

WBK 方程稳态解的保结构分析*

韩磊¹ 胡伟鹏^{2†}

(1.咸阳市水利水电规划勘测设计研究院, 咸阳 712000) (2.西安理工大学 土木建筑工程学院, 西安 710048)

摘要 水动力学系统稳定状态下的总能量与系统初始能量之差直观反映了水力系统的水头损失.本文基于保结构思想,以色散浅水波 WBK 模型为例,推导了其对称形式及空间辛结构等守恒性质.随后,采用 Euler Box 差分离散方法构造对称形式的保结构差分格式,并推导其离散空间辛结构,为数值格式保结构性能检验提供理论依据.最后,通过数值实验,考察数值格式的保结构性能,并将数值格式用于研究不同相对扩散系数条件下, WBK 方程保结构稳态水质点系统的总能量,为水力系统水头损失的分析提供参考.

关键词 WBK 方程, 保结构, 稳态解, 动量通量, 辛结构

DOI: 10.6052/1672-6553-2019-026

引言

水波传播特性一直是水利工程和水力学研究的关键问题之一.特别是在中小型水利工程中,水深与波长比值较小时(通常认为水深与波长比值小于 0.5),水底边界对水质点运动的影响不可忽略,此时水波传播过程中形成的波浪被命名为“浅水波”.

在总结已有浅水波研究成果基础上,Whitham、Broer、Kaup 分别采用不同的数学工具,在 Boussinesq 近似下,得到了下述著名的 WBK (Whitham-Broer-Kaup) 方程^[1-3]用于描述浅水波传播过程:

$$\begin{aligned} \partial_t u + u \partial_x u + \partial_x h + \beta \partial_{xx} u &= 0 \\ \partial_t h + \partial_x (hu) + \alpha \partial_{xxx} u - \beta \partial_{xx} h &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

其中: $u = u(x, t)$ 为水平速度场, $h = h(x, t)$ 为离开流体平衡位置的高度, α, β 为扩散系数.

WBK 方程在描述浅水波色散过程方面具有不可替代的作用,因此,关于 WBK 方程的研究一直是非线性发展方程研究的热点:借鉴双曲函数法、吴文俊法等数学工具,张鸿庆教授等得到了 WBK 方程的多种显式精确行波解^[4,5];郭士民博士等发展了针对非线性发展方程的扩展(G'/G)展开法,并用于寻求 WBK 类方程的精确解^[6];邓子辰教授等采用齐次平衡法获得了 Boussinesq-Whitham-Broer-

Kaup 型方程的精确解,并采用多辛方法对解的正确性进行了验证^[7];最近,高犇博士详细研究了 Boussinesq-Whitham-Broer-Kaup 方程的对称性^[8],为 WBK 方程的保结构分析提供了理论依据.

作为典型的非线性发展方程, WBK 方程的局部非线性性质一直是学术界关注的焦点.保结构方法,特别是近年来发展起来的多辛方法^[9]和广义多辛方法^[10,11],均将无限维动力学系统局部几何性质的探索作为算法构造的重要目标,取得了一系列重要的研究成果^[12-15].(广义)多辛方法能够完美再现系统局部几何性质的原因在于:其算法构造过程中,较为精确地保持了无限维系统固有的(广义)时空联合辛结构.

水利工程中,系统的暂态响应并不是研究者关注的焦点,稳态响应往往更能够反映系统的工作效率,因此,本文不再关注 WBK 方程随时间演化情况,而是在算法构造过程中通过保持空间辛结构,重点研究 WBK 方程系统进入稳态后的能量在空间的分布情况.

1 稳态 WBK 系统的对称形式及其守恒律

已有研究表明,同大多数守恒型发展方程一样,通过引入正交变量: $\partial_t u = -2\partial_x p, \partial_t h = -2\partial_x q, \partial_x u = v, u = \partial_x \varphi, h = \partial_x \psi$, 并定义状态向量: $z = [\phi, \varphi, h, u, v, p, q]^T$,

2018-07-16 收到第 1 稿,2018-09-07 收到修改稿.

* 国家自然科学基金资助项目(11672241)和大连理工大学工业装备结构分析国家重点实验室开放基金资助项目(GZ1605)

† 通讯作者 E-mail: wphu@nwpu.edu.cn

WBK 方程(1)可以写成如下多辛对称形式^[7]:

$$\mathbf{M}\partial_t \mathbf{z} + \mathbf{K}\partial_x \mathbf{z} = \nabla_z S(\mathbf{z}) \quad (2)$$

其中, $S = -\frac{1}{2}u^2h - \frac{1}{2}h^2 + ph + qu - \frac{1}{2}\alpha v^2$ 为光滑的哈密顿函数; $\mathbf{M}, \mathbf{K} \in \mathbf{R}^{7 \times 7}$ 为反对称矩阵:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \beta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta & 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

当系统进入稳态后,即:

$$\partial_t u = \partial_t h = 0 \quad (3)$$

则前述多辛形式中 $\partial_t \mathbf{z} = 0$, 多辛形式(2)退化为:

$$\mathbf{K}\partial_x \mathbf{z} = \nabla_z S(\mathbf{z}) \quad (4)$$

此时,多辛对称形式(2)中时间相关的辛结构^[16]自然满足,空间相关的辛结构成为衡量稳态数值算法保结构性能的标准.空间相关的辛结构为:

$$\partial_x(\mathbf{dz} \wedge \mathbf{Kdz}) = 0 \quad (5)$$

其中, \wedge 为外积运算符^[9].

当系统进入稳态后,系统局部能量和局部动量在空间不再流动,即能量通量和动量通量的空间导数为零(也可以以能量密度梯度为零来描述,从数学上讲,这两种描述方式是等价的):

$$\begin{aligned} \partial_x f &= 0, \\ \partial_x g &= 0 \end{aligned} \quad (6)$$

其中:

$$f = \frac{1}{2} \mathbf{z}^T \mathbf{K} \partial_x \mathbf{z},$$

$$g = S(\mathbf{z}) - \frac{1}{2} \mathbf{z}^T \mathbf{M} \partial_t \mathbf{z}.$$

展开式(6),得到能量通量和动量通量为零的具体数学表达式为:

$$\begin{cases} \partial_x [p\partial_t \phi + q\partial_t \varphi - \phi\partial_t p - \varphi\partial_t q - \beta u\partial_t h + (\beta h - \alpha v)\partial_t u + \alpha u\partial_t v] = 0 \\ \partial_x [ph + qu - \frac{1}{2}(u^2 h + h^2 + \alpha v^2) - \frac{1}{4}(u\partial_t \phi + h\partial_t \varphi - \phi\partial_t u - \varphi\partial_t h)] = 0 \end{cases} \quad (7)$$

当系统进入稳态后,状态变量各分量对时间的偏导数均为零,则式(7)中的第一个表达式自然满足,第二个表达式(动量通量相关的表达式)可以简化为:

$$\Delta_m = \partial_x [ph + qu - \frac{1}{2}(u^2 h + h^2 + \alpha v^2)] = 0 \quad (8)$$

式(8)是判断系统(1)进入稳定状态的关键判据,因此,在后续数值分析过程中,我们将关注能量通量和动量通量的空间分布情况.

2 稳态 WBK 系统的 Euler Box 离散

Euler Box 离散方法是构造发展方程多辛差分格式最简单的离散方法,其计算效率已经得到了验证^[9].针对稳态系统(4),采用 Euler Box 离散方法进行离散:

$$\mathbf{K}_+ \delta_x^+ z_j + \mathbf{K}_- \delta_x^- z_j = \nabla S(z_j) \quad (9)$$

其中: $\delta_x^+ z = (z_{i+1} - z_i) / \Delta x$, $\delta_x^- z = (z_i - z_{i+1}) / \Delta x$ 分别是一阶前向差分和一阶后向差分,将 \mathbf{K} 分解得到的系数矩阵满足对称关系 $\mathbf{K}_+^T = -\mathbf{K}_-$,依据此关系,得到式(9)系数矩阵分别为:

$$\mathbf{K}_+ = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{K}_- = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \beta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

当然,这种分解并不唯一,这就决定了 Euler Box 格式的构造方式不唯一,但是,不同的 Euler

Box 格式,其保结构性能是相同的.考虑式(4)的离散变分形式:

$$\mathbf{K}_+ \delta_x^+ dz_j + \mathbf{K}_- \delta_x^- dz_j = \nabla_{zz} S(z_j) dz_j \quad (10)$$

对上式与 dz_j 做外积,注意到 $\nabla_{zz} S(z_j)$ 为对称矩阵,则外积运算等式右端为:

$$dz_j \wedge \nabla_{zz} S(z_j) dz_j = 0 \quad (11)$$

外积运算等式左端计算过程如下:

$$\begin{aligned} & dz_j \wedge \mathbf{K}_+ \delta_x^+ dz_j + dz_j \wedge \mathbf{K}_- \delta_x^- dz_j \\ &= dz_j \wedge \mathbf{K}_+ \delta_x^+ dz_j + \delta_x^- dz_j \wedge \mathbf{K}_- dz_j \\ &= \delta_x^+ (dz_{j-1} \wedge \mathbf{K}_+ dz_j) \end{aligned} \quad (12)$$

即:稳态系统(4)的 Euler Box 格式(9)精确保持如下的离散空间辛结构:

$$\Delta_j = \delta_x^+ (dz_{j-1} \wedge \mathbf{K}_+ dz_j) = 0 \quad (13)$$

类似的,可以得到动量通量残差的离散表达式 Δ_{mj} .

3 数值实验

本部分将设计相关的数值实验验证构造的差分格式是否能够保持动量通量守恒律,如果格式(9)能够较为精确地保持相应的守恒律(即:空间方向的辛结构残差和动量通量在求解域上的残差均很小),则将进一步采用格式(9)研究稳态解的一些典型性质.

取扩散系数 $\alpha = \beta = 1$, 模拟步长 $\Delta x = 0.05$, 在 $[-10, 10]$ 范围内模拟 WBK 方程系统的稳态解, 边值取为周期性边界:

$$u|_{x=\pm 10} = 1, h|_{x=\pm 10} = -1 \quad (14)$$

为了验证算法的保结构性能,在数值实验过程中记录每一步的 Δ_j 和 Δ_{mj} 值,得到 Δ_j 和 Δ_{mj} 的空间分布情况分别如图 1 和图 2 所示.

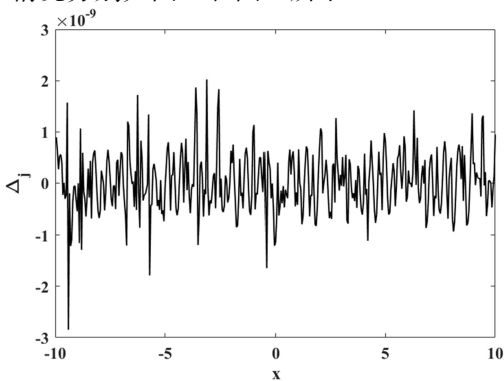


图 1 稳态解空间离散辛结构保持情况

Fig.1 Error of spatial discrete symplectic structure for steady-state solution

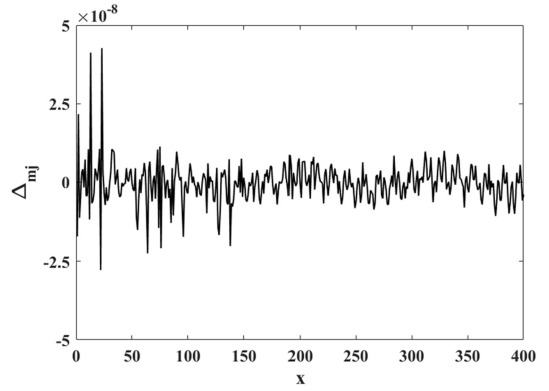


图 2 稳态解动量通量保持情况

Fig.2 Error of momentum flux for steady-state solution

由图 1 和图 2 可以看出:在整个模拟区域内,稳态解的空间离散辛结构和动量通量在每一空间网格处的残差均极小,这充分说明本文构造的 Euler Box 格式能够很好地保持稳态解的空间辛结构和动量通量守恒律,即:经过充分长的时间演化之后,系统的解到达稳态之后,系统动量在空间上分布也达到稳态,系统质点间不再出现动量交换和传递,系统能量分布趋近稳态,这与稳态解的物理力学性质一致.

相同初值条件下,对于浅水波传播问题,不同的扩散系数将导致稳态条件下水质点系统的能量分布规律各异,系统达到稳态后水质点系统总能量将有所差别.系统稳态总能量从一定程度上反映水质点系统经过暂态后的能量损失问题,因此,后续的数值实验将研究不同扩散系数条件下的稳态水质点总能量.

为了研究不同扩散系数条件下的稳态水质点总能量,定义相对扩散系数 $\xi = \alpha/\beta$.在数值实验中,取固定的扩散系数 $\beta = 1$,改变扩散系数 α 以到达改变相对扩散系数 ξ 的目的.系统水质点总能量以离散哈密顿函数 $S(z_j)$ 的数值积分值 S 表征(数值积分采用牛顿-柯特斯求积方法实现).图 3 展示了不同相对扩散系数条件($\xi \in (0, 10)$)下,稳态系统水质点的总能量变化情况.

从图 3 可以看出,不同相对扩散系数条件下,系统稳态总能量有显著差别.系统稳态总能量变化过程中,当相对扩散系数大约为 3.7 时,系统稳态总能量最大,这表明在此条件下,系统经过稳态演化过程中,系统能量损耗最小,即流体水头损失最小.

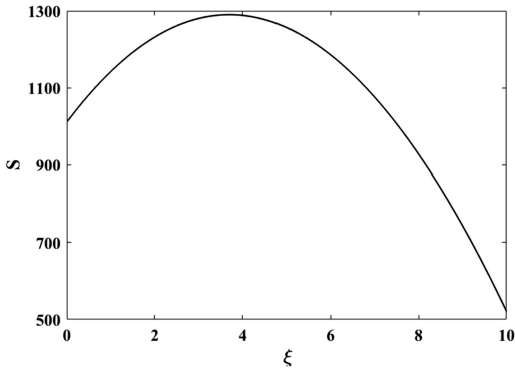


图3 不同相对扩散系数条件下的系统稳态总能量

Fig.3 Total system energy with different relative diffusion coefficients

4 结论

水头损失的数值计算一直是水动力学领域研究的难点.采用广义多辛分析方法分离系统暂态过程中的能量损失,进一步研究水头损失,虽然能够较为精确地提取系统的耗散效应,但是计算量较大.实际上,当水质点系统进入稳定状态之后,系统总能量是一个守恒量,若采用数值手段得到了系统稳定状态的总能量,就可以得到系统的能量损失,从而得到确定水利工程条件下的水头损失,因此,水动力学的稳定状态研究对水利工程设计具有重要的参考价值.

本文针对描述色散浅水波传播过程的WBK方程,基于保结构思想,推导了其稳定状态下的对称形式及其相应的局部守恒律.采用 Euler Box 离散方法,构造了对称形式的保结构差分格式,并推导了该保结构格式满足的离散空间辛结构,为后续算法保结构性能检验提供理论依据.在数值实验中,一方面,通过记录数值格式的离散空间辛结构和能量通量残差,验证 Euler Box 格式的保结构性能;另一方面,基于格式具有的保结构性能,详细研究了不同相对扩散系数条件下,系统稳定状态时的系统总能量变化情况.研究表明,当相对扩散系数近似为 3.7 时,系统稳定状态总能量最大,这意味着这种情形下系统暂态过程中的水头损失最小.本文提出的采用保结构方法研究 WBK 方程系统的稳定状态,为浅水波相关研究和中小型水利工程设计提供参考.

参 考 文 献

- Whitham G B. Variational methods and applications to water waves. *Proceedings of the Royal Society of London Series A-Mathematical and Physical Sciences*, 1967, 299 (1456): 6~25
- Broer L J F. Approximate equations for long water waves. *Applied Scientific Research*, 1975, 31(5): 377~395
- Kaup D J. A higher-order water-wave equation and the method for solving it. *Progress of Theoretical Physics*, 1975, 54(2): 396~408
- Xie F D, Yan Z Y, Zhang H Q. Explicit and exact traveling wave solutions of Whitham-Broer-Kaup shallow water equations. *Physics Letters A*, 2001, 285(1-2): 76~80
- Yan Z Y, Zhang H Q. New explicit solitary wave solutions and periodic wave solutions for Whitham-Broer-Kaup equation in shallow water. *Physics Letters A*, 2001, 285(5-6): 355~362
- Guo S M, Zhou Y B. The extended (G'/G)-expansion method and its applications to the Whitham-Broer-Kaup-Like equations and coupled Hirota-Satsuma KdV equations. *Applied Mathematics and Computation*, 2010, 215(9): 3214~3221
- Yang X F, Deng Z C, Li Q J, et al. Exact combined traveling wave solutions and multi-symplectic structure of the variant Boussinesq-Whitham-Broer-Kaup type equations. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2016, 36: 1~13
- Gao B. Symmetry analysis and explicit power series solutions of the Boussinesq-Whitham-Broer-Kaup equation. *Waves in Random and Complex Media*, 2017, 27(4): 700~710
- Bridges T J. Multi-symplectic structures and wave propagation. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 1997, 121(1): 147~190
- Hu W P, Deng Z C, Han S M, et al. Generalized multi-symplectic integrators for a class of Hamiltonian nonlinear wave PDEs. *Journal of Computational Physics*, 2013, 235: 394~406
- 胡伟鹏, 邓子辰. 无限维动力学系统的保结构分析方法. 西安: 西北工业大学出版社, 2015 (Hu W P, Deng Z C. Structure-preserving method for infinite dimensional dynamic system. Xi'an: Northwestern Polytechnical University Press, 2015 (in Chinese))
- Hu W P, Song M Z, Deng Z C. Energy dissipation/transfer and stable attitude of spatial on-orbit tethered system. *Journal of Sound and Vibration*, 2018, 412: 58~73
- Hu W P, Deng Z C, Yin T T. Almost structure-preserving

- analysis for weakly linear damping nonlinear Schrödinger equation with periodic perturbation. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2017, 42: 298~312
- 14 Hu W P, Deng Z C, Wang B, et al. Chaos in an embedded single-walled carbon nanotube. *Nonlinear Dynamics*, 2013, 72(1-2): 389~398
- 15 胡伟鹏, 邓子辰. 大阻尼杆振动的广义多辛算法. 动力学与控制学报, 2013, 11(1): 1~4 (Hu W P, Deng Z C. Generalized multi-symplectic method for vibration of big damping bar. *Journal of Dynamics and Control*, 2013, 11(1): 1~4 (in Chinese))
- 16 魏乙, 邓子辰, 李庆军等. 空间太阳能电站的轨道、姿态和结构振动的耦合动力学建模及辛求解. 动力学与控制学报, 2016, 14(6): 513~519 (Wei Y, Deng Z C, Li Q J, et al. Coupling dynamic modeling among orbital motion, attitude motion and structural vibration and symplectic solution of SPS. *Journal of Dynamics and Control*, 2016, 14(6): 513~519 (in Chinese))

STRUCTURE-PRESERVING ANALYSIS FOR STEADY-STATE SOLUTION OF WBK EQUATION *

Han Lei¹ Hu Weipeng^{2†}

(1. Xianyang Research Institute Water Conservancy and Hydropower Planning and Design, Xianyang 712000, China)

(2. School of Civil Engineering and Architecture, Xi'an University of Technology, Xi'an 710048, China)

Abstract The difference between the initial energy and the ending energy of the hydrodynamics system reflects the head loss of the hydraulic system directly. Based on the structure-preserving idea, the symmetric form with the spatial symplectic structure, the energy flux conservation law and the momentum flux conservation law were deduced firstly. And then, the Euler Box scheme as well as its discrete spatial symplectic structure for the symmetric form were constructed to simulated the steady-state solution of the WBK equation. In the numerical experiments, the structure-preserving properties of the Euler Box scheme were verified. In addition, the total energies for the WBK system in the steady state with different relative diffusion coefficients were studied in detail, which will provide a reference for calculating the head loss in a hydraulic system.

Key words WBK equation, structure-preserving, steady-state solution, momentum flux, multi-symplectic method

Received 16 July 2018, revised 7 September 2018.

* The project supported by the National Natural Science Foundation of China (11672241) and the Open Foundation of the State Key Laboratory of Structural Analysis of Industrial Equipment (GZ1605).

† Corresponding author E-mail: wphu@nwpu.edu.cn