$,其中, $C_{\alpha f}$ 为前轮侧偏刚度, θ_{vf} 为前轮速度角.后轮侧向力可表示为 $F_{yr} = 2C_{\alpha r}(-\theta_{vr})$,其中 $C_{\alpha r}$ 为后轮侧偏刚度, θ_{vr} 为后轮速度角.

对于 θ_{vf} 与 θ_{vr} 的计算可用如下关系式:

$$\tan(\theta_{vf}) = \frac{v_y + l_f \dot{\psi}}{v_x}$$

$$\tan(\theta_{vr}) = \frac{v_y - l_r \dot{\psi}}{v_x} \quad (1)$$

采用小角度近似法及缩写 $v_y = \dot{y}$, (1) 式化为:

$$\theta_{vf} = \frac{\dot{y} + l_f \dot{\psi}}{v_x}$$

$$\theta_{vr} = \frac{\dot{y} - l_r \dot{\psi}}{v_x} \quad (2)$$

注2:假设车辆在半径为常数 R 的车道上,以恒定纵向速度 v_x 行驶.此文假设弯道的半径 R 很大,目的是使车辆的侧偏角较小,进而保证轮胎的

侧向力与“侧偏角”成正比.定义车辆理论的方向变化率为:

$$\dot{\psi}_{des} = \frac{v_x}{R} \quad (3)$$

在半径为 R 的弯道处,将车辆在弯道处所受的向心力等效为侧向恒值干扰,本文研究的目的是使智能车辆能够克服该恒值干扰,沿着实际路径轨迹行驶,防止车辆产生过大偏移逸出轨道.由此,使用相对路面的位置及方向误差,建立车辆的路面误差动力学模型是十分有效的.

定义误差变量:

e_1 为质心的侧向位置误差;

e_2 为车辆和路面之间方向角之差.

根据车辆在弯道处的轨迹跟踪情况,分析误差动力学模型如下:

$$\ddot{e}_1 = (\dot{y} + v_x \dot{\psi}) - \frac{v_x^2}{R} = \dot{y} + v_x (\dot{\psi} - \dot{\psi}_{des}) \quad (4)$$

$$e_2 = \psi - \psi_{des} \quad (5)$$

$$\dot{e}_1 = \dot{y} + v_x (\psi - \psi_{des}) \quad (6)$$

车辆侧向平移运动方程和横摆动力学方程为:

$$\begin{cases} m(\dot{y} + \dot{\psi}v_x) = F_{yf} + F_{yr} \\ I_z \ddot{\psi} = l_f F_{yf} - l_r F_{yr} \end{cases} \quad (7)$$

(7) 式中 I_z 为车辆横摆转动惯量, l_f 和 l_r 分别为车辆质心到前轴和后轴的距离.

将(7)式转化为误差的动力学模型可得:

$$m\ddot{e}_1 = e_1 \left[-\frac{2}{v_x} C_{\alpha f} - \frac{2}{v_x} C_{\alpha r} \right] +$$

$$e_2 [2C_{\alpha f} + 2C_{\alpha r}] +$$

$$\dot{\psi}_{des} \left[-\frac{2C_{\alpha f} l_f}{v_x} + \frac{2C_{\alpha r} l_r}{v_x} \right] + 2C_{\alpha f} \delta \quad (8)$$

$$I_z \ddot{e}_2 = 2C_{\alpha f} l_f \delta + e_1 \left[-\frac{2C_{\alpha f} l_f}{v_x} + \frac{2C_{\alpha r} l_r}{v_x} \right] +$$

$$e_2 [2C_{\alpha f} l_f - 2C_{\alpha r} l_r] +$$

$$\dot{e}_2 \left[-\frac{2C_{\alpha f} l_f^2}{v_x} - \frac{2C_{\alpha r} l_r^2}{v_x} \right] -$$

$$I_z \ddot{\psi}_{des} + \dot{\psi}_{des} \left[-\frac{2C_{\alpha f} l_f^2}{v_x} - \frac{2C_{\alpha r} l_r^2}{v_x} \right] \quad (9)$$

由此可得跟踪误差系统的状态空间模型:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} e_1 \\ \dot{e}_1 \\ e_2 \\ \dot{e}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2C_{\alpha f}+2C_{\alpha r}}{mv_x} & \frac{2C_{\alpha f}+2C_{\alpha r}}{m} & \frac{-2C_{\alpha f}l_f+2C_{\alpha r}l_r}{mv_x} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{2C_{\alpha f}l_f-2C_{\alpha r}l_r}{I_z v_x} & \frac{2C_{\alpha f}l_f-2C_{\alpha r}l_r}{I_z} & \frac{-2C_{\alpha f}l_f^2+2C_{\alpha r}l_r^2}{I_z v_x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ \dot{e}_1 \\ e_2 \\ \dot{e}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{2C_{\alpha f}}{m} \\ 0 \\ \frac{2C_{\alpha f}l_f}{I_z} \end{bmatrix} \delta + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{2C_{\alpha f}l_f-2C_{\alpha r}l_r}{mv_x} - v_x \\ 0 \\ \frac{2C_{\alpha f}l_f^2+2C_{\alpha r}l_r^2}{I_z v_x} \end{bmatrix} \dot{\psi}_{des} \quad (10)$$

综上所述,在小的侧偏角和两轮车辆模型的假设条件下,跟踪误差系统(10)可简写为:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\delta + \mathbf{B}_1\dot{\psi}_{des} \quad (11)$$

式中, e_1 为质心的侧向位置误差; e_2 为车辆和路面之间方向角之差; δ 为前轮转向角输入; $\dot{\psi}_{des}$ 为由道路曲率和车速决定的理论横摆角速度。

注3:由于 $B_2\dot{\psi}_{des} \neq 0$ 的存在,当车辆在弯道行驶时,跟踪误差将不完全收敛于0.但由于 $B_2\dot{\psi}_{des}$ 为常矩阵,为了分析方便,作如下坐标变换:

$$\begin{aligned} & \frac{2C_{\alpha f}+2C_{\alpha r}}{mv_x}\dot{e}_{10} + \frac{-2C_{\alpha f}l_f+2C_{\alpha r}l_r}{mv_x}\dot{e}_{20} - \\ & \left(\frac{2C_{\alpha f}l_f-2C_{\alpha r}l_r}{mv_x} + v_x \right) \dot{\psi}_{des} = 0 \\ & \frac{2C_{\alpha f}l_f-2C_{\alpha r}l_r}{I_z v_x}\dot{e}_{10} + \frac{-2C_{\alpha f}l_f^2+2C_{\alpha r}l_r^2}{I_z v_x}\dot{e}_{20} - \\ & \frac{2C_{\alpha f}l_f^2+2C_{\alpha r}l_r^2}{I_z v_x}\dot{\psi}_{des} = 0 \end{aligned} \quad (12)$$

通过(12)式可解得 $\dot{e}_{10}, \dot{e}_{20}$.

设 $\dot{e}_1 = \dot{e}_1 - \dot{e}_{10}, \dot{e}_2 = \dot{e}_2 - \dot{e}_{20}$,则有

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad (13)$$

其中, $\mathbf{x} = [e_1 \quad \dot{e}_1 \quad e_2 \quad \dot{e}_2]^T$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2C_{\alpha f}+2C_{\alpha r}}{mv_x} & \frac{2C_{\alpha f}+2C_{\alpha r}}{m} & \frac{-2C_{\alpha f}l_f+2C_{\alpha r}l_r}{mv_x} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{2C_{\alpha f}l_f-2C_{\alpha r}l_r}{I_z v_x} & \frac{2C_{\alpha f}l_f-2C_{\alpha r}l_r}{I_z} & \frac{-2C_{\alpha f}l_f^2+2C_{\alpha r}l_r^2}{I_z v_x} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{2C_{\alpha f}}{m} \\ 0 \\ \frac{2C_{\alpha f}l_f}{I_z} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u} = \delta$$

(13)式即为车辆在弯道处的状态空间方程。

2 问题描述

在智能车辆传感器的应用中,传感器对于不同状态变量的采样率一般是不相同的.对(13)式,状态变量有4个,不失一般性,本文假设 e_1 和 \dot{e}_1 由一种类型的传感器采样, e_2 和 \dot{e}_2 由另一种类型的传感器采样,因此系统状态变量可以分为两类:

$$\mathbf{x}_1(t) = [e_1 \quad \dot{e}_1]^T \quad \mathbf{x}_2(t) = [e_2 \quad \dot{e}_2]^T$$

$$\text{即 } \mathbf{x}(t) = [\mathbf{x}_1^T(t) \quad \mathbf{x}_2^T(t)]^T$$

假设 $\mathbf{x}_1(t)$ 的采样周期为 $T_1, \mathbf{x}_2(t)$ 的采样周期为 T_2 ,且 $T_2 = 2T_1$.相应地, $\mathbf{x}_1(t)$ 的采样序列为 $\{\mathbf{x}_1(t_1, k) : t_1 k = kT_1, k = 0, 1, 2, \dots\}$, $\mathbf{x}_2(t)$ 的采样序列为 $\{\mathbf{x}_2(t_2, k) : t_2 k = kT_2, k = 0, 1, 2, \dots\}$,基于以上的状态双率问题设计一个与采样时刻相关的状态反馈切换控制器如下:

$$\mathbf{u}(t) = \begin{cases} K_{11}\mathbf{x}_1(2kT_1) + K_{12}\mathbf{x}_2(2kT_1), & t \in [2kT_1, (2k+1)T_1], k = 0, 1, 2, \dots \\ K_{21}\mathbf{x}_1((2k+1)T_1) + K_{22}\mathbf{x}_2(2kT_1), & t \in [(2k+1)T_1, 2(k+1)T_1], k = 0, 1, 2, \dots \end{cases} \quad (14)$$

其中, $K_{11}, K_{12}, K_{21}, K_{22}$ 为待设计的控制增益.

将(14)式代入(13)式中,得到带有两个子系统的闭环系统:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{cases} \mathbf{A} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1(t) \\ \mathbf{x}_2(t) \end{bmatrix} + \mathbf{B} [K_{11} \quad K_{12}] \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1(2kT_1) \\ \mathbf{x}_2(2kT_1) \end{bmatrix}, & 2kT_1 \leq t \leq (2k+1)T_1 \end{cases} \quad (15a)$$

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{cases} \mathbf{A} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1(t) \\ \mathbf{x}_2(t) \end{bmatrix} + \mathbf{B} [K_{21} \quad K_{22}] \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1((2k+1)T_1) \\ \mathbf{x}_2(2kT_1) \end{bmatrix}, & (2k+1)T_1 \leq t \leq 2(k+1)T_1 \end{cases} \quad (15b)$$

定义如下的切换规则:当 $t \in [2kT_1, (2k+1)T_1)$

时,子系统(15a)运行,此时 $\sigma(t) = 1$;当 $t \in [(2k+1)T_1, 2(k+1)T_1)$ 时,子系统(15b)运行,此时 $\sigma(t) = 2$.即 $\sigma(t) \in \{1, 2\}$ 代表切换信号.利用输入时滞方法,引入下面的符号说明:

当 $t \in [2kT_1, (2k+1)T_1)$ 时,

$$2kT_1 = t - (t - 2kT_1) = t - d_1(t), d_1(t) \in [0, T_1).$$

当 $t \in [(2k+1)T_1, 2(k+1)T_1)$,

$$2kT_1 = t - (t - 2kT_1) = t - d_2(t), d_2(t) \in [T_1, T_2),$$

且有 $(2k+1)T_1 = t - (d_2(t) - T_1), d_2(t) - T_1 \in [0, T_1)$.因此,带有双率采样的系统(15)可以改写为如下带有两个子系统的切换时滞系统:

$$\Sigma_1: \dot{x}(t) = Ax(t) + BK_1x(t - d_1(t)), \sigma(t) = 1 \quad (16a)$$

$$\Sigma_2: \dot{x}(t) = Ax(t) + BK_2I_1x(t - d_2(t) + T_1) + BK_2I_2x(t - d_2(t)), \sigma(t) = 2 \quad (16b)$$

其中,

$$K_1 = [K_{11} \quad K_{12}], K_2 = [K_{21} \quad K_{22}],$$

$$I_1 = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{4 \times 4}, I_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}_{4 \times 4}.$$

问题描述:本节研究目的是针对智能车辆多个状态,采样周期不同的连续时滞系统,提出一个充分条件,来保证系统(16)指数稳定,并给出控制器设计的方法.

3 稳定性分析

在这一部分,对于闭环控制系统(16)的指数稳定性条件,以线性矩阵不等式形式给出.

定理 1:对于给定 $T_1, T_2, a_2 \geq a_1 > \frac{a_2}{2}, \mu > 1$ 满足

$\ln(\mu) < (2a_1 - a_2)T_1$, 如果存在矩阵 $P_1 > 0, P_2 > 0, Q_1 > 0, Q_2 > 0, R_1 > 0, R_2 > 0$, 控制器增益 K_1, K_2 , 使得: $\Pi_i < 0, P_1 < \mu P_2, P_2 < \mu P_1, Q_1 < \mu Q_2, Q_2 < \mu Q_1, R_1 < \mu R_2$ 和 $R_2 < \mu R_1$, 其中,

$$\Pi_1 = \begin{bmatrix} \Lambda_1 & P_1BK_1 + \sigma_1Q_1 & 0 & 0 \\ * & -2\sigma_1Q_1 & \sigma_1Q_1 & 0 \\ * & * & -\sigma_1(Q_1 + R_1) & \sigma_1R_1 \\ * & * & * & -\sigma_1R_1 \end{bmatrix} + \psi_1^T T_1 Q_1 \psi_1 + \psi_1^T T_1 R_1 \psi_1 < 0 \quad (17)$$

$$\Lambda_1 = a_1 P_1 + P_1 A + A^T P_1 - T_1^{-1} e^{-a_1 T_1} Q_1,$$

$$\psi_1 = [A \quad BK_1 \quad 0 \quad 0], \sigma_1 = T_1^{-1} e^{-a_1 T_1}$$

$$\Pi_2 = \begin{bmatrix} \Lambda_2 & P_2BK_2I_1 + \sigma_2Q_2 & 0 & P_2BK_2I_2 & 0 \\ * & -2\sigma_2Q_2 & \sigma_2Q_2 & 0 & 0 \\ * & * & -\sigma_2(Q_2 + R_2) & \sigma_2R_2 & 0 \\ * & * & * & -2\sigma_2R_2 & \sigma_2R_2 \\ * & * & * & * & -\sigma_2R_2 \end{bmatrix} + \psi_2^T T_1 Q_2 \psi_2 + \psi_2^T T_1 R_2 \psi_2 < 0 \quad (18)$$

$$\Lambda_2 = a_2 P_2 + P_2 A + A^T P_2 - T_1^{-1} e^{-a_2 T_1} Q_2,$$

$\psi_2 = [A \quad BK_2I_1 \quad 0 \quad BK_2I_2 \quad 0], \sigma_2 = T_1^{-1} e^{-a_2 T_1}$, 则切换系统(16)是指数稳定的,且指数衰减率为

$$\lambda = \frac{-\ln(\mu)}{(2T_1)} + a_1 - \frac{a_2}{2}.$$

证明:若系统(16)的模态 i 被激活,构造第 i 个模态 Lyapunov-Krasvoskii 泛函如下:

$$V_i(t) = x^T(t) P_i x(t) +$$

$$\int_{-T_1}^0 \int_{t+\theta}^t \dot{x}^T(s) e^{a_i(s-t)} Q_i \dot{x}(s) ds d\theta +$$

$$\int_{-T_2}^{-T_1} \int_{t+\theta}^t \dot{x}^T(s) e^{a_i(s-t)} R_i \dot{x}(s) ds d\theta.$$

其中, $P_i > 0, Q_i > 0$ 和 $R_i > 0 (i = 1, 2)$.由 $P_1 < \mu P_2, P_2 < \mu P_1, Q_1 < \mu Q_2, Q_2 < \mu Q_1, R_1 < \mu R_2, R_2 < \mu R_1$, 我们有: $V_1(t) < \mu e^{(a_2 - a_1)T_1} V_2(t), V_2(t) < \mu V_1(t) \leq \mu e^{(a_2 - a_1)T_1} V_1(t)$.令 $v = \mu e^{(a_2 - a_1)T_1}$, 即有 $V_1(t) < v V_2(t), V_2(t) < \mu V_1(t) \leq v V_1(t)$.由(16)式,时间序列 $\{T_1, 2T_1, \dots, 2(k-1)T_1, (2k-1)T_1, 2kT_1, \dots\}$ 是切换时刻,即有

$$\cup_{k=0}^{\infty} [2kT_1, 2(k+1)T_1) \subset [0, \infty), k = 0, 1, \dots$$

情况 1:当 $2kT_1 \leq t < (2k+1)T_1, k = 0, 1, 2, \dots$, 有

$$V_{\sigma(t)=1}(t) < V_{\sigma(t)=1}(2kT_1) e^{-a_1(t-2kT_1)} < v e^{-a_1(t-2kT_1)} V_{\sigma(t)=2}(2kT_1 - 0) \quad (19)$$

情况 2:当 $(2k+1)T_1 \leq t < 2(k+1)T_1, k = 0, 1, 2, \dots$,

有

$$V_{\sigma(t)=2}(t) < V_{\sigma(t)=2}((2k+1)T_1) e^{-a_2(t-(2k+1)T_1)} < v e^{-a_1(t-(2k+1)T_1)} V_{\sigma(t)=1}((2k+1)T_1 - 0) \quad (20)$$

由式(19)和(20),当 $2kT_1 \leq t < (2k+1)T_1$ 时,

有

$$V_{\sigma(t)=1}(t) < v e^{-a_1(t-2kT_1)} V_{\sigma(t)=2}(2kT_1 - 0) < v^2 e^{-a_1(t-2kT_1)} e^{-a_1 T_1} V_{\sigma(t)=1}((2k-1)T_1 - 0) \dots < v^{2k} e^{-a_1 t} V_{\sigma(t)=1}(0).$$

当 $2k \leq \frac{t}{T_1}$ 时,有 $V_{\sigma(t)=1}(t) < (v^{\frac{1}{T_1}} e^{-a_1})^t V_{\sigma(t)=1}(0) <$

$$(\mu^{\frac{1}{T_1}} e^{(a_2-a_1)t})^t V_{\sigma(t)=1}(0).$$

当 $(2k+1)T_1 \leq t < 2(k+1)T_1$, 有

$$V_{\sigma(t)=1}(t) < v^{(2k+1)} e^{-a_1 t} V_{\sigma(t)=1}(0).$$

当 $2k+1 \leq \frac{t}{T_1}$ 时, 有

$$V_{\sigma(t)=2}(t) < [\mu^{\frac{1}{T_1}} e^{(a_2-2a_1)t}]^t V_{\sigma(t)=1}(0).$$

设 $\varepsilon = \mu^{\frac{1}{T_1}} e^{(a_2-2a_1)t}$, 如果满足 $0 < \varepsilon < 1$, 则

$\lambda = -\ln(\varepsilon) > 0$. 整合以上两种情况, 有: $V_{\sigma(t)} < e^{-\lambda t} V_1(0)$.

定义 $a = \min\{\lambda_{\min}(P_1), \lambda_{\min}(P_2)\}$, $b_p = \lambda_{\min}(P_1)$,

$$b_q = \max\{\lambda_{\max}(Q_1), \lambda_{\max}(R_1)\}, c = \frac{T_2}{a_1} - \frac{(1-e^{-a_1 T_2})}{a_1^2},$$

$\|\varphi(t)\|_m = \max_{t \in [-T_2, 0]} \{\|x(t)\|, \|\dot{x}(t)\|\}$. 更进一步, 我

们有 $\|x(t)\| < \sqrt{\frac{(b_p + cb_q)}{a}} e^{-0.5\lambda t} \|\varphi(t)\|_m, t \in [0, \infty)$,

$$\bar{\Pi}_1 = \begin{bmatrix} \bar{\Lambda}_{11} & B \bar{K}_1 + \sigma_1 \bar{Q}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \bar{P}_1 A^T & \bar{P}_1 A^T \\ * & -2\sigma_1 \bar{Q}_1 & \sigma_1 \bar{Q}_1 & \mathbf{0} & \bar{K}_1^T B^T & \bar{K}_1^T B^T \\ * & * & -\sigma_1(\bar{Q}_1 + \bar{R}_1) & \sigma_1 \bar{R}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ * & * & * & -\sigma_1 \bar{R}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ * & * & * & * & -T_1^{-1}(v^2 \bar{Q}_1 - 2v \bar{P}_1) & \mathbf{0} \\ * & * & * & * & * & -T_1^{-1}(v^2 \bar{R}_1 - 2v \bar{P}_1) \end{bmatrix} < 0 \quad (21)$$

$$\begin{bmatrix} -\mu \bar{P}_2 & \bar{P}_2 \\ * & -\bar{P}_1 \end{bmatrix} \leq 0 \quad (22) \quad \begin{bmatrix} -\mu \bar{Q}_1 & \bar{Q}_1 \\ * & -\bar{Q}_2 \end{bmatrix} \leq 0 \quad (25)$$

$$\begin{bmatrix} -\mu \bar{P}_1 & \bar{P}_1 \\ * & -\bar{P}_2 \end{bmatrix} \leq 0 \quad (23) \quad \begin{bmatrix} -\mu \bar{R}_2 & \bar{R}_2 \\ * & -\bar{R}_1 \end{bmatrix} \leq 0 \quad (26)$$

$$\begin{bmatrix} -\mu \bar{Q}_2 & \bar{Q}_2 \\ * & -\bar{Q}_1 \end{bmatrix} \leq 0 \quad (24) \quad \begin{bmatrix} -\mu \bar{R}_1 & \bar{R}_1 \\ * & -\bar{R}_2 \end{bmatrix} \leq 0 \quad (27)$$

$$\bar{\Pi}_2 = \begin{bmatrix} \bar{Y}_{11} & B \bar{K}_{p1} I_1 + \sigma_2 \bar{Q}_2 & \mathbf{0} & B \bar{K}_{p2} & \mathbf{0} & \bar{P}_2 A^T & \bar{P}_2 A^T \\ * & -2\sigma_2 \bar{Q}_2 & \sigma_2 \bar{Q}_2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \bar{K}_{p1}^T B^T & \bar{K}_{p1}^T B^T \\ * & * & -\sigma_2(\bar{Q}_2 + \bar{R}_2) & \sigma_2 \bar{R}_2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ * & * & * & -2\sigma_2 \bar{R}_2 & \sigma_2 \bar{R}_2 & \bar{K}_{p2}^T B^T & \bar{K}_{p2}^T B^T \\ * & * & * & * & -\sigma_2 \bar{R}_2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ * & * & * & * & * & -T_1^{-1}(v^2 \bar{Q}_2 - 2v \bar{P}_2) & \mathbf{0} \\ * & * & * & * & * & * & -T_1^{-1}(v^2 \bar{R}_2 - 2v \bar{P}_2) \end{bmatrix} < 0 \quad (28)$$

其中, $\bar{\Lambda}_{11} = a_1 \bar{P}_1 + A_p \bar{P}_1 + \bar{P}_1 A_p^T - T_1^{-1} e^{-a_1 T_1} \bar{Q}_1$, $\bar{Y}_{11} = a_2$

衰减率为 $\bar{\lambda} = \frac{-\ln(\mu)}{(2T_1)} + a_1 - \frac{a_2}{2}$.

证毕.

4 基于采样的切换控制器设计

基于 LMI 的方法, 对于带有双率采样的系统 (16), 在这一部分提供了切换控制器增益的求解方法.

定理 2: 对于给定 $T_1, T_2, a_2 \geq a_1 > \frac{a_2}{2}, \mu > 1$ 满足

$\ln(\mu) < (2a_1 - a_2)T_1, v > 0$. 如果存在矩阵 $\bar{P}_1 > 0, \bar{P}_2 > 0, \bar{Q}_1 > 0, \bar{Q}_2 > 0, \bar{R}_1 > 0, \bar{R}_2 > 0$, 控制器增益 \bar{K}_1, \bar{K}_2 , 使得:

$\bar{P}_2 + A_p \bar{P}_2 + \bar{P}_2 A_p^T - T_1^{-1} e^{-a_2 T_2} \bar{Q}_2$, $\sigma_1 = T_1^{-1} e^{-a_1 T_1}$ 和

$\sigma_2 = T_1^{-1} e^{-a_2 T_1}$, 则切换系统(16)是指数稳定的, 且切换控制器(14)的增益矩阵 $K_1 = [K_{11} K_{12}] = \bar{K}_1 \bar{P}_1^{-1}$, $K_p = [K_{21} K_{22}] = \bar{K}_p \bar{P}_2^{-1}$, 其中 $\bar{K}_p = \bar{K}_{p1} + \bar{K}_{p2}$.

$$\Pi_1 = \begin{bmatrix} \Lambda_{11} & P_1 B_p K_1 + \sigma_1 Q_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & A_p^T & A_p^T \\ * & -2\sigma_1 Q_1 & \sigma_1 Q_1 & \mathbf{0} & K_1^T B_p^T & K_1^T B_p^T \\ * & * & -\sigma_1(Q_1 + R_1) & \sigma_1 R_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ * & * & * & -\sigma_1 R_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ * & * & * & * & -T_1^{-1} Q_1^{-1} & \mathbf{0} \\ * & * & * & * & * & -T_1^{-1} R_1^{-1} \end{bmatrix} < 0 \quad (29)$$

用 $\Delta_1 = \text{diag}\{P_1^{-1}, P_1^{-1}, P_1^{-1}, P_1^{-1}, I, I\}$ 对(29)式进行合同变换, 记: $\bar{P}_1 = P_1^{-1}$, $\bar{K}_1 = K_1 \bar{P}_1$, $\bar{Q}_1 = \bar{P}_1 Q_1 \bar{P}_1$, $\bar{R}_1 = \bar{P}_1 R_1 \bar{P}_1$, 且利用不等式 $-\bar{P}_1 \bar{Q}_1^{-1} \bar{P}_1 \leq v^2 \bar{Q}_1 - 2v \bar{P}_1$,

$$\Delta_1 \Pi_1 \Delta_1 = \begin{bmatrix} Y_{11} & P_2 B_p K_p I_{p1} + \sigma_2 Q_2 & \mathbf{0} & P_2 B_p K_p I_{p2} & \mathbf{0} & A_p^T & A_p^T \\ * & -2\sigma_2 Q_2 & \sigma_2 Q_2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & I_{p1} K_p^T B_p^T & I_{p1} K_p^T B_p^T \\ * & * & -\sigma_2(Q_2 + R_2) & \sigma_2 R_2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ * & * & * & -2\sigma_2 R_2 & \sigma_2 R_2 & I_{p2} K_p^T B_p^T & I_{p2} K_p^T B_p^T \\ * & * & * & * & -\sigma_2 R_2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ * & * & * & * & * & -T_1^{-1} Q_2^{-1} & \mathbf{0} \\ * & * & * & * & * & * & -T_1^{-1} R_2^{-1} \end{bmatrix} < 0 \quad (30)$$

用 $\Delta_2 = \text{diag}\{P_2^{-1}, P_2^{-1}, P_2^{-1}, P_2^{-1}, P_2^{-1}, I, I\}$ 对(30)式进行合同变换, 记: $\bar{P}_2 = P_2^{-1}$, $\bar{K}_{p1} = K_p I_{p1} \bar{P}_2$, $\bar{K}_{p2} = K_p I_{p2} \bar{P}_2$, $\bar{Q}_2 = \bar{P}_2 Q_2 \bar{P}_2$, $\bar{R}_2 = \bar{P}_2 R_2 \bar{P}_2$, 且利用不等式 $-\bar{P}_2 \bar{Q}_2^{-1} \bar{P}_2 \leq v^2 \bar{Q}_2 - 2v \bar{P}_2$, $-\bar{P}_2 \bar{R}_2^{-1} \bar{P}_2 \leq v^2 \bar{R}_2 - 2v \bar{P}_2$, 则可得(28)式成立. 另外, 用 P_2^{-1} 分别左乘和右乘 $P_1 < \mu P_2$, 可得 $P_2^{-1} P_1 P_2^{-1} - \mu P_2^{-1} \leq 0$, 利用 Schur 补引理可得(22)式, 同理用 P_1^{-1} , Q_2^{-1} , Q_1^{-1} , R_2^{-1} 和 R_1^{-1} 分别左乘和右乘 $P_2 < \mu P_1$, $Q_1 < \mu Q_2$, $Q_2 < \mu Q_1$, $R_1 < \mu R_2$ 和 $R_2 < \mu R_1$ 则可得(23)、(24)、(25)、(26)、(27)式成立. 由定理1可知定理2成立.

证毕.

为了和单率采样方法进行比较, 下面的推论给出在单率采样下系统(13)的控制器设计方法.

推论2: 对给定的 $T > 0$, $a > 0$ 和 $v > 0$, 如果存在矩阵 $\bar{P} > 0$ 和 $\bar{Q} > 0$, 使得下面的 LMIs 成立:

$$\bar{\Pi} = \begin{bmatrix} \bar{\Lambda} & B \bar{K} + T^{-1} e^{-aT} \bar{Q} & \bar{P} A^T \\ * & -T^{-1} e^{-aT} \bar{Q} & \bar{K}^T B^T \\ * & * & T^{-1}(v^2 \bar{Q} - 2v \bar{P}) \end{bmatrix} < 0 \quad (31)$$

证明: 利用 Schur 补引理, $\Pi_1 < 0$ 等价于下面的矩阵不等式:

$-\bar{P}_1 \bar{R}_1^{-1} \bar{P}_1 \leq v^2 \bar{R}_1 - 2v \bar{P}_1$, 则可得(21)式成立. 同理 $\Pi_2 < 0$ 等价于下面的矩阵不等式:

其中, $\bar{\Lambda} = a \bar{P} + A \bar{P} + \bar{P} A^T - T^{-1} e^{aT} \bar{Q}$, 则具有定常采样周期 T 的采样控制系统(13)是指数稳定的, 控制器增益 $K = \bar{K} \bar{P}^{-1}$.

5 仿真实验

考虑一个智能车辆在弯道的侧向误差动力学模型^[14]:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (32)$$

$$\text{其中, } A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 22.3 \\ 0 & -4.2796 & -19.4355 & 0 \\ 0 & 1.4391 & -4.2743 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 25.0655 \\ 17.7548 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

仿真实验中, $x(t) = [e_1 \quad \dot{e}_1 \quad e_2 \quad \dot{e}_2]^T$, e_1 是车辆质心的侧向位置误差, \dot{e}_1 是车辆车身轴系统的侧向速度误差, e_2 是相对车道的车辆方向角误

差, \dot{e}_2 是误差横摆角速度。 $\mathbf{u}(t)$ 是前轮转向角。将状态 $\mathbf{x}(t) = [e_1 \ \dot{e}_1 \ e_2 \ \dot{e}_2]^T$ 根据传感器的不同分为两类, 前两个状态分量利用超声波传感器测量, 后两个状态分量利用陀螺仪传感器测量。令 $a = a_1 = 0.75, a_2 = 0.85, \nu = 0.25$ 和 $\mu = 1.02$, 对于前两个状态变量, 选择 $T_2 = 0.1\text{s}$, 对于后两个状态变量, 选择 $T_1 = 0.05\text{s}$ 。利用定理 2 可以获得以下的控制器增益矩阵:

$$\mathbf{K}_1 = [-0.2724 \quad -0.1936 \quad -0.7700 \quad -3.2360],$$

$$\mathbf{K}_p = [-0.2802 \quad -0.1934 \quad -0.7665 \quad -3.2608].$$

在仿真实验中, 初始状态信息为 $\mathbf{x}_0 = [-5 \ 0 \ 5 \ 0]^T$ 。带有双率采样的系统(32)的状态响应可参见图 2。从图 2 中我们可以观察到系统的状态在 $t = 4\text{s}$ 时收敛于零。即所设计的基于双率采样的切换控制器能够保证系统(32)稳定, 即能保证智能车辆克服向心力干扰, 沿着车道中心线行驶。表 1 给出了定理 2(双率采样方案)与推论 2(单率采样方案)的可解性比较, 可以看出所提的双率采样方案比在单率定常采样方案下给出更低的保守性的结果。

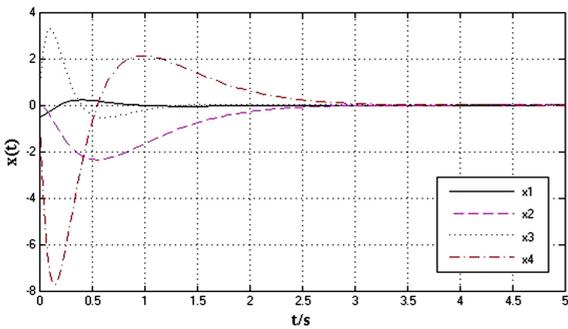


图 2 闭环系统(32)状态响应

Fig.2 State response of the closed loop systems(32)

表 1 定理 2 和推论 2 的可解性比较

Table 1 Comparison of the solvability between Theorem2 and Corollary2

| T | Corollar2 | (T_1, T_2) | Theorem2 |
|--------|------------|------------------|------------|
| 0.08 | feasible | (0.04, 0.08) | feasible |
| 0.1 | feasible | (0.05, 0.1) | feasible |
| 0.114 | feasible | (0.057, 0.114) | feasible |
| 0.12 | infeasible | (0.06, 0.12) | feasible |
| 0.138 | infeasible | (0.069, 0.138) | feasible |
| 0.1382 | infeasible | (0.0691, 0.1382) | infeasible |

通过以上仿真实验, 根据仿真结果图 2, 可以看出所设计的切换控制器可以镇定带有双率采样

的线性系统(32)。与单率采样方案相比, 通过表 1, 可以看出双率采样方案可以降低控制器设计的保守性, 因为双率采样方案使得系统状态更多的实时采样信息被利用。

6 小结

本文考虑智能车辆在弯道上行驶遇到的向心力恒值干扰, 针对车辆车道保持的转向控制, 建立相对路面误差的侧向动力学模型。基于状态的双率采样信息, 利用输入时滞方法, 把多采样率状态模型转换为连续时间时滞系统, 设计一类基于采样时刻的切换控制器, 并以线性矩阵不等式(LMI)形式给出闭环系统指数稳定性条件和切换控制器的设计方法。最后, 通过智能车辆弯道处轨迹跟踪的仿真实验, 说明本文分析结果是合理的, 验证了所设计的控制器的有效性, 并与单率采样方法进行比较, 说明本文方法相比于单率采样方法的优势。

参 考 文 献

- 徐友春, 王荣本, 李兵等. 世界智能车辆近况综述. 汽车工程, 2001, 23(5): 289~295 (Xu Y C, Wang R B, Li B, et al. A summary of worldwide intelligent vehicle. *Automotive Engineering*, 2001, 23(5): 289~295 (in Chinese))
- 王荣本, 张荣辉, 金立生等. 区域智能交通车辆系统发展及其关键技术综述. 汽车工程, 2007, 29(3): 179~182 (Wang R B, Zhang R H, Jin L S, et al. A review on the development and key technologies of CyberCars system. *Automotive Engineering*, 2007, 29(3): 179~182 (in Chinese))
- Taniguchi E, Thompson R G, Yamada T, et al. City logistics: network modelling and intelligent transport systems. *Journal of Transport Geography*, 2002, 10(2): 158~159
- Bender J G. An overview of systems studies of automated highway systems. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, 1991, 40(1): 82~98
- Aguiar A P, Hespanha J P. Trajectory-tracking and path-following of underactuated autonomous vehicles with parametric modeling uncertainty. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2007, 52(8): 1362~1379
- 马保离, 霍伟. 移动小车的路径跟踪与镇定. 机器人, 1995, 17(6): 359~362 (Ma B L, Huo W. Path tracking

- control and stabilization of mobile cart. *Robot*, 1995, 17(6):358~362 (in Chinese))
- 7 孙娜, 李晓芳, 王娜. 基于双率采样的智能车辆直道轨迹跟踪控制. 唐山师范学院学报, 2017, 39(2):57~61 (Sun N, Li X F, Wang N. Trajectory tracking control of an intelligent vehicle on straight lane via dual-rate sampling. *Journal of Tangshan Normal University*, 2017, 39(2):57~61 (in Chinese))
- 8 Hoffman G M, Tomlin C J, Montemerlo M, et al. Autonomous automobile trajectory tracking for off-road driving: controller design, experimental validation and racing. *Proceedings of the American Control Conference*, 2007: 2345~2350
- 9 Chen T W, Francis B A. Optimal sampled-data control systems. London; Springer, 1995
- 10 Sagfors M F, Toivonen H T, Lennartson B. State-space solution to the periodic multirate H_∞ control problem: a lifting approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2000, 45(12):2345~2350
- 11 Daafouz J, Riedinger P, Iung C. Stability analysis and control synthesis for switched systems: a switched Lyapunov function approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2002, 47(11):1883~1887
- 12 Mizuochi M, Tsuji T, Ohnishi K. Multirate sampling method for acceleration control system. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2007, 54(3):1462~1471
- 13 Patwardhan S, Tan H S, Guldner J. A general framework for automatic steering control: system analysis. In: *Proceeding of American Control Conference*, 1997, 3:1598~1602
- 14 Ploplys N J, Kawaka P A, Alleyne A G. Closed-loop control over wireless networks. *IEEE Control Systems Magazine*, 2004, 24(3):58~71

TRAJECTORY TRACKING CONTROL OF INTELLIGENT VEHICLE ON CURVE LANE VIA DUAL-RATE SAMPLING

Sun Na[†]

(College of Computer Science and Technology, Shanxi Technology and Business College, Taiyuan 030006, China)

Abstract A control method for trajectory tracking of intelligent vehicles was proposed by employing dual-rate sampling. Firstly, the vehicle lateral dynamics model with relative error to the road was established for lane keeping steering control. Secondly, taking into account different sampling periods of various sensors, the state variables of the linear system were classified into two categories and each category was paired with a different sampling period. For this kind of dual-rate sampling system, a periodically switched controller was proposed based on whether the sampling information about these two categories of state variables was available. Then, using the input delay approach, the resulting dual-rate control system was modeled as a switched system with two timevarying sawtooth delays. The exponential stability condition of this closed-loop system and the design procedure of the switching controller were established in terms of linear matrix inequalities (LMI). Finally, the trajectory tracking control was simulated by Matlab/Simulink. It was shown that the dual-rate sampling method can achieve a better control performance compared with the existing single-rate sampling method, which illustrates the rationality and effectiveness of the proposed method.

Key words intelligent vehicle control, trajectory tracking, dual-rate sampling, switching control, linear matrix inequalities(LMIs)