

# 索梁结构中抗弯刚度斜拉索的非线性响应<sup>\*</sup>

吕建根<sup>1†</sup> 王荣辉<sup>2</sup>

(1.仲恺农业工程学院 城乡建设学院, 广东 510225) (2.华南理工大学 土木与交通学院, 广东 510641)

**摘要** 研究索梁结构中考虑抗弯刚度斜拉索的非线性响应.从斜拉桥中简化出索梁组合结构力学模型,考虑抗弯刚度、几何非线性及垂度等因素,忽略索梁纵向振动,基于 Hamilton 变分原理,获得了索梁结构耦合非线性振动偏微分方程组.首先运用 Galerkin 方法离散该方程组,然后利用多尺度法对该方程组进行摄动分析.以某索梁结构为例,分析了索主要参数对抗弯刚度斜拉索面内基频的影响,探讨了抗弯刚度对斜拉索幅频响应、激频响应的影响,数值模拟获得了索梁结构的时程曲线.结果表明,考虑抗弯刚度后,索长对斜拉索面内基频的影响较大,对于短索,应考虑抗弯刚度;含抗弯刚度斜拉索的幅频响应曲线整体向右平移,激频响应曲线向左移,移动的幅度取决于抗弯刚度的大小;梁振动将对索振动产生显著影响,索振动对梁的振动影响很小.

**关键词** 斜拉桥, 索梁结构, 抗弯刚度, 非线性响应

DOI: 10.6052/1672-6553-2019-028

## 引言

索梁组合结构是工程中的常见结构,广泛应用于土木工程领域,尤其是在桥梁工程领域具有大量应用,在斜拉桥的施工过程中及斜拉桥成桥后都是以索梁组合结构为主要受力体系,因此,这种组合结构对斜拉桥的施工及运营安全性具有至关重要作用.

基于合理假设,国内外学者深入研究了索梁组合结构动力学问题.国内研究方面,1998 年,亢战、钟万勰<sup>[1]</sup>将斜拉索和桥面简化为两个刚体质量块,首次提出了索梁组合结构的参数振动模型,分析了索梁结构的参数共振问题;2001 年,汪至刚等<sup>[2]</sup>考虑了桥面的质量与刚度作用,并将斜拉索简化为弦,提出了索梁组合结构的弦-质量块振动模型;2018 年,吴娟等<sup>[3]</sup>研究另一类弦-梁耦合结构的非线性振动,并对结构稳定性进行了分析.自 2000 年以来,赵跃宇等<sup>[4-7]</sup>基于连续介质力学建立了索梁组合结构、索拱组合结构等连续体振动模型,利用多尺度方法分析了连续体结构可能出现的内共振模式,开展了一系列较系统的研究工作.此外,近年

来,一些学者研究了 CFRP 索或 CFRP 索梁结构的振动问题.如:2018 年,刘海波等<sup>[8]</sup>研究 CFRP 索对斜拉桥全局模态频率的敏感性;康厚军等<sup>[9]</sup>建立了 CFRP 索梁振动力学模型,双索梁模型平面内自由振动的特征值问题.国外研究方面,1993 年, Y. Fujino 等<sup>[10]</sup>从理论和实验两方面分析了三自由度索梁组合结构的自激参数共振问题;2000 年, Caetano 等<sup>[11,12]</sup>通过实验研究了斜拉桥中索与桥面或桥塔的动力作用;2003 年, Gattulli<sup>[13]</sup>研究了索梁组合结构面内非线性作用;2011 年, Zhu 等<sup>[14]</sup>构建了含局部损伤的索梁组合结构模型,探讨了局部损伤对索梁组合结构动力响应的影响.

为简化计算,研究过程中斜拉索一般不考虑抗弯刚度.但近年随着斜拉索长度的增加,斜拉索直径也越来越大,其抗弯刚度对斜拉索振动的影响值得深入研究.2008 年,赵跃宇等<sup>[15]</sup>研究了弯曲刚度对斜拉索非线性固有频率的影响.本文基于 Hamilton 变分原理建立含抗弯刚度的钢质索梁组合结构控制方程,通过 Galerkin 方法离散,并采用多尺度摄动法求解,研究了抗弯刚度对索幅频响应和激频响应的影响,数值模拟含抗弯刚度索梁组合结构的

2018-12-31 收到第 1 稿,2019-01-15 收到修改稿.

<sup>\*</sup> 国家自然科学基金资助项目(51378220)

<sup>†</sup> 通讯作者 E-mail: lvjiangen77@163.com

时程曲线,获得了一些具有工程意义的结论。

## 1 建立控制方程

图1显示了从斜拉桥中简化的索梁组合结构模型,为了便于建模,斜拉索的振动在局部坐标系 $xoy$ 中描述,梁的振动在另一个局部坐标系 $\bar{x}\bar{y}$ 中描述, $\theta$ 为斜拉索的水平倾角, $l_c$ 、 $l_b$ 为斜拉索和梁在局部坐标系中的跨度, $d$ 为斜拉索在局部坐标系中的垂度。

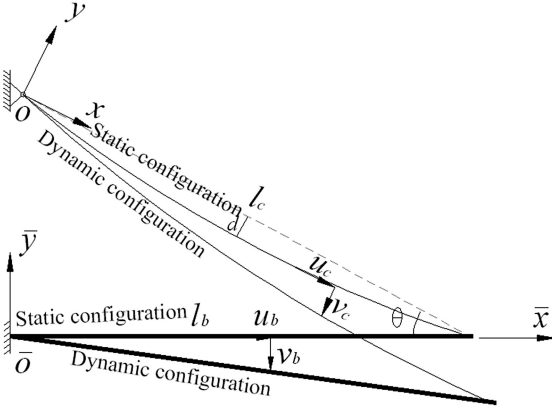


图1 索梁组合结构模型

Fig.1 Model of cable-stayed beam

用 $u_c$ 、 $u_b$ 分别表示索和梁的纵向振动位移, $v_c$ 、 $v_b$ 分别表示索和梁的横向振动位移,索、梁在右端端点铰接,根据索梁位移协调条件,可以得到如下关系式:

$$u_c(l_c, t) = \frac{v_b(l_b, t) - v_c(l_c, t) \cos \theta}{\sin \theta} \quad (1a)$$

$$u_b(l_b, t) = \frac{v_b(l_b, t) \cos \theta - v_c(l_c, t)}{\sin \theta} \quad (1b)$$

假设 $\rho_c$ 表示斜拉索的密度, $A_c$ 为截面面积, $c_c$ 为阻尼系数, $H$ 为初始张力, $E_c$ 为弹性模量, $I_c$ 为截面惯性矩.设 $\rho_b$ 为梁的密度、 $A_b$ 为截面面积、 $c_b$ 为阻尼系数、 $N_0$ 为始轴力、 $E_b$ 为弹性模量、 $I_b$ 为截面惯性矩.基于如下假定:忽略斜拉索的材料非线性;不考虑斜拉索的扭转刚度、剪切刚度;斜拉索质量沿曲线方向连续均匀分布.忽略索梁纵向惯性力的影响,利用Hamilton变分原理可以推导含抗弯刚度索梁组合结构耦合振动偏微分方程:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left\{ T_0 \frac{\partial v_c(x, t)}{\partial x} + E_c A_c \left[ \frac{\partial y_0}{\partial x} + \frac{\partial v_c(x, t)}{\partial x} \right] \right\} \cdot \left\{ \frac{v_c(l_c, t) \cos \theta - v_b(l_b, t)}{l_c \sin \theta} + \right.$$

$$\left. \frac{1}{l_c} \int_0^{l_c} \left\{ \frac{dy_0}{dx} \frac{\partial v_c(x, t)}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial v_c(x, t)}{\partial x} \right]^2 \right\} dx \right\} = \rho_c A_c \frac{\partial^2 v_c(x, t)}{\partial t^2} + c_c \frac{\partial v_c(x, t)}{\partial t} + E_c I_c \frac{\partial^4 v_c(x, t)}{\partial x^4} \quad (2a)$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left\{ \left[ \frac{N_0 - (N_0 - E_b A_b) \times \left\{ \frac{v_c(l_c, t) - v_b(l_b, t) \cos \theta}{l_b \sin \theta} \right\} + \frac{1}{2l_b} \int_0^{l_b} \left[ \frac{\partial v_b(\bar{x}, t)}{\partial \bar{x}} \right]^2 d\bar{x}}{\frac{\partial v_b(\bar{x}, t)}{\partial \bar{x}}} \right] \times \right\} = \rho_b A_b \frac{\partial^2 v_b(\bar{x}, t)}{\partial t^2} + c_b \frac{\partial v_b(\bar{x}, t)}{\partial t} + E_b I_b \frac{\partial^4 v_b(\bar{x}, t)}{\partial \bar{x}^4} \quad (2b)$$

将方程组(2a)、(2b)与参考文献[16]中斜拉索的振动偏微分方程对比显示,在方程(2a)中 $E_c I_c \frac{\partial^4 v_c(x, t)}{\partial x^4}$ 项反映了抗弯刚度对斜拉索振动的影响.斜拉索的动应变可以写成:

$$e_c(t) = \frac{v_c(l_c, t) \cos \theta - v_b(l_b, t)}{l_c \sin \theta} + \frac{1}{l_c} \int_0^{l_c} \left\{ \frac{dy_0}{dx} \frac{\partial v_c(x, t)}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial v_c(x, t)}{\partial x} \right]^2 \right\} dx \quad (3)$$

索梁锚固处的位移及力边界条件如下:

$$v_c(0, t) = v_b(0, t) = 0 \quad (4a)$$

$$v'_c(0, t) = 0; v''_b(l_b, t) = 0 \quad (4b)$$

$$\{ H v'_c(l_c, t) + E_c A_c e_c(t) \cdot [v'_c(l_c, t) + y'_0(l_c, t)] \} \cdot \cos \theta + E_c A_c e_c(t) \sin \theta = E_b I_b v'''_b(l_b, t) \quad (4c)$$

如图2所示,索梁锚固点为 $S$ ,  $S'$ 是锚固点振动变形后的位置;锚固点索的纵向、横向位移分别为 $u_c = u_c(l_c, t)$ 和 $v_c = v_c(l_c, t)$ ;锚固点梁的横向位移为 $v_b = v_b(l_b, t)$ ,  $Q$ 为锚固点左边的剪力; $T_{cx}$ 、 $T_{cy}$ 分别是斜拉索纵向和横向张力分量,通过下式计算:

$$T_{cx} = E_c A_c e_c(t) \quad (5a)$$

$$T_{cy} = H v'_c(l_c, t) + E_c A_c e_c(t) \cdot [v'_c(l_c, t) + y'_0(l_c, t)] \quad (5b)$$

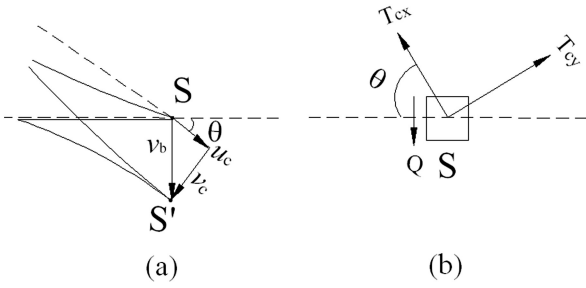


图2 索梁锚固处示意图

(a)几何变形; (b)受力

Fig.2 Schematic of the (a) geometric and (b) mechanical boundary conditions at the junction

## 2 摄动分析

### 2.1 Galerkin 离散

假设  $v_c(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(x) V_n(t)$ ,  $v_b(\bar{x}, t) =$

$\sum_{n=1}^{\infty} \zeta_n(\bar{x}) \bar{V}_n(t)$ , 对索梁组合结构耦合偏微分方程进行 Galerkin 高阶离散, 将两式代入方程 (2a) 和 (2b) 中, 在方程 (2a) 两边同乘以  $\psi_i(x)$  并在区间  $[0, l_c]$  上积分, 在方程 (2b) 两边同乘以  $\zeta_i(\bar{x})$  并在区间  $[0, l_b]$  上积分, 并考虑振型函数  $\psi_i(x)$ 、 $\zeta_i(\bar{x})$  的正交性, 可以得到索梁组合结构多阶离散动力学方程

$$\begin{aligned} k_1^{ni} \ddot{V}_n + k_2^{ni} \dot{V}_n + k_3^{ni} V_n + \sum_{m=1, m \neq n}^{\infty} k_3^{mi} V_m + \\ \sum_{m=1}^{\infty} k_4^{mi} \bar{V}_m + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} k_5^{mpi} V_m \bar{V}_p + \\ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} k_6^{mpi} V_m V_p + \\ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{r=1}^{\infty} k_7^{mpri} V_m V_p V_r = 0 \end{aligned} \quad (6a)$$

$$\begin{aligned} \bar{k}_1^{ni} \ddot{\bar{V}}_n + \bar{k}_2^{ni} \dot{\bar{V}}_n + \bar{k}_3^{ni} \bar{V}_n + \sum_{m=1, m \neq n}^{\infty} \bar{k}_3^{mi} \bar{V}_m + \\ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} \bar{k}_5^{mpi} V_m \bar{V}_p + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} \bar{k}_6^{mpi} \bar{V}_m \bar{V}_p + \\ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{r=1}^{\infty} \bar{k}_7^{mpri} \bar{V}_m \bar{V}_p \bar{V}_r = 0 \end{aligned} \quad (6b)$$

通常, 对方程组 (6) 进行化简, 在方程 (6a) 两边同除以  $k_1^{ni}$ , 在方程 (6b) 两边同除以  $\bar{k}_1^{ni}$ , 引入任意小的正数  $\varepsilon$ , 按下面方式定义化简后的方程系数

$$2\varepsilon\mu_{c,n} = \frac{k_2^{ni}}{k_1^{ni}} \quad 2\varepsilon\mu_{b,n} = \frac{\bar{k}_2^{ni}}{\bar{k}_1^{ni}}$$

$$\begin{aligned} \omega_{c,n}^2 &= \frac{k_3^{ni}}{k_1^{ni}} & \omega_{b,n}^2 &= \frac{\bar{k}_3^{ni}}{\bar{k}_1^{ni}} \\ \varepsilon\alpha_{1,mn} &= \frac{k_3^{mi}}{k_1^{ni}} (m \neq n) & \varepsilon\beta_{1,mn} &= \frac{\bar{k}_3^{mi}}{\bar{k}_1^{ni}} (m \neq n) \\ \varepsilon\alpha_{2,mn} &= \frac{k_4^{mi}}{k_1^{ni}} \\ \varepsilon\alpha_{3,mpn} &= \frac{k_5^{mpi}}{k_1^{ni}} & \varepsilon\beta_{3,mpn} &= \frac{\bar{k}_5^{mpi}}{\bar{k}_1^{ni}} \\ \varepsilon\alpha_{4,mpn} &= \frac{k_6^{mpi}}{k_1^{ni}} & \varepsilon\beta_{4,mpn} &= \frac{\bar{k}_6^{mpi}}{\bar{k}_1^{ni}} \\ \varepsilon\alpha_{5,mpn} &= \frac{k_7^{mpri}}{k_1^{ni}} & \varepsilon\beta_{5,mpn} &= \frac{\bar{k}_7^{mpri}}{\bar{k}_1^{ni}} \end{aligned}$$

将上述系数代入方程组 (6) 中, 考虑索受到外激励作用情形, 在方程 (6a) 等号右边添加强迫激励项, 同时考虑外激励与  $\varepsilon$  同阶, 索梁耦合振动方程组 (6) 变为如下形式:

$$\begin{aligned} \ddot{V}_n + 2\varepsilon\mu_{c,n} \dot{V}_n + \omega_{c,n}^2 V_n + \sum_{m=1, m \neq n}^{\infty} \varepsilon\alpha_{1,mn} V_m + \\ \sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon\alpha_{2,mn} \bar{V}_m + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} \varepsilon\alpha_{3,mpn} V_m \bar{V}_p + \\ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} \varepsilon\alpha_{4,mpn} V_m V_p + \\ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{r=1}^{\infty} \varepsilon\alpha_{5,mpn} V_m V_p V_r = \varepsilon f_n \cos(\Omega_n t) \end{aligned} \quad (7a)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\bar{V}}_n + 2\varepsilon\mu_{b,n} \dot{\bar{V}}_n + \omega_{b,n}^2 \bar{V}_n + \sum_{m=1, m \neq n}^{\infty} \varepsilon\beta_{1,mn} \bar{V}_m + \\ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} \varepsilon\beta_{3,mpn} V_m \bar{V}_p + \\ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} \varepsilon\beta_{4,mpn} \bar{V}_m \bar{V}_p + \\ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{r=1}^{\infty} \varepsilon\beta_{5,mpn} \bar{V}_m \bar{V}_p \bar{V}_r = 0 \end{aligned} \quad (7b)$$

### 2.2 多尺度法求解

利用多尺度法<sup>[17]</sup>对方程组 (7) 进行摄动分析, 可以得到索梁结构复数形式的近似线性常微分方程组. 为了定量描述  $\Omega_n$  与  $\omega_{c,n}$  的接近程度以及  $\omega_{c,n}$  与  $\omega_{b,n}$  的接近程度, 引入参数  $\sigma_1$  和  $\sigma_2$ , 定义  $\Omega_n =$

$\omega_{c,n} + \varepsilon \sigma_1 \cdot \omega_{c,n} = \omega_{b,n} + \varepsilon \sigma_2$ , 代入近似线性微分方程组中, 消除久期项, 即可获得索主共振情形下索梁内共振的可解性条件, 将极坐标形式的复函数  $A_j = \frac{1}{2} a_j(T_1) \exp[i\theta_j(T_1)]$ 、 $B_k = \frac{1}{2} b_k(T_1) \exp[i\bar{\theta}_k(T_1)]$  代入可解性条件中, 分离实部和虚部, 得到索梁振动的一组四维关于  $a_j$ 、 $b_k$ 、 $\theta_j$ 、 $\bar{\theta}_k$  的常微分方程。

$$\omega_{c,j}(a'_j + \mu_{c,j} a_j) + \frac{1}{2} \alpha_{2,kj} b_k \sin \vartheta_1 + \frac{1}{2} f_j \sin \vartheta_2 = 0 \quad (8a)$$

$$\omega_{c,j} \theta'_j a_j - \frac{3}{8} \alpha_{5,\bar{j}jj} a_j^3 - \frac{1}{2} \alpha_{2,kj} b_k \cos \vartheta_1 - \frac{1}{2} f_j \cos \vartheta_2 = 0 \quad (8b)$$

$$\omega_{b,k} b'_k + \omega_{b,k} \mu_{b,k} b_k = 0 \quad (8c)$$

$$\omega_{b,k} \bar{\theta}'_k b_k - \frac{3}{8} \beta_{5,kkkk} b_k^3 = 0 \quad (8d)$$

上式中,  $\vartheta_1 = \bar{\theta}_k - \theta_j - \sigma_1 T_1$ ;  $\vartheta_2 = \sigma_2 T_1 - \theta_j$ 。

从上面方程组可以看出, 方程(8a)、(8b)存在梁的振动项, 而方程(8c)、(8d)中不存在索的振动项, 说明梁的振动是独立的, 索振动对梁振动没有影响; 梁的振动对索的振动有影响。方程(8c)、(8d)可以单独求解, 其解的形式如下:

$$b_k = b_{k0} \exp(-\varepsilon \mu_{b,k} t) \quad (9a)$$

$$\bar{\theta}_k = -\frac{3\beta_{5,kkkk}}{16\mu_{b,k}\omega_{b,k}} b_{k0}^2 \exp(-2\varepsilon \mu_{b,k} t) + \bar{\theta}_{k0} \quad (9b)$$

其中,  $b_{k0}$ 、 $\bar{\theta}_{k0}$  是积分常数。从上面的结果可以看出, 振幅随时间而衰减, 即梁的振动随时间的衰减, 最后趋于静止状态, 但是, 在振动衰减的过程中, 相位和频率都依赖于振幅。综上可得, 梁振动的稳态解  $b_k = 0$ , 将该结果代入斜拉索振动方程(8a)、(8b)中, 并求稳态解, 化简后可以得到:

$$\omega_{c,j} \mu_{c,j} a_j + \frac{1}{2} f_j \sin \vartheta_2 = 0 \quad (10a)$$

$$\omega_{c,j} \sigma_2 a_j - \frac{3}{8} \alpha_{5,\bar{j}jj} a_j^3 - \frac{1}{2} f_j \cos \vartheta_2 = 0 \quad (10b)$$

通过消除上面方程组中的  $\vartheta_2$ , 可以得到该情形下的斜拉索频率响应方程。

$$(\omega_{c,j} \mu_{c,j} a_j)^2 + \left( \omega_{c,j} \sigma_2 a_j - \frac{3}{8} \alpha_{5,\bar{j}jj} a_j^3 \right)^2 = \frac{f_j^2}{4} \quad (11)$$

为判断斜拉索振动的稳定性, 引入  $A_j$  的直角

坐标形式  $A_j = \frac{1}{2} (p_j - iq_j) \exp(i\sigma_2 T_1)$ , 将其代入可解性条件中, 并考虑  $b_k = 0$ , 分离实部和虚部, 即可以得到直角坐标形式的斜拉索运动的平均方程。

$$p'_j = -\sigma_2 q_j - \mu_{c,j} p_j + \frac{3}{8\omega_{c,j}} \alpha_{5,\bar{j}jj} (p_j^2 + q_j^2) q_j \quad (12a)$$

$$q'_j = \sigma_2 p_j - \mu_{c,j} q_j - \frac{3}{8\omega_{c,j}} \alpha_{5,\bar{j}jj} (p_j^2 + q_j^2) p_j - \frac{f_j}{2\omega_{c,j}} \quad (12b)$$

列出平均方程(12)的 Jacobian 矩阵, 从而可以得到斜拉索振动的特征方程, 通过特征值的符号可以判断索运动的稳定性。

$$\begin{bmatrix} -\lambda - \mu_{c,j} + \frac{3}{4\omega_{c,j}} \alpha_{5,\bar{j}jj} p_j q_j & -\sigma_2 + \frac{3}{8\omega_{c,j}} \alpha_{5,\bar{j}jj} (p_j^2 + 3q_j^2) \\ \sigma_2 - \frac{3}{8\omega_{c,j}} \alpha_{5,\bar{j}jj} (3p_j^2 + q_j^2) & -\lambda - \mu_{c,j} - \frac{3}{4\omega_{c,j}} \alpha_{5,\bar{j}jj} q_j p_j \end{bmatrix} = 0 \quad (13)$$

求得上面特征方程的特征值  $\lambda_i (i=1, 2)$  后, 再根据 Lyapunov 稳定理论即可判断斜拉索振动的稳定性。

### 3 算例分析

#### 3.1 索梁结构参数

算例取已建成的某斜拉桥中索梁结构, 斜拉索参数如下: 单位长度质量  $\rho_c A_c = 100.29 \text{ kg/m}$ , 弹性模量  $E_c = 2.1 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$ , 截面面积  $A_c = 0.012 \text{ m}^2$ , 截面惯性矩  $I_c = 1.15 \times 10^{-5} \text{ m}^4$ , 长度  $l_c = 577 \text{ m}$ , 水平倾角  $\theta = 23^\circ$ 。设斜拉索的静变形曲线方程为  $y_0(x) = 4\lambda x(l_c - x)/l_c$ , 垂跨比  $\lambda = d/l_c$ 。其中,  $d$  为斜拉索的理论垂度,  $d = 6.914 \text{ m}$ ,  $H$  为斜拉索的初始弦向张力,  $H = 5471 \text{ kN}$ 。垂度  $d$  与张力  $H$  之间满足静力平衡关系  $d = \rho_c A_c \cos \theta \cdot g l_c^2 / 8H$ 。其中,  $g$  为重力加速度。斜拉索两端铰接, 振型函数为  $\varphi_k(x) = \sin(k\pi x/l_c)$ 。

梁的参数同样取自该桥的梁断面  $\rho_b A_b = 3.58 \times 10^4 \text{ kg/m}$ , 梁横截面面积抗压刚度  $E_b A_b = 9.378 \times 10^{11} \text{ N}$ , 梁横截面面积  $A_b = 4.47 \text{ m}^2$ , 抗弯刚度  $E_b I_b = 1.75 \times 10^{12} \text{ N} \cdot \text{m}^2$ , 抗弯截面惯性矩  $I_b = 8.32 \text{ m}^4$ , 梁长  $l_b = 536 \text{ m}$ ,  $N_0 = 1.0072 \times 10^7 \text{ N}$ 。振动函数为  $\gamma_k(x) = \sin(k\pi x/l_b)$ , 最大悬臂端竖向位移  $\Delta = 0.2 \text{ m}$ 。

#### 3.2 索梁结构中抗弯刚度索面内基频及参数分析

图3给出了索梁结构中斜拉索和两端铰支斜拉索面内基频的关系图, 如图所示, 随着索长的增

加,两种斜拉索的面内基频都逐渐减小,在索长约小于 220m 范围内,面内基频快速减小.索长从 100m 增加至 600m,索梁结构中斜拉索面内基频比两端铰支斜拉索的面内基频增大大约 5.2%~8.9%.

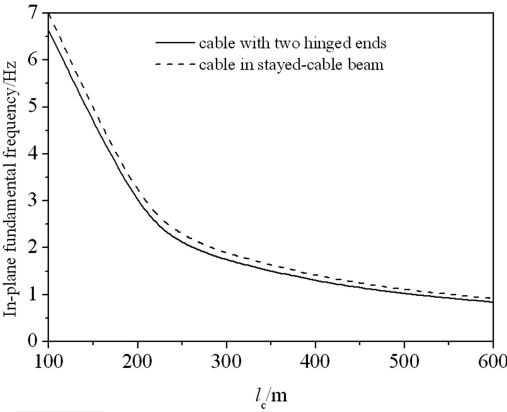


图3 索梁结构中斜拉索与两端铰支斜拉索面内基频的对比  
Fig.3 Comparison of in-plane fundamental frequency of hinged cable and the cable in the cable-stayed beam

下面分析索长  $l_c$ 、初张力  $H$  及抗拉刚度  $E_c A_c$  对含抗弯刚度索面内基频的影响,并与不考虑抗弯刚度索面内基频进行对比.

图4描绘了索长对含抗弯刚度斜拉索面内基频的影响关系.该图显示,索面内基频随索长的增大而减小,索长增加了索的柔性,降低索的基频,索长从 100m 增大至 600m,考虑抗弯刚度影响后,索面内基频绝对增量从 1.672Hz 变化至 0.009Hz,基频值相对增加百分比从 33.6%变化至 1.1%,索长大约为 280m 以上,基频值相对增加百分比降低至 5%以下,索长对面内基频影响较大.

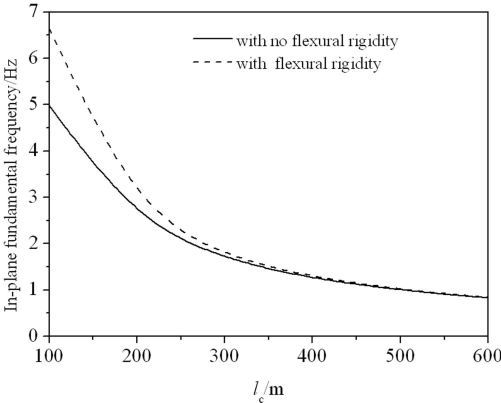


图4 索长对含抗弯刚度斜拉索面内基频的影响  
Fig.4 Effect of cable length on in-plane fundamental frequency of the stay cable with flexural stiffness

基频的影响.从图中可以看出,索面内基频随初张力的增大而增大,抗弯刚度能够提高索面内基频,初张力从 0 增大至 5000kN,考虑抗弯刚度后,索面内基频绝对增量从 0.013Hz 变化至 0.006Hz,基频值相对增加百分比从 1.94%变化至 0.45%.

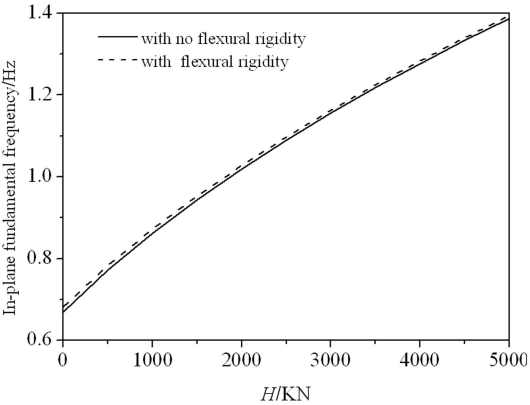


图5 初张力对含抗弯刚度斜拉索面内基频的影响  
Fig.5 Effect of initial tension on in-plane fundamental frequency of the stay cable with flexural stiffness

抗拉刚度对含抗弯刚度斜拉索面内基频的影响如图6所示.图6表明,索面内基频随抗拉刚度的增大而增大,抗弯刚度能够提高索面内基频,索的初张力从  $1 \times 10^9$ N 增大至  $6 \times 10^9$ N,考虑抗弯刚度影响后,索面内基频绝对增量从 0.012Hz 变化至 0.007Hz,基频值相对增加百分比从 1.67%变化至 0.53%.

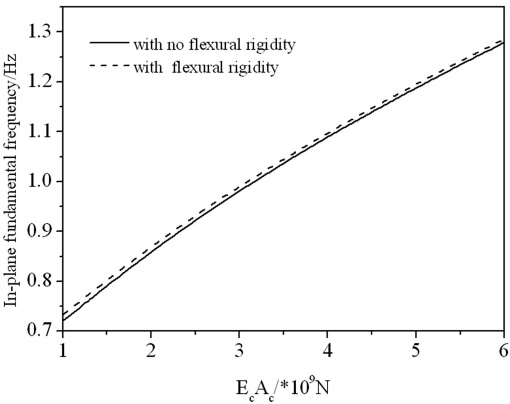


图6 抗拉刚度对含抗弯刚度斜拉索面内基频的影响  
Fig.6 Effect of tensile stiffness on in-plane fundamental frequency of the stay cable with flexural stiffness

3.3 抗弯刚度对系统动力响应的影响

利用 ANSYS 分析软件对索梁组合结构进行特征值分析,得到索梁前 10 阶模态和频率,发现索的第 3 阶频率与梁的第 4 阶频率较为接近.下面以斜

图5给出了初张力对含抗弯刚度斜拉索面内



拉索的面内第 3 阶模态为例,对索梁结构中斜拉索的动力行为进行分析,并研究抗弯刚度的影响.

表 1 索第 3 阶模态时的平均方程各个系数值

Table 1 The coefficients of averaging equation

$\sigma_1$	$\omega_{c,3}$	$\omega_{b,4}$	$\alpha_{5,3333}$	$\beta_{5,4444}$	$\alpha_{2,33}$
0.089	3.962	3.873	0.4224	1.9902	-2.0378

在斜拉索受到外激励荷载作用时,斜拉索的幅频响应曲线、激频响应曲线见图 7 和图 8,通过索梁内共振作用,弹性梁出现的响应非常小,基本可以忽略不计,未考虑抗弯刚度影响的响应在图中用虚线表示.从图中可以看出,抗弯刚度未改变曲线的非线性形态,在幅频响应曲线中,考虑抗弯刚度后的幅频响应曲线整体向左平移,在激频响应曲线中,考虑抗弯刚度后的激频响应曲线整体向右平移,其主要原因是,考虑抗弯刚度后,斜拉索的频率略有增大.

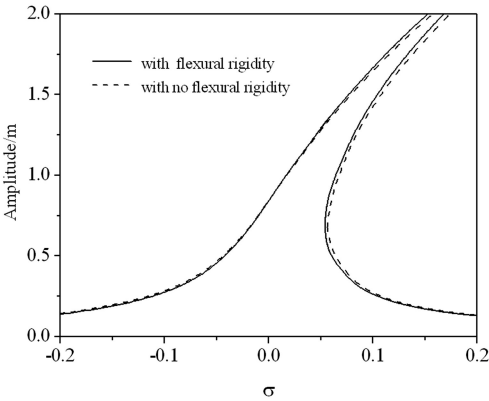


图 7 斜拉索频率响应曲线

Fig.7 Frequency response curve of the cable

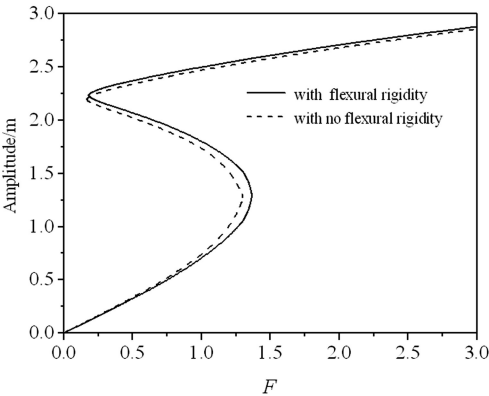


图 8 斜拉索激励响应曲线

Fig.8 Stimulus-response curve of the cable

图 7 中所示曲线的激励荷载  $F_3=218.48\text{kN/m}$ ,

当激励频率  $\Omega_3<4.016$  时,斜拉索呈单值性,幅值随激励频率增大而增大;当激励频率  $\Omega_3\approx 4.016$  时,斜拉索出现鞍结分叉点,从该点产生两条曲线,一条稳定,另一条不稳定;当激励频率  $\Omega_3>4.016$  时,理论上系统出现三个幅值,实际出现的幅值由初始条件确定.

在图 8 的激频响应曲线中,此时外激励频率  $\Omega_3=4.162$ ,当外激励荷载  $F_3<194.01\text{kN/m}$  时,幅值响应为单值;当  $194.01\text{kN/m}\leq F_3\leq 1494.53\text{kN/m}$  时,幅值响应呈多值性;当  $F_3>1494.53\text{kN/m}$  时,幅值响应又回到单值.因此,当激励荷载由小到大逐渐增大或由大到小逐渐减小时,幅值响应存在向上跳跃和向下跳跃的特点,这是非线性响应表现出的特点.

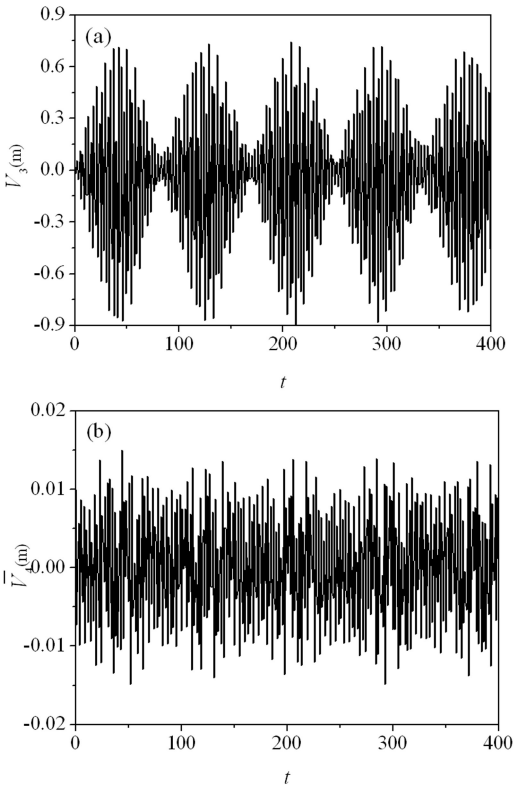


图 9 系统时间历程曲线

(a) 斜拉索; (b) 梁 ( $V_3(0)=0, \bar{V}_4(0)=0.01\text{m}$ )

Fig.9 Time-history curve of the system

(a) cable; (b) beam ( $V_3(0)=0, \bar{V}_4(0)=0.01\text{m}$ )

将索梁的结构及几何参数直接代入索梁组合耦合方程中,斜拉索的初始位移为 0,梁的初始位移为 0.01m,运用四阶 Runge-kutta<sup>[18]</sup>法求解,可以得到索梁的时程曲线,如图 9 所示.图 9 显示了索梁的时间历程曲线,从图中可以看出,原本静止的

斜拉索振动呈现“拍”的特性,梁的振幅基本处于初始位移,斜拉索的振动对梁的振动影响很小,在实际工程中基本可以忽略。

## 4 结论

基于变分原理,建立了含抗弯刚度的索梁组合结构振动偏微分方程组;利用 Galerkin 方法,获得了索梁结构高阶离散模型;运用多尺度摄动法,将非线性微分方程转化为线性微分方程;求解了索发生主共振时系统的动力响应;获得了抗弯刚度斜拉索幅频响应方程;分析了索主要参数对抗弯刚度斜拉索面内基频的影响;探讨了抗弯刚度对斜拉索幅频响应、激频响应的影响。

(1)考虑抗弯刚度后,索长对索面内基频影响较大,对于短索,在进行索梁结构的非线性响应分析时,应考虑索的抗弯刚度,而在分析初张力、抗拉刚度的影响时,工程应用中基本可忽略索抗弯刚度。

(2)考虑抗弯刚度后,斜拉索的幅频响应曲线整体向右平移,激频响应曲线向左移,移动的幅度取决于抗弯刚度的大小,总体影响很小。

(3)在索梁结构中,梁振动将对索振动产生显著影响,索的振动对梁的振动影响较小,在工程应用上,索振动对梁振动的影响基本可忽略。

## 参 考 文 献

- 亢战,钟万勰. 斜拉桥参数共振问题的数值研究. 土木工程学报, 1998, 31(4): 14~22 (Kang Z, Zhong W X. Numerical study on parametric resonance of cable in cable stayed bridge. *China Civil Engineering Journal*, 1998, 31(4): 14~22 (in Chinese))
- 汪至刚,孙炳楠. 斜拉桥参数振动引起的拉索大幅振动. 工程力学, 2001, 18(1): 103~109 (Wang Z G, Sun B N. Cable vibration for cable stayed bridge by parametric response. *Engineering Mechanics*, 2001, 18(1): 103~109 (in Chinese))
- 吴娟,钱有华. 一类弦-梁耦合非线性振动系统的动力学数值模拟研究. 动力学与控制学报, 2018, 16(5): 403~410 (Wu J, Qian Y H. Numerical simulation research on dynamics of a string-beam coupled nonlinear vibration system. *Journal of Dynamics and Control*, 2018, 16(5): 403~410 (in Chinese))

- 赵跃宇,蒋丽忠,王连华等. 索-梁组合结构的动力学建模理论及其内共振分析. 土木工程学报, 2004, 37(3): 69~72 (Zhao Y Y, Jiang L Z, Wang L H et al. The dynamical modeling theory and internal resonance of cable-beam composite structure. *China Civil Engineering Journal*, 2004, 37(3): 69~72 (in Chinese))
- 吕建根,金波,赵跃宇等. 斜拉索拱考虑拱受外激励作用下 1:1 内共振分析. 湖南大学学报(自然科学版), 2009, 32(12): 13~17 (Lv J G, Jin B, Zhao Y Y, et al. On the one-to-one internal resonance of cable-stayed arch under external excitation on arch. *Journal of Hunan University (Natural Sciences)*, 2009, 32(12): 13~17 (in Chinese))
- 周海兵,康厚军,赵跃宇. 索-梁组合结构面内非线性振动试验研究. 中外公路, 2010, 30(2): 105~108 (Zhou H B, Kang H J, Zhao Y Y. The experimental investigation on in-plane nonlinear dynamics of cable-beam structure. *Journal of China & Foreign Highway*, 2010, 30(2): 105~108 (in Chinese))
- 康厚军,赵跃宇,朱志辉等. 强迫激励下 CFRP 斜拉索面内分叉特性. 湖南大学学报(自然科学版), 2014, 41(9): 8~13 (Kang H J, Zhao Y Y, Zhu Z H, et al. In-plane Bifurcation Behavior of Inclined CFRP Cable Subject to External Excitation. *Journal of Hunan University (Natural Sciences)*, 2014, 41(9): 8~13 (in Chinese))
- 刘海波,向建军. 漂浮式斜拉桥全局模态对 CFRP 索的敏感性研究. 动力学与控制学报, 2018, 16(3): 250~257 (Liu H B, Xiang J J. Analysis on sensitivity of global mode of floating cable-stayed bridge to CFRP cable. *Journal of Dynamics and Control*, 2018, 16(3): 250~257 (in Chinese))
- 丛云跃,康厚军,郭铁丁等. CFRP 索斜拉桥面内自由振动的多索梁模型及模态分析. 动力学与控制学报, 2017, 15(6): 494~504 (Cong Y Y, Kang H J, Guo T D, et al. A multiple cable-beam model and modal analysis on in-plane free vibration of cable-stayed bridge with CFRP cables. *Journal of Dynamics and Control*, 2017, 15(6): 494~504 (in Chinese))
- Fujino Y, Warnitchai P, Pacheco B M. An experimental and analytical study of auto parametric resonance in a 3DOF model of cable-stayed-beam. *Nonlinear Dynamics*, 1993, 4: 111~138
- Caetano E, Cunha A, Taylor C A. Investigation of dynamic cable-deck interaction in a physical model of cable-stayed bridge. Part I: model analysis. *Earthquake Engi-*

neering and Structural Dynamics, 2000, 29 ( 4 ) : 481 ~ 498

12 Caetano E, Cunha A, Taylor C A. Investigation of Dynamic Cable-Deck Interaction in a Physical Model of Cable-Stayed Bridge. Part II : seismic response. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 2000, 29 ( 4 ) : 499 ~ 521

13 Gattulli V, Lepidi M. Nonlinear interactions in the planar dynamics of cable-stayed beam. *International Journal of Solids and Structures*, 2003, 40 ( 18 ) : 4729 ~ 4748

14 Zhu J, Ye G R , Xiang Y Q , et al. Dynamic behavior of cable-stayed beam with localized damage. *Journal of Vibration and Control*, 2011, 17 ( 7 ) : 1080 ~ 1089

15 赵跃宇,周海兵,金波等. 弯曲刚度对斜拉索非线性固有频率的影响. *工程力学*, 2008, 25 ( 1 ) : 196 ~ 202 ( Zhao Y Y, Zhou H B, Jin B, et al. Influence of bending rigidity on nonlinear natural frequency of inclined cable. *Engineering Mechanics*, 2008, 25 ( 1 ) : 196 ~ 202 ( in Chinese ) )

16 Vincenzo G, Massimiliano M, Achille P. A parametric analytical model for non-linear dynamics in cable-stayed beam. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 2002, 31 ( 6 ) : 1281 ~ 1300

17 Nayfeh A H. Perturbation Methods. New York: Wiley-Interscience, 1981

18 Irvine H M. Cable structure. Combridge: MIT Press, 1981

NONLINEAR RESPONSE OF STAY CABLES WITH

FLEXURAL RIGIDITY IN CABLE-STAYED BEAMS \*

Lv Jiange<sup>1†</sup> Wang Ronghui<sup>2</sup>

(1.College of Urban and Rural Construction, Zhongkai University of Agriculture and Engineering, Guangdong 510225, China)  
(2.School of Civil Engineering and Transportation, South China University of Technology, Guangdong 510641, China)

**Abstract** Considering the flexural rigidity, sagging and geometric nonlinearity, the nonlinear responses of stay cables in cable-stayed beams were investigated. The nonlinear dynamical equations of the cable-stayed beam were formulated by Hamiltonian principle. Then, these equations were discretized by the Galerkin method, and the responses of the cable in the cable-stayed beam were obtained using the Multiple Scales method. The influence of main parameters on the fundamental frequency of the cable in plane was analyzed. The effects of flexural rigidity on both the frequency response and amplitude response were examined. The time history responses of the cable-stayed beam were also obtained by numerical simulations. It was shown that the cable length has a great effect on the fundamental frequency of the cable, and for a short cable, the flexural rigidity should be taken into account. The frequency response curve moves to the right, but the amplitude response curve moves to the left, when the flexural rigidity is considered. The amount of movement depends on the magnitude of flexural rigidity. The vibration of the beam has a significant impact on that of the cable, while the vibration of the cable has little effect on that of the beam.

**Key words** cable-stayed bridge, cable-stayed beam, flexural rigidity, nonlinear response

Received 31 December 2018, revised 15 January 2019.  
\* The project supported by the National Natural Science Foundation of China(51378220).  
† Corresponding author E-mail: lvjiange77@163.com



附录:

方程组(6)中各系数如下:

$$k_1^{ni} = - \int_0^{l_c} \rho_c A_c \psi_n(x) \psi_i(x) dx$$

$$k_2^{ni} = - \int_0^{l_c} c_c \psi_n(x) \psi_i(x) dx$$

$$k_3^{mi} = \int_0^{l_c} \left\{ \begin{aligned} &H \psi_m''(x) + \\ &E_c A_c y_0'' \frac{\psi_m(l_c) \cos \theta}{l_c \sin \theta} + \\ &E_c A_c y_0'' \frac{1}{l_c} \int_0^{l_c} y_0' \psi_m'(x) dx - \\ &E_c I_c \psi_m''''(x) \end{aligned} \right\} \psi_i(x) dx$$

$$k_4^{mi} = - \int_0^{l_c} E_c A_c y_0'' \frac{\xi_m(l_b)}{l_c \sin \theta} \psi_i(x) dx$$

$$k_5^{mpi} = - \int_0^{l_c} E_c A_c \psi_m''(x) \frac{\xi_p(l_b)}{l_c \sin \theta} \psi_i(x) dx$$

$$k_6^{mpi} = \int_0^{l_c} E_c A_c \left\{ \begin{aligned} &y_0'' \frac{1}{2l_c} \int_0^{l_c} \psi_m'(x) \psi_p'(x) dx + \\ &\psi_m''(x) \frac{\psi_p(l_c) \cos \theta}{l_c \sin \theta} - \\ &\psi_m''(x) \frac{1}{l_c} \int_0^{l_c} y_0' \psi_p'(x) dx \end{aligned} \right\} \psi_i(x) dx$$

$$k_7^{mpri} = \int_0^{l_c} \left\{ \begin{aligned} &E_c A_c \psi_m''(x) \times \\ &\frac{1}{2l_c} \int_0^{l_c} \psi_p'(x) \psi_r'(x) dx \end{aligned} \right\} \psi_i(x) dx$$

$$\bar{k}_1^{ni} = - \int_0^{l_b} \rho_b A_b \xi_n(\bar{x}) \xi_i(\bar{x}) d\bar{x}$$

$$\bar{k}_2^{ni} = - \int_0^{l_b} c_b \xi_n(\bar{x}) \xi_i(\bar{x}) d\bar{x}$$

$$\bar{k}_3^{mi} = \int_0^{l_b} [N_0 \xi_m''(\bar{x}) - E_b I_b \xi_m''''(\bar{x})] \xi_i(\bar{x}) d\bar{x}$$

$$\bar{k}_5^{mpi} = - (N_0 - E_b A_b) \int_0^{l_b} \xi_m''(\bar{x}) \frac{\psi_p(l_c)}{l_b \sin \theta} \xi_i(\bar{x}) d\bar{x}$$

$$\bar{k}_6^{mpi} = (N_0 - E_b A_b) \int_0^{l_b} \xi_m''(\bar{x}) \frac{\xi_p(l_b) \cos \theta}{l_b \sin \theta} \xi_i(\bar{x}) d\bar{x}$$

$$\bar{k}_7^{mpri} = - (N_0 - E_b A_b) \times \int_0^{l_b} \xi_m''(\bar{x}) \frac{1}{2l_b} \int_0^{l_b} \xi_p'(\bar{x}) \xi_r'(\bar{x}) d\bar{x} \xi_i(\bar{x}) d\bar{x}$$