第 17 卷第 4 期 2019 年 8 月
1672-6553/2019/17(4)/341-7
动 力 学 与 控 制 学 报
JOURNAL OF DYNAMICS AND CONTROL
Vol.17 No.4
Aug. 2019

热弹耦合梁方程组在非线性边界条件下的整体吸引子*

王瑜　张建文†
(太原理工大学 数学学院, 太原　030024)

摘要　本文研究了一类在非线性边界条件下的热弹耦合梁方程组的初边值问题,首先通过先验估计证明系统存在唯一的整体解,其次通过证明系统存在有界吸收集和半群的渐近光滑性得到整体吸引子的存在性.

关键词　热弹耦合,　梁方程组,　非线性边界条件,　整体吸引子

DOI:　10.6052/1672-6553-2019-030

引言

关于各类非线性梁方程整体吸引子的存在性问题研究已有很多进展[1-14].例如 Ma T F[1] 等研究了轴向力作用下弹性梁方程:

$$u_{tt}+u_{xxxx}-M(\|u_x(t)\|_2^2)u_{xx}=h(x) \tag{1}$$

在非线性边界条件

$$u(0,t)=u_x(0,t)=u_{xx}(L,t)=0,$$
$$u_{xxx}(L,t)-M(\|u_x(t)\|_2^2)u_x(L,t)$$
$$=f(u(L,t))+g(u_t(L,t)) \tag{2}$$

下解的长时间动力行为.

Giorgi C[2] 等证明了热弹耦合梁方程组

$$u_{tt}+u_{xxxx}-(\beta+\|u_x\|_2^2)u_{xx}-u_{xxtt}+f(u)+\theta_{xx}=f,$$
$$\theta_t-\theta_{xx}-u_{xxt}=g \tag{3}$$

在 Dirichlet 边界条件下弱解的存在唯一性和整体吸引子的存在性.

本文在前人的基础上考虑具有强阻尼的热弹耦合梁方程组

$$u_{tt}+u_{xxxx}-M(\|u_x\|_2^2)u_{xx}-N(\|u_x\|_2^2)u_{xxt}+$$
$$\mu\theta_{xx}=h(x),$$
$$\theta_t-\theta_{xx}-\mu u_{xxt}=0 \tag{4}$$

在非线性边界条件

$$u(0,t)=u_x(0,t)=u_{xx}(L,t)=0,$$
$$u_{xxx}(L,t)-M(\|u_x\|_2^2)u_x(L,t)-$$
$$N(\|u_x\|_2^2)u_{xt}(L,t)=f(u(L,t))+g(u_t(L,t)) \tag{5}$$

和初始条件

$$u(x,0)=u^0(x),u_t(x,0)=u^1(x),$$
$$\theta(x,0)=\theta^0(x) \tag{6}$$

下,整体吸引子的存在性.其中 $\Omega=[0,L]$.

1　空间和函数假设

我们的分析基于如下 Sobolev 空间,设

$$V=\{u\in H^2(0,L);u(0)=u_x(0)=0\};$$
$$W=\{u\in H^4(0,L)\cap V;u_{xx}(L)=0\}.$$

在空间 $H_1=\{(u^0,u^1,\theta)\in W\times W\times H_0^2(\Omega)\}$ 有正则解且满足边界条件

$$u_{xxx}^0(L)-M(\|u_x^0\|_2^2)u_x^0(L,t)-$$
$$N(\|u_x^0\|_2^2)u_{xt}^0(L,t)=f(u^0(L,t))+g(u^1(L,t)).$$

在空间 $H_0=V\times L^2(\Omega)\times H_0^2(\Omega)$,有弱解且满足上述边界条件,其范数为:

$$\|(u(t),u_t(t),\theta(t))\|_{H_0}^2=\|u_{xx}\|_2^2+\|u_t\|_2^2+\|\theta\|_2^2.$$

关于函数 $f(\cdot),g(\cdot),M(\cdot),N(\cdot),h(\cdot)$ 满足如下条件:

(1) $f,g:\Re\to\Re,f,g\in C^1(\Re),f(0)=g(0)=0$,

存在常数 $k,p,m,L_0,L_1>0,\rho,r\geqslant 0$,使得 $\forall u,v\in\Re$,有:

$$-L_0\leqslant\hat{f}(u)\leqslant\frac{1}{2}f(u)u+L_1 \tag{7}$$

$$|f(u)-f(v)|\leqslant k(1+|u|^\rho+|v|^\rho)|u-v| \tag{8}$$

$$(g(u)-g(v))(u-v)\geqslant p|u-v|^2 \tag{9}$$

2018-05-16 收到第 1 稿,2018-09-27 收到修改稿.
* 国家自然科学基金资助项目(11872264)
† 通讯作者 E-mail:zhangjianwen@tyut.edu.cn.

$$|g(u)-g(v)|\leqslant m(1+|u|^{r}+|v|^{r})|u-v| \tag{10}$$

其中，$\hat{f}(z)=\int_0^z f(s)\,\mathrm{d}s\geqslant 0$.

(2) $M(\cdot),N(\cdot)\in C^1(\Re)$，$M(0)=N(0)=0$ 均为非减函数且满足：

$$M(z)z\geqslant\hat{M}(z)\geqslant 0,\ \forall z\geqslant 0 \tag{11}$$

$$M(s)\geqslant N(s)\geqslant\alpha+\beta s^{\gamma} \tag{12}$$

$(\alpha,\beta>0,\gamma\geqslant 1)$，$\forall s\in\Re^{+}$.

(3) $h(x)\in L^2(\Omega)$.

2 整体解的存在唯一性

定理 2.1 设上述假设成立，若对于任何初值 $(u^0,u^1,\theta^0)\in H_1$ 系统(4)～(6)有唯一的正则解 $(u(t),\theta(t))$ 满足：

$$(u(t),\theta(t))\in L^{\infty}_{loc}(\Re^{+},W)\cap C^0([0,\infty)V)\cap C^1([0,\infty);L^2(\Omega))\times H_0^2(\Omega) \tag{13}$$

$$\|u_t\|_2^2+\|u_{xx}\|_2^2+\|\theta\|_2^2+\hat{M}(\|u_x\|_2^2)\leqslant M_1.$$

其中 M_1 是与初值 h 有关，与 t 无关的正常数.

证明：我们考虑系统(4)～(6)的近似方程，设 $\forall\omega\in V,\varpi\in H_0^2(\Omega)$ 可得：

$$\int_0^L u_{tt}^m\omega\,\mathrm{d}x+\int_0^L u_{xx}^m\omega_{xx}\,\mathrm{d}x+M(\|u_x^m\|_2^2)\cdot\int_0^L u_x^m\omega_x\,\mathrm{d}x+N(\|u_x^m\|_2^2)\int_0^L u_{xt}^m\omega_x\,\mathrm{d}x+f(u^m(L,t))\omega(L,t)+g(u_t^m(L,t))(L,t)+\mu\int_0^L\theta_{xx}^m\omega\,\mathrm{d}x=\int_0^L h(x)\omega\,\mathrm{d}x,$$

$$\int_0^L\theta_t^m\widetilde{\omega}\,\mathrm{d}x-\int_0^L\theta_{xx}^m\widetilde{\omega}\,\mathrm{d}x-\mu\int_0^L u_{xxt}^m\widetilde{\omega}\,\mathrm{d}x=0 \tag{14}$$

估计 1：在(14)式中令 $\omega=u_t^m(t)$，$\widetilde{\omega}=\theta^m(t)$，两式相加，应用 Schwarz 不等式，从 0 到 $t\leqslant t_m$ 积分有：

$$\begin{aligned}&\|u_t^m\|_2^2+\|u_{xx}^m\|_2^2+\|\theta^m\|_2^2+\hat{M}(\|u_x^m\|_2^2)+2\hat{f}(u^m(L,t))+2\int_0^t N(\|u_x^m\|_2^2)\|u_{xt}^m\|_2^2\mathrm{d}s+\\&2\int_0^t g(u_t^m(L,t))u_t^m(L,t)\,\mathrm{d}s+2\int_0^t\|\theta_x^m\|_2^2\mathrm{d}s\\&\leqslant\|u_t^m(0)\|_2^2+\|u_{xx}^m(0)\|_2^2+\|\theta^m(0)\|_2^2+\hat{M}(\|u_x^m(0)\|_2^2)+2\hat{f}(u^m(L,0))+\\&\int_0^t\|h\|_2^2\mathrm{d}s+\int_0^t\|u_t^m\|_2^2\mathrm{d}s\end{aligned} \tag{15}$$

根据假设(9)和函数 $N(\cdot)$，$\hat{f}(\cdot)$，$\hat{M}(\cdot)$ 性质，可知存在一正常数 M_1，使得 $\forall t\in[0,T]$，$\forall m\in N$，

$$\|u_t^m\|_2^2+\|u_{xx}^m\|_2^2+\|\theta^m\|_2^2+\hat{M}(\|u_x^m\|_2^2)\leqslant M_1 \tag{16}$$

估计 2：在(14)式中令 $\omega=u_{tt}^m(0)$，$\widetilde{\omega}=\theta_t^m(0)$，$t=0$ 两式相加，应用 Schwarz 不等式，可知存在正常数 M_2,M_3 使得 $\forall t\in[0,T]$，$\forall m\in N$，

$$\|u_{tt}^m(0)\|_2^2\leqslant M_2,\ \|\theta_t^m(0)\|_2^2\leqslant M_3 \tag{17}$$

估计 3：令 $\xi<T-t$，$t=t+\xi$，$t=t$，$t,\xi>0$，分别代入(14)式，作差，令 $\widetilde{\omega}=\theta_t^m(t+\xi)-\theta_t^m(t)$，$\omega=u_t^m(t+\xi)-u_t^m(t)$，可知存在正常数 M_4,M_5，使得 $\forall t\in[0,T]$，$\forall m\in N$，

$$\|u_{tt}^m\|_2^2+\|u_{xxt}^m\|_2^2\leqslant M_4,\ \|\theta_t^m\|_2^2\leqslant M_5 \tag{18}$$

唯一性：设 (u,θ)，$(v,\widetilde{\theta})$ 是系统(4)～(6)的解，代入(14)式，作差，令 $z=u-v$，$\vartheta=\theta-\widetilde{\theta}$，$\omega=z_t$，$\widetilde{\omega}=\vartheta$，令两式相加，可得存在一正常数 C，使得：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\|z_t^m\|_2^2+\|z_{xx}^m\|_2^2+\|\vartheta^m\|_2^2)\leqslant C(\|z_t^m\|_2^2+\|z_{xx}^m\|_2^2+\|\vartheta^m\|_2^2),\ \forall t\in[0,T] \tag{19}$$

根据 Gronwall 引理，可得 $u=v$.

因为 $u_{xx},u_{xxt}\in L^2(0,\infty;L^2(0,L))$ 则

$u(x,t)\in C^0([0,\infty);V)$，同理可得

$u(x,t)\in C^1([0,\infty);L^2)$. 证毕.

定理 2.2 对于任何初值 $(u^0,u^1,\theta^0)\in H_0$，系统(4)～(6)在 H_0 存在唯一只与初值有关的弱解.

证明：初值 $(u^0,u^1,\theta^0)\in H_0$，因为 H_1 在 H_0 中稠，存在 $\{u_n{}^0,u_n{}^1,\theta_n{}^0\}\in H_1$，使得：

$u_n{}^0\to u^0$ 在 V 中；

$u_n{}^1\to u^1$ 在 $L^2(\Omega)$ 中；

$\theta_n{}^0\to\theta^0$ 在 $H_0{}^2(\Omega)$ 中.

对于任意一个 n，存在 (u_n,θ_n) 满足系统(4)～(6)，

$$u_{ttn}+u_{xxxxn}-M(\|u_{xn}\|_2^2)u_{xxn}-N(\|u_{xn}\|_2^2)u_{xxtn}+\mu\theta_{xxn}=h(x) \tag{20}$$

对(20)式中的第一个方程与 u_{tn} 做内积，第二个方程与 θ_n 做内积，两式相加，可得存在与 $n\in N$ 无关的正常数 C_0，使得：

$$\|u_{tn}\|_2^2+\|u_{xxn}\|_2^2+\|\theta_n\|_2^2\leqslant C_0 \tag{21}$$

定义 $Z_{n,m}=u_n-u_m$，$\widetilde{Z}_{n,m}=\theta_n-\theta_m$，$n,m\in N$，则存在 (u,θ) 使得：

$u_n \to u$ 在 $C([0,T);V)$ 强收敛;

$u_{tn} \to u_t$ 在 $C([0,T);L^2)$ 强收敛;

$\theta_n \to \theta$ 在 $C([0,T);H_0{}^2)$ 强收敛.

令 $n\to\infty$,则有:

$$u_{tt}+u_{xxxx}-M(\|u_x\|_2^2)u_{xx}-N(\|u_x\|_2^2)u_{xxt}+\mu\theta_{xx}=h(x),$$
$$\theta_t-\theta_{xx}-\mu u_{xxt}=0 \tag{22}$$

证毕.

注 1:在空间 H_0 上定义一族非线性算子 $S(t)(u^0,u^1,\theta^0)\mapsto(u,u_t,\theta)$, $\forall t\geqslant 0$ 是 H_0 到 H_0 的映射,可知 $S(t)$ 是定义在 H_0 上的非线性 C_0-半群.

3　整体吸引子

引理 3.1[14]　设 H 是一个巴拿赫空间,对于任何正不变有界集 $B\in H$, $\forall\varepsilon>0$, $\exists T=T(\varepsilon,B)$,使得 $\forall x,y\in B$

$$\|S(T)x-S(T)y\|\leqslant\varepsilon+\varphi_T(x,y) \tag{23}$$

这里 $\varphi_T:H\times H\to\mathfrak{R}$ 满足对于任意 $\{z_n\}\in B$,

$$\liminf_{m\to\infty} f \liminf_{n\to\infty} f\varphi_T(z_n,z_m)=0 \tag{24}$$

那么半群 $S(t)$ 是渐近光滑的.

引理 3.2[14]　$S(t)$ 是距离空间 H 上的一个耗散的半群,$S(t)$ 存在紧吸引子当且仅当 $S(t)$ 在 H 中渐近光滑.

定理 3.3　在定理 2.2 的假设下,系统(4)~(6)在空间 H_0 上有吸收集.

证明:设系统的解 (u,u_t,θ) 是正则的,任取一个有界集 $B\in H_0$,使初值 $(u^0,u^1,\theta^0)\in B$,满足 $(u,u_t,\theta)=S(t)(u^0,u^1,\theta^0)$.

因为 $u(0)=u_x(0)=u_{xx}(L)=0$,则有以下不等式成立:

$$\|u\|_\infty\leqslant\sqrt{L}\|u_x\|_2,\ \|u_x\|_\infty\leqslant\sqrt{L}\|u_{xx}\|_2,$$
$$\|u_x\|_2\leqslant L\|u_{xx}\|_2,\ \|u\|_2\leqslant L^2\|u_{xx}\|_2 \tag{25}$$

令 $\varphi(t)=\int_0^L u_t u\mathrm{d}x$,设能量等式:

$$E(t)=\frac{1}{2}(\|u_t\|_2^2+\|u_{xx}\|_2^2+\|\theta\|_2^2+\hat{M}(\|u_x\|_2^2))+\hat{f}(u(L,t))-\int_0^L hu\mathrm{d}x \tag{26}$$

系统(4)的第一个方程与 $u_t+\varepsilon u$ 做内积,第二个方程与 θ 做内积,将两式相加有:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E(t)+\varepsilon\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varphi(t)+\varepsilon E(t)+\frac{\varepsilon}{2}\|u_t\|_2^2+\frac{\varepsilon}{2}\|u_{xx}\|_2^2+\frac{\varepsilon}{2}\|\theta\|_2^2-\frac{\varepsilon}{2}\hat{M}(\|u_x\|_2^2)+$$
$$\|\theta_x\|_2^2+\varepsilon M(\|u_x\|_2^2)\|u_x\|_2^2+N(\|u_x\|_2^2)\cdot\|u_{xt}\|_2^2+u_t(L,t)g(u_t(L,t))=2\varepsilon\|u_t\|_2^2-$$
$$\varepsilon u(L,t)f(u(L,t))-\varepsilon u(L,t)g(u_t(L,t))+\varepsilon\hat{f}(u(L,t))-\varepsilon N(\|u_x\|_2^2)\int_0^L u_{xt}u_x\mathrm{d}x-\varepsilon\mu\int_0^L\theta_{xx}u\mathrm{d}x \tag{27}$$

现在开始估计(27)式,根据(8)式和(25)式,令 $\rho=0$ 可得:

$$|\varepsilon\hat{f}(u(L,t))-\varepsilon u(L,t)f(u(L,t))|\leqslant\left|\frac{\varepsilon}{2}f(u(L,t))\right|+\varepsilon L_1\leqslant\frac{3}{2}\varepsilon kL^3\|u_{xx}\|_2^2+\varepsilon L_1 \tag{28}$$

根据(9)式,可得:

$$u_t(L,t)g(u_t(L,t))\geqslant p|u_t(L,t)|^2 \tag{29}$$

根据(10)式和(25)式,令 $r=0$,可得:

$$\varepsilon u(L,t)g(u_t(L,t))\leqslant 3\varepsilon m|u(L,t)\|u_t(L,t)|\leqslant 9\varepsilon m^2L^3|u_t(L,t)|^2+\frac{\varepsilon}{4}\|u_{xx}\|_2^2 \tag{30}$$

根据 Holder 不等式,可得:

$$\left|-\varepsilon N(\|u_x\|_2^2)\int_0^L u_xu_{xt}\mathrm{d}x\right|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}N(\|u_x\|_2^2)(\|u_x\|_2^2+\|u_{xt}\|_2^2) \tag{31}$$

$$\left|-\varepsilon\mu\int_0^L\theta_{xx}u\mathrm{d}x\right|\leqslant 4\varepsilon\mu^2\|\theta\|_2^2+\frac{\varepsilon}{16}\|u_{xx}\|_2^2 \tag{32}$$

将(28)~(32)式代入(27)式,可得:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E(t)+\varepsilon\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varphi(t)+\varepsilon E(t)+\frac{\varepsilon}{2}\|u_t\|_2^2+\frac{\varepsilon}{2}\|u_{xx}\|_2^2+\frac{\varepsilon}{2}\|\theta\|_2^2-\frac{\varepsilon}{2}\hat{M}(\|u_x\|_2^2)+\|\theta_x\|_2^2+$$
$$\varepsilon M(\|u_x\|_2^2)\|u_x\|_2^2+N(\|u_x\|_2^2)\|u_{xt}\|_2^2+p|u_t(L,t)|^2\leqslant 2\varepsilon\|u_t\|_2^2+\frac{3}{2}\varepsilon kL^3\|u_{xx}\|_2^2+$$
$$\varepsilon L_1+9\varepsilon m^2L^3|u_t(L,t)|^2+\frac{\varepsilon}{4}\|u_{xx}\|_2^2+4\varepsilon\mu^2\|\theta\|_2^2+\frac{\varepsilon}{2}N(\|u_x\|_2^2)(\|u_x\|_2^2+\|u_{xt}\|_2^2)+\frac{\varepsilon}{16}\|u_{xx}\|_2^2 \tag{33}$$

根据 $M(z)z \geqslant \hat{M}(z)$，$M(z) \geqslant N(z)$，可得：

$$\varepsilon M(\|u_x\|_2^2)\|u_x\|_2^2-\frac{\varepsilon}{2}\hat{M}(\|u_x\|_2^2)-$$

$$\frac{\varepsilon}{2}N(\|u_x\|_2^2)\|u_x\|_2^2 \geqslant 0 \tag{34}$$

根据(11)式，可得：

$$\frac{1}{2}N(\|u_x\|_2^2)\|u_{xt}\|_2^2 \geqslant \frac{\alpha}{2}\|u_{xt}\|_2^2$$

$$\geqslant \frac{\alpha}{4L}\|u_t\|_2^2+\frac{\alpha}{4}\|u_{xt}\|_2^2 \tag{35}$$

令 $0<\varepsilon \leqslant \min\{p/9m^2L^3, \alpha/6L, 1\}$，当 ε 足够小时，有：

$$p\,|u_t(L,t)|^2 \geqslant 9\varepsilon m^2L^3\,|u_t(L,t)|^2,$$

$$\left(\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\alpha}{4L}\right)\|u_t\|_2^2 \geqslant 2\varepsilon\|u_t\|_2^2 \tag{36}$$

令 $1-8kL^3 \geqslant 0$，当 k 充分小时，有：

$$\frac{\varepsilon}{2}\|u_{xx}\|_2^2 \geqslant \left(\frac{3}{2}\varepsilon kL^3+\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{16}\right)\|u_{xx}\|_2^2 \tag{37}$$

令 $1-8\mu^2 \geqslant 0$，当 μ 充分小时，有：

$$\frac{\varepsilon}{2}\|\theta\|_2^2 \geqslant 4\varepsilon\mu^2\|\theta\|_2^2 \tag{38}$$

将(34)~(38)式代入(33)式，可得：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E(t)+\varepsilon\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varphi(t)+\varepsilon E(t) \leqslant \varepsilon L_1 \tag{39}$$

设矫正能量等式：

$$\widetilde{E}(t)=E(t)+L_0+L_1+L^4\|h\|_2^2 \tag{40}$$

则有：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\widetilde{E}(t)+\varepsilon\varphi(t))+\varepsilon\widetilde{E}(t)$$

$$\leqslant \varepsilon(L_0+L_1+L^4\|h\|_2^2) \tag{41}$$

因为 $-\int_0^L hu\mathrm{d}x \geqslant -L^4\|h\|_2^2-\frac{1}{4}\|u_{xx}\|_2^2$，由假设(7)和 $\widetilde{E}(t)$ 的定义，可得：

$$\widetilde{E}(t) \geqslant \frac{1}{4}(\|u_t\|_2^2+\|u_{xx}\|_2^2+\|\theta\|_2^2)$$

$$=\frac{1}{4}\|(u(t),u_t(t),\theta(t))\|_{H_0}^2 \tag{42}$$

设 $\widetilde{E}_\varepsilon(t)=\widetilde{E}(t)+\varepsilon\varphi(t)$，根据 $\varphi(t)$ 的定义：

$$|\widetilde{E}_\varepsilon(t)-\widetilde{E}(t)|=|\varepsilon\varphi(t)| \leqslant 2\varepsilon L^2\widetilde{E}(t) \tag{43}$$

当 ε 充分小时，有：

$$(1-2\varepsilon L^2)\widetilde{E}(t) \leqslant \widetilde{E}_\varepsilon(t) \leqslant (1+2\varepsilon L^2)\widetilde{E}(t) \tag{44}$$

将(44)式带入(41)式中有：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\widetilde{E}_\varepsilon(t)+\frac{\varepsilon}{1+2\varepsilon L^2}\widetilde{E}_\varepsilon(t)$$

$$\leqslant \varepsilon(L_0+L_1+L^4\|h\|_2^2) \tag{45}$$

令 $L_2=L_0+L_1+L^4\|h\|_2^2$，由 Gronwall 不等式，可得：

$$\widetilde{E}_\varepsilon(t) \leqslant \widetilde{E}_\varepsilon(0)\exp\left(-\frac{t\varepsilon}{1+2\varepsilon L^2}\right)+$$

$$L_2(1+2\varepsilon L^2)\left(1-exp\left(-\frac{t\varepsilon}{1+2\varepsilon L^2}\right)\right) \tag{46}$$

因为正不变集 B 有界，$\widetilde{E}_\varepsilon(0)$ 也有界，则存在 $t_B>0$，当 t_B 足够大时，有：

$$(1-2\varepsilon L^2)\widetilde{E}(t) \leqslant \widetilde{E}_\varepsilon(t) \leqslant (1+2\varepsilon L^2)L_2 \tag{47}$$

从(42)式可得，$\forall\, t>t_B$

$$\|(u(t),u_t(t),\theta(t))\|_{H_0}^2 \leqslant \frac{4L_2(1+2\varepsilon L^2)}{1-2\varepsilon L^2} \tag{48}$$

因此，

$$B=\{(u,u_t,\theta)\in H_0:\|(u,u_t,\theta)\|_{H_0}^2 \leqslant \frac{4L_2(1+2\varepsilon L^2)}{1-2\varepsilon L^2}\} \tag{49}$$

是系统的一个有界吸收集.

证毕.

定理 3.4 在定理 2.2 的假设下，半群 $S(t)$ 在 H_0 中渐近光滑.

证明：任取一个有界集 $B\in H_0$，且正不变，给定初值 (u^0,u^1,θ^0)，$(v^0,v^1,\widetilde{\theta}^0)\in B$，令 (u,θ)，$(v,\widetilde{\theta})$ 是系统的解，那么 $\omega=u-v$，$\vartheta=\theta-\widetilde{\theta}$，满足方程：

$$\begin{aligned}
&\omega_{tt}+\omega_{xxxx}-M(\|u_x\|_2^2)\omega_{xx}-\Delta Mv_{xx}-\\
&N(\|u_x\|_2^2)\omega_{xxt}-\Delta Nv_{xxt}+\mu\vartheta_{xx}=0,\\
&\omega(0,t)=\omega_x(0,t)=\omega_{xx}(L,t)=0,\\
&\omega_{xxx}(L,t)-M(\|u_x\|_2^2)\omega_x(L,t)-\\
&\Delta Mv_x(L,t)-N(\|u_x\|_2^2)\omega_{xt}(L,t)-\\
&\Delta Nv_{xt}(L,t)=\Delta f+\Delta g
\end{aligned} \tag{50}$$

其中，

$$\Delta M=M(\|u_x\|_2^2)-M(\|v_x\|_2^2),$$

$$\Delta N=N(\|u_x\|_2^2)-N(\|v_x\|_2^2),$$

$$\Delta f=f(u(L,t))-f(v(L,t)),$$

$$\Delta g=g(u_t(L,t))-g(v_t(L,t)).$$

令 $\psi(t)=\int_0^L\omega_t\omega\mathrm{d}x$，设能量等式：

$$F(t)=\frac{1}{2}(\|\omega_t\|_2^2+\|\omega_{xx}\|_2^2+M(\|u_x\|_2^2)\|\omega_x\|_2^2+\|\vartheta\|_2^2) \tag{51}$$

将式(50)中的第一个方程与 $\omega_t+\eta\omega$ 做内积,第二个方程与 ϑ 做内积,相加有:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F(t)+\eta\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\psi(t)+2\eta F(t)+\|\vartheta_x\|_2^2+N(\|u_x\|_2^2)\|\omega_{xt}\|_2^2+\Delta g\omega_t(L,t)=M'(\|u_x\|_2^2)\cdot\int_0^L u_xu_{xt}\mathrm{d}x\|\omega_x\|_2^2+\Delta M\int_0^L\omega_tv_{xx}\mathrm{d}x+\Delta N\int_0^L\omega_tv_{xxt}\mathrm{d}x+2\eta\|\omega_t\|_2^2+\eta\|\vartheta\|_2^2-\eta\Delta f\omega(L,t)-\eta\Delta g\omega(L,t)-\eta\Delta Mv_x(L,t)\cdot\omega(L,t)-\Delta f\omega_t(L,t)-\Delta Mv_x(L,t)\omega_t(L,t)-\Delta Nv_{xt}(L,t)\omega_t(L,t)-\eta\Delta Nv_{xt}(L,t)\omega(L,t)-\eta N(\|u_x\|_2^2)\int_0^L\omega_x\omega_{xt}\mathrm{d}x-\eta\mu\int_0^L\vartheta_{xx}\omega\mathrm{d}x+\eta\Delta M\int_0^Lv_{xx}\omega\mathrm{d}x+\eta\Delta N\int_0^Lv_{xxt}\omega\mathrm{d}x \tag{52}$$

现在开始估计(52)式,根据(9)式,可得:

$$\Delta g\omega_t(L,t)\geqslant p|\omega_t(L,t)|^2 \tag{53}$$

根据(11)式,可得:

$$N(\|u_x\|_2^2)\|\omega_{xt}\|_2^2\geqslant(\alpha+\beta\|u_x\|_2^{2\gamma})\|\omega_{xt}\|_2^2 \tag{54}$$

根据 $M(\cdot)$,$N(\cdot)$ 函数性质,可得:

$$M'(\|u_x\|_2^2)\int_0^Lu_xu_{xt}\mathrm{d}x\|\omega_x\|_2^2\leqslant C_0\|\omega_x\|_2^2 \tag{55}$$

$$\left|-\eta N(\|u_x\|_2^2)\int_0^L\omega_x\omega_{xt}\mathrm{d}x\right|\leqslant C_0\|\omega_x\|_2^2+\frac{\eta}{2}\|\omega_{xt}\|_2^2.$$

根据中值定理

$$N(a^2)-N(b^2)\leqslant N'(\sup\{a^2,b^2\})|a+b||a-b|$$

可得:

$$\eta\Delta N\int_0^Lv_{xxt}\omega\mathrm{d}x\leqslant C_0\|\omega_x\|_2^2 \tag{56}$$

$$|-\eta\Delta Nv_{xt}(L,t)\omega(L,t)|\leqslant C_0\|\omega_x\|_2^2,$$

$$|-\eta\Delta Nv_{xt}(L,t)\omega_t(L,t)|\leqslant C_0\|\omega_x\|_2^2+\frac{p}{4}|\omega_t(L,t)|^2,$$

$$\Delta N\int_0^L\omega_tv_{xxt}\mathrm{d}x\leqslant C_0\|\omega_x\|_2^2+\frac{\eta}{2}\|\omega_{xt}\|_2^2.$$

根据中值定理

$$M(a^2)-M(b^2)\leqslant M'(\sup\{a^2,b^2\})|a+b||a-b|$$

可得:

$$\eta\Delta M\int_0^Lv_{xxt}\omega\mathrm{d}x\leqslant C_0\|\omega_x\|_2^2 \tag{57}$$

$$|-\eta\Delta Mv_x(L,t)\omega(L,t)|\leqslant C_0\|\omega_x\|_2^2,$$

$$|-\Delta Mv_x(L,t)\omega_t(L,t)|\leqslant C_0\|\omega_x\|_2^2+\frac{p}{4}|\omega_t(L,t)|^2,$$

$$\Delta M\int_0^L\omega_tv_{xx}\mathrm{d}x\leqslant C_0\|\omega_x\|_2^2+\frac{\eta}{2}\|\omega_{xt}\|_2^2.$$

根据(8)式,令 $\rho=0$,可得:

$$|-\Delta f\omega_t(L,t)|\leqslant3k\|\omega(t)\|_\infty|\omega_t(L,t)|\leqslant C_0\|\omega_x\|_2^2+\frac{p}{4}|\omega_t(L,t)|^2 \tag{58}$$

$$|-\eta\Delta f\omega(L,t)|\leqslant3\eta k\|\omega(t)\|_\infty|\omega(L,t)|\leqslant C_0\|\omega_x\|_2^2.$$

根据(10)式,令 $r=0$,可得:

$$|-\eta\Delta g\omega(L,t)|\leqslant3\eta m|\omega(L,t)\|\omega_t(L,t)|\leqslant C_0\|\omega_x\|_2^2+\frac{p}{4}|\omega_t(L,t)|^2 \tag{59}$$

显然有:

$$\left|-\eta\mu\int_0^L\vartheta_{xx}\omega\mathrm{d}x\right|\leqslant\frac{\eta\mu}{4}\|\vartheta_x\|_2^2+C_0\|\omega_x\|_2^2 \tag{60}$$

将(53)~(60)式代入(52)式,可得:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F(t)+\eta\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\psi(t)+2\eta F(t)+(\alpha+\beta\|u_x\|_2^{2\gamma})\|\omega_{xt}\|_2^2+\|\vartheta_x\|_2^2\leqslant14C_0\|\omega_x\|_2^2+(2\eta L+\frac{3}{2}\eta)\|\omega_{xt}\|_2^2+\frac{\eta\mu}{4}\|\vartheta_x\|_2^2 \tag{61}$$

令 $F_\eta(t)=F(t)+\eta\psi(t)$,有:

$$|F_\eta(t)-F(t)|=|\eta\psi(t)|\leqslant2\eta L^2F(t) \tag{62}$$

令 $0\leqslant\eta\leqslant\min\{2\alpha/(4L+3),4/\mu,1/2L^2\}$,当 η 充分小时,有:

$$(1-2\eta L^2)F(t)\leqslant F_\eta(t)\leqslant(1+2\eta L^2)F(t) \tag{63}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F(t)+\eta\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\psi(t)+2\eta F(t)\leqslant14C_0\|\omega_x\|_2^2 \tag{64}$$

将(64)式带入(63)式可知存在常数 C_1,使得:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F_\eta(t)+\frac{2\eta}{1+2\eta L^2}F_\eta(t)\leqslant C_1\|\omega_x\|_2^2 \tag{65}$$

应用 Gronwall 引理,有:

$$F_\eta(t)\leqslant F_\eta(0)\exp(-2\eta/(1+2\eta L^2))t+C_1\int_0^t\exp(-2\eta/(1+2\eta L^2))(t-s)\|\omega_x\|_2^2\mathrm{d}s \tag{66}$$

因此,存在与 B 有关,与 t 无关的常数 C_B,满足 $F_\eta(0)\leqslant C_B$,于是有:

$$\|(\omega(t),\omega_t(t),\vartheta(t))\|_{H_0}$$
$$\leqslant\sqrt{\frac{2}{1-2\eta L^2}}C_B\exp(-\eta/(1+2\eta L^2))t+\sqrt{\frac{2C_1}{1-2\eta L^2}}\left(\int_0^t\|\omega_x\|_2^2\mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{2}} \tag{67}$$

对于任意的 $0\leqslant t\leqslant T$ 都成立,令 T 充分大,存在 $\varepsilon>0$,使得:

$$\sqrt{\frac{2}{1-2\eta L^2}}C_B\exp(-\eta/(1+2\eta L^2))t\leqslant\varepsilon \tag{68}$$

定义 ϕ_T: $H_0\times H_0\to\mathfrak{R}$ 为:

$$\phi_T((u^0,u^1,\theta^0),(v^0,v^1,\tilde{\theta}^0))$$
$$=\sqrt{\frac{2C_1}{1-2\eta L^2}}\left(\int_0^T\|\omega_x\|_2^2\mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{2}} \tag{69}$$

根据(67)~(69),可得:

$$\|S(T)(u^0,u^1,\theta^0)-S(T)(v^0,v^1,\tilde{\theta}^0)\|_{H_0}$$
$$=\varepsilon+\phi_T((u^0,u^1,\theta^0),(v^0,v^1,\tilde{\theta}^0)).$$

对任意的 $(u^0,u^1,\theta^0),(v^0,v^1,\tilde{\theta}^0)\in B$ 都成立.给定序列 $\{(u_n^0,u_n^1,\theta_n^0)\}\in B$,集合 B 是正不变的,所以系统(4)~(6)的解在 H_0 中一致有界的.所以 $\{u_n\}$ 在 $C([0,\infty),V)\cap C^1([0,\infty),L^2(\Omega))$ 中有界.根据嵌入定理 $V\mapsto H_0^1$ 是紧的.则存在子序列 $\{u_{nk}\}$ 在 $C([0,\infty),H_0^1(\Omega))$ 中一致强收敛.

$$\lim_{k\to\infty}\lim_{l\to\infty}\int_0^T(\|u_{xnk}(s)-u_{xnl}(s)\|_2^2)\mathrm{d}s=0,$$

$$\lim_{k\to\infty}\lim_{l\to\infty}\varphi_T((u_{nk}^0,u_{nk}^1,\theta_{nk}^0),(v_{nk}^0,v_{nk}^1,\tilde{\theta}_{nk}^0))=0.$$

因此,可得半群 $S(t)$ 在空间 H_0 渐近紧.

证毕.

根据引理3.2,定理3.3,定理3.4,可得以下定理.

定理3.5 系统(4)~(6)确定的半群 $S(t)$ 在空间 H_0 中有一个整体吸引子.

4 结论

本文主要考虑热弹耦合梁方程组在非线性边界条件下的初边值问题,通过先验估计和一些常用不等式得到以下结论

(1)当初始值 $(u^0,u^1,\theta)\in V\times L^2(\Omega)\times H_0^2(\Omega)$ 时,系统存在唯一的弱解;当初始值 $(u^0,u^1,\theta)\in W\times W\times H_0^2(\Omega)$ 时,系统存在唯一的正则解.

(2)在弱解的情况下,通过证明系统存在有界吸收集和半群的渐近光滑性得到整体吸引子.

参考文献

1 Ma T F, Narciso V, Pelicer M L. Long-time behavior of a model of extensible beams with nonlinear boundary dissipations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2012,396(2):694~703

2 Giorgi C, Naso M G, Pata V, et al. Global attractors for the extensible thermoselastic beam system. *Journal of Differential Equations*, 2009,246(9):3496~3517

3 郝晓荣,张建文. 一类耦合抽象非线性梁方程组的整体解. 动力学与控制学报, 2015,13(5):345~347 (Hao X R, Zhang J W. The global solution for a class coupled of nonlinear abstract beam equation. *Journal of Dynamics and Control*, 2015,13(5):345~347 (in Chinese))

4 Ma T F, Narciso V. Global attractor for a model of extensible beam with nonlinear damping and source terms. *Nonlinear Analysis Theory Methods and Applications*, 2010,73(10):3402~3412

5 Shi P R, Wang D X, Chen W. Global attractor of thermoelastic coupled beam equations with structural damping. *Mathematical Problems in Engineering*, 2017,2017(2):1~13

6 Wang D X, Zhang J W, Wang Y Z. Strong attractor of beam equation with structural damping and nonlinear damping. *Mathematical Problems in Engineering*, 2013, 2013(2):589~606

7 Yang Z J. On an extensible beam equation with nonlinear damping and source terms. *Journal of Differential Equations*, 2013,254(9):3903~3927

8 Yang Z J, Ding P, Liu Z. Global attractor for the Kirchhoff type equations with strong nonlinear damping and supercritical nonlinearity. *Applied Mathematics Letters*, 2014,33(1):12~17

9 Wang D X, Zhang J W, Wang Y Z, et al. Attractor of beam equation with structural damping under nonlinear boundary conditions. *Mathematical Problems in Engineering*, 2015,2015(2):1~10

10 Eden A, Milani A J. Exponential attractors for extensible beam equations. *Nonlinearity*, 1993,6(3):457~479

11 Medeiros L A. On a new class of nonlinear wave equations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*,

1979,69(1):252~262

12 Ma T F. Boundary stabilization for a non-linear beam on elastic bearings. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 2001,24(8):583~594

13 Choo S M, Chung S K. Finite element Galerkin solutions for the nonplanar oscillatory beam equations. *Elsevier Science Inc*, 2000,114(2-3):279~301

14 Chueshov I, Lasiecka I. Long-time behavior of second order evolution equations with nonlinear damping. *Memoirs of the American Mathematical Society*, 2008,195:67~99

GLOBAL ATTRACTOR OF THE THERMOELASTIC COUPLING BEAM EQUATIONS WITH NONLINEAR BOUNDARY CONDITIONS *

Wang Yu　Zhang Jianwen†

(*College of Mathematics*, *Taiyuan University of Technology*, *Taiyuan* 030024, *China*)

Abstract In this paper, we studied the initial boundary value problem of thermoelastic coupling beam equations with nonlinear boundary conditions. Firstly, we proved the existence and uniqueness of global solution by prior estimates. Secondly, we proved the existence of a global attractor by an absorbing set and asymptotic smooth of the related solution semigroup.

Key words thermoelastic coupling, beam equations, nonlinear conditions, global attractor

Received 16 May 2018, revised 27 September 2018.

* The project supported by the National Natural Science Foundation of China(11872264).

† Corresponding author E-mail: zhangjianwen@tyut.edu.cn