

陀螺-质量声子晶体结构力学研究*

邸士杰^{1,2} 杨晓东^{1,2†} 张伟^{1,2}

(1.北京工业大学 机电学院,北京 100124) (2.机械结构非线性振动与强度北京市重点实验室,北京 100124)

摘要 声子晶体是由不同材料组成的周期性结构.其显著特点是弹性波在传播时,受其内部结构的作用,在一定频率范围(带隙)内会抑制弹性波的传播,而在其他频率范围(通带)可以无损耗地传播.本文提出并设计一种新型的陀螺-质量声子晶体结构,研究并且分析了不同参数对于陀螺-质量声子晶体结构振动通带的影响,并通过有限次结构数值计算进行验证.

关键词 声子晶体, 陀螺结构, 参数影响

DOI: 10.6052/1672-6553-2019-022

引言

振动存在于各个领域之中,我们可以利用合理的振动来为我们服务,例如:通信、广播、电视、雷达等.但是过于剧烈的振动会损坏机器的内部结构,使之寿命减少,甚至无法正常工作.因此关于振动传播的抑制也变得尤为重要.类比于光子晶体,通过研究发现:弹性波在周期性介质中的传播会产生弹性波带隙,在带隙范围内会抑制波的传播,从而达到减振的效果.

1992年, Sigalas 理论证明了弹性波在周期性复合介质中传播会产生类似的弹性波带隙^[1], 1993年, Kushwaha 等首次明确提出了声子晶体的概念^[2], 并且得到了镍铝二维声子晶体的弹性波带隙. 1995年, Martinezsala 等人通过对西班牙马德里一座由不锈钢管按照二维正方晶格排列的雕塑进行声学实验^[3], 首次从实验证明了声波带隙的存在.

1998年, Montero 等人首次发现了具有完全弹性波带隙的声子晶体, 该声子晶体由铝合金和水银组成^[4]. 在此之前关于声子晶体的研究均遵守 Bragg 散射机理, 即带隙的频率对应的波长与晶格尺寸在一个数量级. 2000年, 刘正猷研究橡胶、铅和环氧树脂构成的三维三元声子晶体, 通过引入共振单元将其带隙频率降低两个数量级^[5]. 发现了另

一种弹性波带隙的局部共振机理. 这为声子晶体低频带隙特性的研究开辟了新的道路.

2003年, Jensen 研究了周期荷载作用下对于有限周期的弹簧质量块的一维结构和二维结构的振动响应^[6], 得出带隙对于粘性阻尼的影响不大, 甚至二维结构对于粘性阻尼的影响几乎消失, 但是对于强阻尼影响较大. 2004年, Ting, Wang 等考虑了欧拉-伯努利梁, 在其一侧加入局部的谐振器, 形成四连杆机构^[7]. 利用哈密顿原理推导方程, 进行理论分析和数值模拟, 发现会生成两个带隙. 2009年, Huang 等研究了一维周期弹簧质量块系统, 在质量块内部, 再加入一组弹簧质量块, 发现在有效单元附近出现负频率^[8]. 2011年, 陈等研究的模型为一根带有夹层的铁木辛柯梁, 一种为梁的内部摆放周期性谐振器, 一种为梁的内部摆放等效局部谐振器^[9]. 调整谐振器的频率可以改变带隙的位置. 2016年, Deymier 等研究了一维双耦合谐波周期晶体的系统, 原子间为弹簧连接^[10]. 2005年, 温激鸿对振动带隙的减振特性进行了研究^[11]. 2006年, 郁殿龙等研究了关于梁板类周期结构振动带隙特性研究^[12]. 2015年, 张研对声子晶体的计算方法进行了研究^[13].

国内对于声子晶体的研究主要是在模型和方法上的创新. 本文讨论了一个新模型, 是以弹簧陀螺-质量块结构为基础的离散声子晶体结构. 由于

2018-01-30 收到第 1 稿, 2018-07-03 收到修改稿.

* 国家自然科学基金面上项目(11672007)

† 通讯作者 E-mail: dixiao914@126.com

陀螺块的引入,使得物块在两个方向上产生了耦合运动.探讨了陀螺块的各个参数对于陀螺-质量声子晶体结构通带的影响,并且对通带进行了全通带和半通带的分类.

1 陀螺-质量声子晶体模型

陀螺-质量声子晶体结构模型是由陀螺物块和质量块的原子所构成的无限长链,相邻两个物块之间通过扭转弹簧的方式连接.本文只考虑物块的角度变化,故扭转弹簧只提供扭转作用力,忽略其拉伸作用力.如图1所示.质量块与陀螺块是用陀螺仪支架固定.陀螺仪支架有外环(黄色),次环(棕色)和内环(绿色)组成,限定物块位移变化.紫色方块为质量物块,紫色圆盘为陀螺物块,红色箭头指示陀螺物块旋转方向,银色为弹簧,只提供扭转力矩.

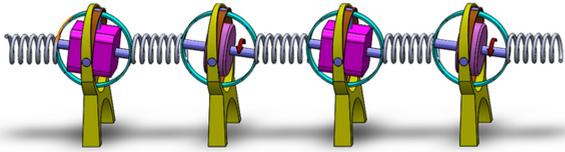


图1 陀螺-质量声子晶体结构图

Fig.1 Gyro-mass phononic crystals structure

根据动量矩定理,在无外力时,得到 n 组陀螺质量块的运动方程:

n 组中的质量物块:

$$\begin{cases} I_m \dot{\gamma}_{2n-1} = k_T (\gamma_{2n} - 2\gamma_{2n-1} + \gamma_{2n-2}) \\ I_m \dot{\eta}_{2n-1} = k_T (\eta_{2n} - 2\eta_{2n-1} + \eta_{2n-2}) \end{cases} \quad (1)$$

n 组中的陀螺物块:

$$\begin{cases} I_g \dot{\gamma}_{2n} + I_g \Omega \dot{\eta}_{2n} = k_T (\gamma_{2n+1} - 2\gamma_{2n} + \gamma_{2n-1}) \\ I_g \dot{\eta}_{2n} - I_g \Omega \dot{\gamma}_{2n} = k_T (\eta_{2n+1} - 2\eta_{2n} + \eta_{2n-1}) \end{cases} \quad (2)$$

式中, I_m 为质量块的转动惯量, I_g 为陀螺块的转动惯量, γ_{2n-1} 为质量物块的 xy 平面的角位移, γ_{2n} 为陀螺物块的 xy 平面的角位移, η_{2n-1} 为质量物块的 xz 平面的角位移, η_{2n} 为陀螺物块的 xz 平面的角位移, K_T 为弹簧的扭转刚度, Ω 为陀螺物块的旋转速度.

根据能带理论,理想声子晶体具有离散的平移周期性,满足周期系统结构的 Bloch 定理,假设方程组角度的行波解:

$$\begin{cases} \gamma_{2n-1} = C_1 e^{i\omega t} e^{ik(2n-1)a} \\ \eta_{2n-1} = D_1 e^{i\omega t} e^{ik(2n-1)a} \\ \gamma_{2n} = C_2 e^{i\omega t} e^{ik2na} \\ \eta_{2n} = D_2 e^{i\omega t} e^{ik2na} \end{cases} \quad (3)$$

式中, k 为波数, ω 为角频率, a 为两物块的间距.

将(3)带入公式(1)和(2)中,简化为矩阵形式:

$$TQ = 0 \quad (4)$$

$$T = \begin{bmatrix} \omega^2 I_m - 2k_T & 2k_T \cos ka & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega^2 I_m - 2k_T & 2k_T \cos ka \\ 0 & i\omega I_g \Omega & 2k_T \cos ka & \omega^2 I_g - 2k_T \end{bmatrix}$$

$$Q = [C_1 \quad C_2 \quad D_1 \quad D_2]^T$$

此方程为一个关于 ω 的特征值的矩阵.为得到 C_1, C_2, D_1, D_2 的非平凡解,系数行列式必须为 0.对系数行列式进行 MATLAB 软件计算可以得到陀螺-质量声子晶体模型的能带结构.

2 模型理论计算

为分析不同参数对于陀螺-质量声子晶体模型能带结构的影响,对不同参数的角动量进行了能带结构的计算,设参数为 $k_T = 0.5, I_m = 1, I_g = 0.5, a = 1, \Omega = 0.2$, 得到波数随频率的变化图,即能带结构,如图2中频率随波数的图所示.陀螺-质量声子晶体结构在此参数下,存在四条通带,如下图颜色带所示,频率的通带范围分别是红色 A1(0-1),红色 A2(1.232-1.613),绿色 B1(0.132-1),绿色 B2(1.628-1.881).由图像可知,通带 A1 和 A2 为一组通带,通带 B1 和 B2 为一组通带.

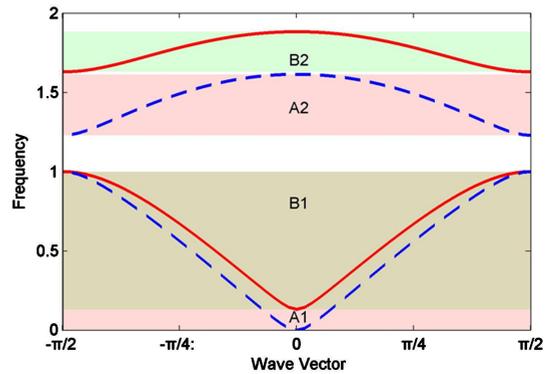


图2 频率随波数的变化图

Fig.2 The frequency changes with wavenumber

通过改变旋转速度 Ω , 扭转刚度 K_T 和转动惯量 I_g 的参数,得到通带的变化规律,如图3~5所示.

由图3所示,随着陀螺物块旋转速度的增加,陀螺物块的两组通带中,通带 A1 逐渐变窄,在质量块的转动惯量与陀螺物块的转动惯量相等时,

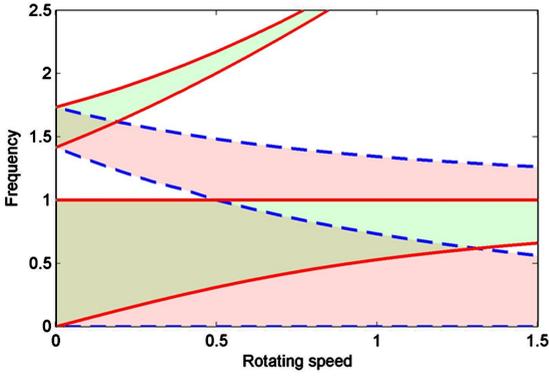


图3 频率随转速的变化图

Fig.3 The frequency changes with rotation speed

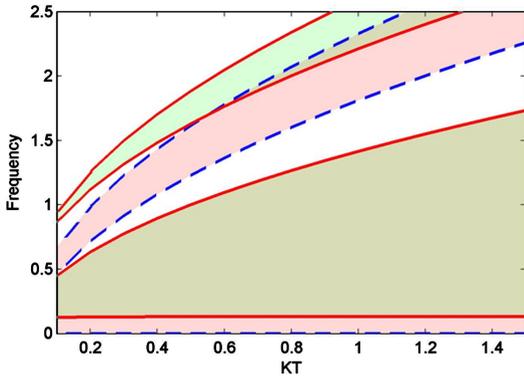


图4 频率随扭转刚度的变化图

Fig.4 The frequency changes with torsional stiffness

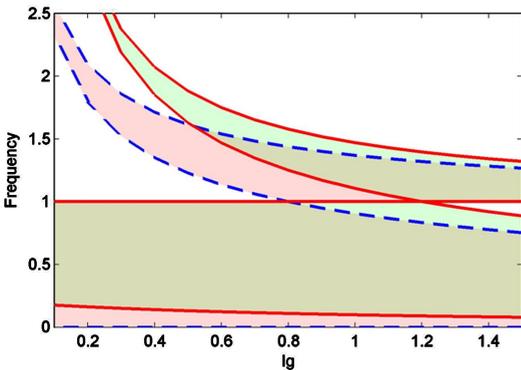


图5 频率随转动惯量的变化图

Fig.5 The frequency changes with moment of inertia

B1 通带发生变化,逐渐变窄.通带 B2 和通带 A2 间距逐渐增大,通带 A2 逐渐下移,直至两组通带相交时,通带变化状态发生改变.由图 4 所示,随着扭转刚度的增加,两组通带宽度与数值均大幅度增加,通带 A2 和通带 B2 增加幅度不同,出现重叠的通带区域.通带 A1 和通带 B1 的上限增加幅度相同,通带 A1,通带 B1 的下限无明显影响.由图 5 所

示,随着陀螺物块的转动惯量的增加,对于通带 A1 和通带 B1 下限无明显影响,对于通带 A2 和通带 B2 影响较大.当陀螺物块的转动惯量增加到与质量块转动惯量相同时,物块的通带结构发生质的改变.

3 模型数值验证

基于有限陀螺-质量声子晶体模型,求得在不同频率下陀螺物块两个方向角度的传播,确定物块的传播频率的区间,验证图 2 中频率随波数变化的情况.

根据式(1)(2),求得第 $2n$ 物块的角度之间的比值公式:

$$L_n = \frac{k_T^2}{[(2k_T - \omega^2 I_m)(2k_T - \omega^2 I_g) + (2k_T - \omega^2 I_m)i\omega HT_n - k_T^2(L_{n+1} + 2)]}$$

$$P_n = \frac{k_T^2}{[(2k_T - \omega^2 I_m)(2k_T - \omega^2 I_g) - (2k_T - \omega^2 I_m)\frac{i\omega H}{T_n} - k_T^2(P_{n+1} + 2)]} \quad (5)$$

其中 $T_n = \frac{\eta_{2n}}{\gamma_{2n}}$ 为第 n 物块两个方向角度的比值.边界

N 组陀螺物块方程为:

$$L_N = \frac{k_T^2}{[(2k_T - \omega^2 I_m)(k_T - \omega^2 I_g) + (2k_T - \omega^2 I_m)i\omega HT_N - k_T^2]}$$

$$P_N = \frac{k_T^2}{[(2k_T - \omega^2 I_m)(k_T - \omega^2 I_g) - (2k_T - \omega^2 I_m)\frac{i\omega H}{T_N} - k_T^2]} \quad (6)$$

将图 2 的参数带入公式(5)(6)中,得到物块在不同频率下物块的角度变化.

当 $T(N) = i$ 时,如图 6 所示,横坐标为末尾物块与第一个物块的比值,纵坐标为频率,黑色虚线为物块比值 0.1 的位置.当弹性波的频率处于(0-1)和(1.232-1.613)时,结构对于弹性波处于导通状态,即物块的比值大于 0.1;当弹性波的频率处于(1-1.232)和(1.613)时,结构对于弹性波处于禁止状态,即物块的比值小于 0.1.因此在此结构参数下,出现(0-1)和(1.232-1.613)两条通带.

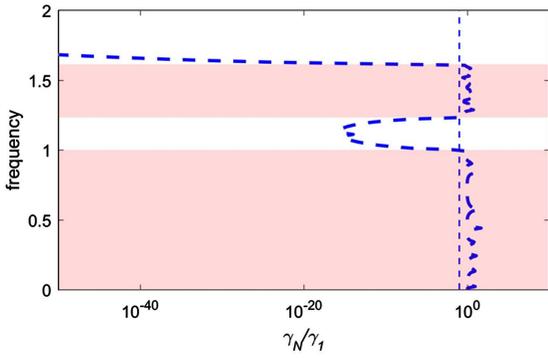


图 6 $T(N) = i$, 物块比值与频率的关系图

Fig.6 $T(N) = i$, Ratio and frequency diagram

当 $T(N) = -i$ 时,如图 7 所示,当弹性波的频率处于 $(0.132-1)$ 和 $(1.628-1.881)$ 时,结构对于弹性波处于导通状态.当弹性波的频率处于 $(0-0.132)$, $(1-1.628)$ 和 $(1.881-)$ 时,结构对于弹性波出现抑制,弹性波不能传递;因此在此结构参数下,结构出现 $(0.132-1)$ 和 $(1.628-1.881)$ 两条通带.

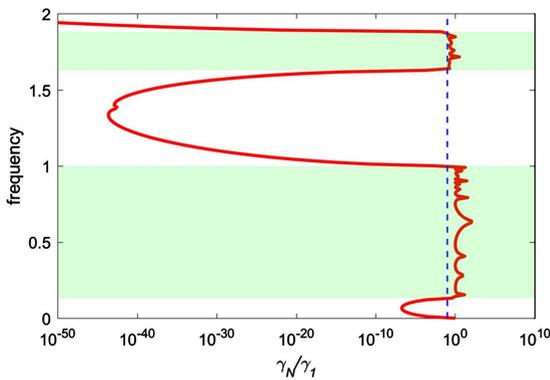


图 7 $T(N) = -i$, 频率与比值的变化图

Fig.7 $T(N) = -i$, Ratio and frequency diagram

通过图 6,7 与图 2 进行对比,发现当末尾物块的角度比值为 i 和 $-i$ 时,模型分别出现两组通带.当末尾物块的比值为其他值时,模型通带仅为 $(0.132-1)$.

改变 $T(N)$ 的数值,得到结构的通带,如表 1 所示.在陀螺-质量模型的能带结构中,通带的范围是随着末尾物块状态的变化而变化.因此存在了类似通带和半通带的状态.全通带为当末尾物块状态为任意时,通带保持不变,即通带 A1,通带 B1 和通带 A2,通带 B2 重合的频率,即在此示例中,频率为 $(0.132-1)$.半通带为当末尾物块状态为限制状态时,出现另外一条通带即通带 A1,通带 B1 和通带 A2,通带 B2 重合以外的频率.即在此示例中,频率取 $(0-0.132)$, $(1.232-1.613)$ 和 $(1.628-1.881)$.

表 1 不同 $T(N)$ 下的通带

Table 1 Passband under different $T(N)$

$T(N)$	Passband
$-2i$	$(0.132-1)$
-2	$(0.132-1)$
$-i$	$(0.132-1)$ $(1.628-1.881)$
-1	$(0.132-1)$
1	$(0.132-1)$
i	$(0-1)$ $(1.232-1.613)$
2	$(0.132-1)$
$2i$	$(0.132-1)$

4 结论

(1)随着参数的变化,当两组通带相交时,通带的变化规律发生改变.当陀螺物块的转速变化到 0.5 时,通带 A2 下限与通带 A1 上限相交;当陀螺物块的转动惯量变化为 0.8 时,通带 A2 下限与通带 A1 上限相交;当陀螺物块的转动惯量变化为 1 时,通带 B2 下限与通带 B1 上限相交.

(2)陀螺物块的转动惯量和弹簧的扭转刚度对于通带 A1 和 B1 的下限影响不大,陀螺物块的转速对于下限影响较大.总体来说,陀螺物块的扭转刚度和转动惯量对于通带的宽度有着促进作用,陀螺物块的转速对于通带的宽度有着抑制作用.

(3)末尾块的状态影响着半通带的出现,从而影响着能带结构.控制末尾块的状态,可以调节对于物块的传播状态.

参 考 文 献

- 1 Sigalas M M, Economou E N. Elastic and acoustic-wave band-structure. *Journal of Sound and Vibration*, 1992, 158(2):377~382
- 2 Kushwaha M S, Halevi P, Dobrzynski L, et al. Acoustic band structure of periodic elastic composites. *Physical Review Letters*, 1993, 71(13):2022~2025
- 3 Martínezsala R, Sancho J, et al. Sound attenuation by sculpture. *Nature*, 1995, 378(6554):241
- 4 Espinosa F, Jim E, Torres N. Ultrasonic Band Gap in a Periodic Two-Dimensional Composite. *Physical Review Letters*, 1998, 80(6):1208~1211
- 5 Liu Z, Zhang X, Mao Y, et al. Locally resonant sonic materials. *Science*, 2000, 338(1):201~205
- 6 Jensen J. Phononic band gaps and vibrations in one- and two-dimensional mass-spring structures. *Journal of Sound*

- & *Vibration*, 2003,266(5):1053~1078
- 7 Wang T, Sheng M P, Qin Q H. Multi-flexural band gaps in an Euler-Bernoulli beam with lateral local resonators. *Physics Letters A*, 2016,380(4):525~529
 - 8 Huang H H, Sun C T, Huang G L. On the negative effective mass density in acoustic metamaterials. *International Journal of Engineering Science*, 2009,47(4):610~617
 - 9 Chen J S, Sharma B, Sun C T. Dynamic behaviour of sandwich structure containing spring-mass resonators. *Composite Structures*, 2011,93(8):2120~2125
 - 10 Deymier P, Runge K. One-dimensional mass-spring chains supporting elastic waves with non-conventional topology. *Crystals*, 2016,6(4):44
 - 11 温激鸿. 声子晶体振动带隙及减振特性研究[博士学位论文]. 长沙:国防科学技术大学, 2005 (Yu D L. Vibration attenuation and band gap characteristics of phononic crystals[Ph.D Thesis]. Changsha:National University of Defense Technology, 2005 (in Chinese))
 - 12 郁殿龙. 基于声子晶体理论的梁板类周期结构振动带隙特性研究[博士学位论文]. 长沙:国防科学技术大学, 2006 (Yu D L. Research on the vibration band Gaps of periodic beams and plates based on the theory of phononic crystals[Ph.D Thesis]. Changsha:National University of Defense Technology, 2006 (in Chinese))
 - 13 张研. 声子晶体的计算方法与带隙特性. 北京:科学出版社, 2015 (Zhang Y. Calculation methods and bandgap properties of phononic crystals. Beijing: Science Press, 2015 (in Chinese))

STUDY ON STRUCTURAL MECHANICS OF A GYRO-MASS PHONONIC CRYSTAL*

Di Shijie^{1,2} Yang Xiaodong^{1,2†} Zhang Wei^{1,2}

(1.College of Mechanical Engineering,Beijing University of Technology, Beijing 100124, China)

(2.Beijing Key Laboratory of Nonlinear Vibrations and Strength of Mechanical Structures,
Beijing University of Technology, Beijing 100124, China)

Abstract The phononic crystals are periodic structures consisting of two or more material phases. When the elastic wave is propagating along the phononic crystals, the obvious feature is that the elastic wave is suppressed due to Bragg scattering in the band gap, but can be transmitted without loss in the pass band. In this paper, a new type of gyro-mass phononic crystal structure was proposed and designed. In addition, the effects of different structural parameters on the pass band of the gyro-mass phononic crystal were studied, which are verified by numerical simulations based on the structure with finite unit cells.

Key words phonon crystals, gyroscope structure, parameter influence