

时滞耦合 van der Pol-Duffing 振子环的动力学分析*

施添添 茅晓晨[†]

(河海大学 力学与材料学院, 南京 211100)

摘要 研究含时滞的大规模 van der Pol-Duffing 耦合振子系统的非线性动力学。通过讨论特征方程根分布情况确定系统的稳定性，并在耦合时滞和强度平面上给出振幅死亡区域。结合数值算例，揭示同步和异步周期振荡、概周期运动以及混沌吸引子等现象。基于非线性振子电路和时滞电路，构建电路实验平台，有效验证理论和数值结果。研究结果表明，时滞可以显著影响系统动力学特性，如诱发振幅死亡、稳定性切换以及复杂振荡等。

关键词 时滞, van der Pol-Duffing 振子, 同步, 振幅死亡, 复杂动力学

DOI: 10.6052/1672-6553-2019-014

引言

近年来,由于在人工智能、协同控制、保密通信、动力吸振、疾病传播以及动物迁徙等领域的广泛应用,耦合振子已经成为重要研究对象^[1-3]。在耦合系统中,各个振子有其自身的特性,但耦合作用直接影响耦合后整体系统的运动特征及其变化,如同步、振幅死亡、多稳态以及混沌等^[2-4]。

在实际耦合过程中,由于信号的传输时间、记忆效应以及反馈控制等因素,各个振子之间的相互作用(如力、电等)不可避免地存在着时间滞后现象^[5-8]。这类系统采用时滞微分方程描述,其根本特点在于状态的演化趋势(变化率),不仅依赖于系统当前的状态,也依赖于系统过去某一时刻或一段时间的状态。与无时滞系统相比,时滞可诱发丰富而有趣的动力学行为^[2,5,7]。

Van der Pol-Duffing 振子可用于描述多种系统,如电路和神经元等^[9-14]。Xu^[10]等研究了含时滞的 van der Pol-Duffing 振子,发现了时滞诱导的锁相振动、倍周期分岔、概周期振荡以及混沌吸引子等;Maccari^[11]等利用时滞位移和速度反馈控制法研究了 van der Pol-Duffing 系统的振动问题;Zang 等^[12]考察了两耦合 van der Pol-Duffing 振子的稳定性和 Hopf 分岔,采用中心流形降阶和规范型理论

以及群表示定理等研究了分岔周期解;Jiang^[13]等研究了两耦合时滞 van der Pol-Duffing 振子的 Double Hopf 分岔,揭示了周期解、概周期解等;Liu^[14]等考虑了多时滞耦合 van der Pol-Duffing 振子的 Bogdanov-Takens 分岔和余维三分岔,揭示了多平衡点和各类极限环等。

本文研究时滞耦合 van der Pol-Duffing 振子环,如图 1 所示。该系统由任意多个振子通过双向连接与最邻近的振子相互耦合构成。环状结构在诸如电路、神经网络、机电传感器、安全通信等领域有重要的应用^[15,16]。

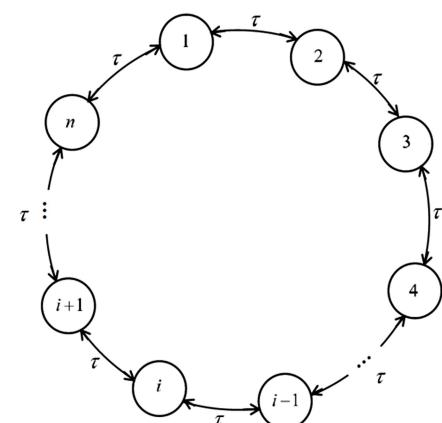


图 1 时滞耦合双向环状 van der Pol-Duffing 系统

Fig.1 The architecture of bidirectional ring van der Pol-Duffing oscillators with delayed couplings

2018-10-12 收到第 1 稿, 2018-12-12 收到修改稿。

* 国家自然科学基金资助项目(11472097 和 11872169), 河海大学中央高校基本科研业务费专项资金项目(2018B17514)

† 通讯作者 E-mail: maochen@hhu.edu.cn

1 稳定性分析

如图 1 所示, n 个 van der Pol-Duffing 振子通过含时滞的阻尼项耦合, 其数学模型如下:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_i + \varepsilon(x_i^2 - 1)\dot{x}_i + x_i + \alpha x_i^3 \\ = k[\dot{x}_{i-1}(t-\tau) + \dot{x}_{i+1}(t-\tau) - \dot{x}_i(t)] \end{aligned} \quad (1)$$

其中, x_i 为第 i 个振子的位移, $\varepsilon > 0$ 为阻尼系数, α 表示振子中立方非线性强度, k 和 τ 分别为耦合强度和时滞 ($i \bmod n$). 式(1)的矢量形式如下

$$\dot{\mathbf{Z}}_i(t) = \mathbf{A}\mathbf{Z}_i(t) + \mathbf{B}[\mathbf{Z}_{i-1}(t-\tau) + \mathbf{B}\mathbf{Z}_{i+1}(t-\tau)] + f[\mathbf{Z}(t)] \quad (2)$$

其中,

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_i &= (x_i, y_i)^T, y_i = \dot{x}_i \\ \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \varepsilon - k \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} \\ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ -\varepsilon a^2 b - \alpha a^3 \end{pmatrix}, (a, b)^T \in \mathbb{R}^2 \end{aligned}$$

显然, 原点为系统的平衡点. 式(2)的特征矩阵为

$$\mathbf{M}(\lambda, \tau) = \begin{bmatrix} \lambda \mathbf{I}_2 - \mathbf{A} & -\mathbf{B} e^{-\lambda \tau} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & -\mathbf{B} e^{-\lambda \tau} \\ -\mathbf{B} e^{-\lambda \tau} & \lambda \mathbf{I}_2 - \mathbf{A} & -\mathbf{B} e^{-\lambda \tau} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{B} e^{-\lambda \tau} & \lambda \mathbf{I}_2 - \mathbf{A} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \lambda \mathbf{I}_2 - \mathbf{A} & -\mathbf{B} e^{-\lambda \tau} \\ -\mathbf{B} e^{-\lambda \tau} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & -\mathbf{B} e^{-\lambda \tau} & \lambda \mathbf{I}_2 - \mathbf{A} \end{bmatrix} \quad (3)$$

其中, \mathbf{I}_2 为 2×2 的单位矩阵.

令 $\chi = e^{(2\pi/n)i}$, $\boldsymbol{\eta}_j = [\mathbf{v}_j, \chi^1 \mathbf{v}_j, \chi^2 \mathbf{v}_j, \dots, \chi^{(n-1)j} \mathbf{v}_j]^T$, 其中, \mathbf{v}_j 为 $S_j = \lambda \mathbf{I}_2 - \mathbf{A} - \mathbf{B} e^{-\lambda \tau} \chi^{-j} - \mathbf{B} e^{-\lambda \tau} \chi^j$ 对应的特征向量. 系统的特征方程为

$$\begin{aligned} \Delta(\lambda, \tau) = \det \mathbf{M}(\lambda, \tau) &= \prod_{j=0}^{n-1} \det S_j = \prod_{j=0}^{n-1} \Delta_j(\lambda, \tau) \\ &= \prod_{j=0}^{n-1} [\lambda^2 + (k - \varepsilon)\lambda + 1 - \\ &\quad 2k\cos(2\pi j/n)\lambda e^{-\lambda \tau}] = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

其中, $\Delta_j(\lambda, \tau) = \lambda^2 + (k - \varepsilon)\lambda + 1 - 2k\cos(2\pi j/n)\lambda e^{-\lambda \tau}$, $j = 0, 1, 2, \dots, n-1$. 当 $n = 2m+1$ ($m \in \mathbb{N}$) 时, $\Delta(\lambda, \tau) = \Delta_0(\lambda, \tau) \prod_{j=1}^m [\Delta_j(\lambda, \tau)]^2$; 而当 $n = 2m$ ($m \in \mathbb{N}$) 时, $\Delta(\lambda, \tau) = \Delta_0(\lambda, \tau) \Delta_m(\lambda, \tau) \prod_{j=1}^{m-1} [\Delta_j(\lambda, \tau)]^2$.

通过分析 $\Delta_j(\lambda, \tau) = 0$ 的根分布情况, 可确定系统零平衡点的稳定性. 当 $\tau = 0$ 时, $\Delta_j(\lambda, 0) =$

$\lambda^2 + [k - \varepsilon - 2k\cos(2\pi j/n)]\lambda + 1 = 0$. 显然, $\Delta_j(\lambda, 0) = 0$ 有两个实根, 为 $\lambda_{j,1} = (-p_j + \sqrt{p_j^2 - 4})/2$ 和 $\lambda_{j,2} = (-p_j - \sqrt{p_j^2 - 4})/2$. 其中, $p_j = k - \varepsilon - 2k\cos(2\pi j/n)$. 当 $\tau > 0$ 时, 若 $\lambda = \pm i\omega$ ($\omega > 0$) 为 $\Delta_j(\lambda, \tau) = 0$ 的一对纯虚根, 分离其实部和虚部, 得 $1 - 2k\cos(2\pi j/n)\omega \sin(\omega\tau) - \omega^2 = 0$ 和 $k - \varepsilon - 2k\cos(2\pi j/n)\cos(\omega\tau) = 0$, 消去谐波项, 得 $D_j(\omega) = \omega^4 + [(k - \varepsilon)^2 - 4k^2 \cos^2(2\pi j/n) - 2]\omega^2 + 1 = 0$. 如果 $(k - \varepsilon)^2 > 4k^2 \cos^2(2\pi j/n)$ 成立, 那么, $D_j(\omega) = 0$ 没有正实根. 若 $\Delta_j(\lambda, 0) = 0$ 均具有负实部特征根, 则系统全时滞稳定; 若 $\Delta_j(\lambda, 0) = 0$ 具有正实部特征根, 则系统始终不稳定.

如果 $(k - \varepsilon)^2 < 4k^2 \cos^2(2\pi j/n)$ 成立, 那么, $D_j(\omega) = 0$ 有两个正根, 为 $\omega_j^\pm = \sqrt{(-q_j \pm \sqrt{q_j^2 - 4})/2}$, 其中, $q_j = (k - \varepsilon)^2 - 4k^2 \cos^2(2\pi j/n) - 2$. 相应的临界时滞为 $\tau_{j,l}^\pm = (\theta_j^\pm + 2l\pi)/\omega_j^\pm$, $l = 0, 1, 2, \dots$, $\theta_j^\pm \in [0, 2\pi)$ 且 $\sin \theta_j^\pm = [(\omega_j^\pm)^2 - 1]/[2k\cos(2\pi j/n)\omega_j^\pm]$ 和 $\cos \theta_j^\pm = (k - \varepsilon)/[2k\cos(2\pi j/n)]$. 此外, 不难验证 $\text{sgn}Re[\lambda'(\tau)|_{\lambda=i\omega}] = \text{sgn}D'_j(\omega)$. 因此, $Re[\lambda(\tau)|_{\lambda=i\omega}]$ 的变化方向可由 $D'_j(\omega)$ 的符号确定. 由于 $\omega > \omega_j^+$ 时, $D_j(\omega) > D_j(\omega_j^+) = 0$; 而当 $\omega \in (\omega_j^-, \omega_j^+)$ 时 $D_j(\omega) < D_j(\omega_j^-) = 0$, 因此, $\text{sgn}Re[\lambda'(\tau_j^+)] > 0$ 和 $\text{sgn}Re[\lambda'(\tau_j^-)] < 0$. 当时滞从小变大, 每次跨过对应于 $\pm \omega_j^+$ 的临界时滞 $\tau_{j,l}^+$ 时, $\Delta_j(\lambda, \tau) = 0$ 的特征根实部由负变正, 从而增加一对具有正实部的共轭复根. 而当时滞从小变大, 每次跨过对应于 $\pm \omega_j^-$ 的临界时滞 $\tau_{j,l}^-$ 时, 特征根的实部由正变负, 从而减少一对具有正实部的共轭复根. 由于 $\tau_{j,l+1}^+ - \tau_{j,l}^+ < \tau_{j,l+1}^- - \tau_{j,l}^-$, $l = 0, 1, 2, \dots$ 给定长区间 $[0, \bar{\tau}]$, 在 τ_j^+ 处实部由负变正的特征根个数, 总是多于在 τ_j^- 处实部由正变负的特征根个数. 因此, 系统发生稳定性切换, 且随着时滞的增加, 最终必含有正实部的特征根, 即: 系统会经历有限多次稳定性切换, 并且最终不稳定^[5].

以上分析可总结为如下结论.

定理 1

- (a) 若所有的 $D_j(\omega) = 0$ 无正根, 则系统零平衡点稳定性与无时滞系统的稳定性相同.
- (b) 若 $D_j(\omega) = 0$ 有两个正根, 则系统零平衡点会发生有限多次稳定性切换, 最终趋于不稳定.

图 2 为含 6 个 van der Pol-Duffing 振子的网络在参数 k 和 τ 平面内的稳定区域, 其中, $\varepsilon = 0.06$.

如图2所示,绿色阴影区域为系统零平衡点的振幅死亡区域。

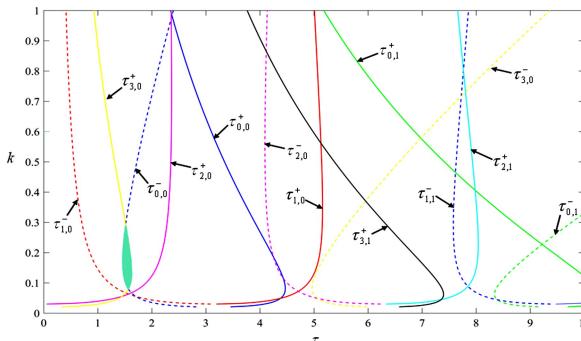


图2 当 $n=6, \varepsilon=0.06$ 时,耦合强度和时滞平面内的稳定区域

Fig.2 The region of amplitude death in the plane of the coupling time delay and strength when $n=6$ and $\varepsilon=0.06$

2 数值算例

(1) $n=3, \varepsilon=0.03, \alpha=0.1, k=0.25$. 系统的特征方程为 $\Delta(\lambda, \tau)=\Delta_0(\lambda, \tau)\Delta_1^2(\lambda, \tau)$, 其中 $\Delta_0(\lambda, \tau)=\lambda^2+(k-\varepsilon)\lambda+1-2k\lambda e^{-\lambda\tau}$ 和 $\Delta_1(\lambda, \tau)=\lambda^2+(k-\varepsilon)\lambda+1+k\lambda e^{-\lambda\tau}$. 求解 $D_0(\omega)=0$ 和 $D_1(\omega)=0$ 得 $\omega_0^-=0.80, \omega_0^+=1.25, \omega_1^-=0.94, \omega_1^+=1.06$, 对应的四组临界时滞分别为 $\tau_{0,l}^- = 1.39, 9.24, 17.09, \dots, \tau_{0,l}^+ = 4.14, 9.17, 14.19, \dots, \tau_{1,l}^- = 3.86, 10.53, 17.19, \dots, \tau_{1,l}^+ = 2.49, 8.42, 14.34, \dots$.

根据定理1可知:系统零平衡点的稳定区域为 $(\tau_{0,0}^-, \tau_{1,0}^+) \cup (\tau_{1,0}^-, \tau_{0,0}^+)$, 不稳定区域为 $(0, \tau_{0,0}^-) \cup (\tau_{1,0}^+, \tau_{1,0}^-) \cup (\tau_{0,0}^+, +\infty)$.

如图3(a)所示,当 $\tau=0.8$ 时,所有振子的运动趋于完全同步;图3(b)表示,当 $\tau=2$ 时,零平衡点稳定. 图3(c)表示,当 $\tau=3.6$ 时,零平衡点失去稳定,出现了满足 $x_i=-x_{i+1}$ 的异步周期振荡. 图3(d)表示,当 $\tau=4$ 时,零平衡点再次稳定. 由图3可知,随着时滞的增加,系统在同步周期振荡、零平衡点,异步周期振荡以及零平衡点之间发生切换. 这表明:时滞可用于调控系统的稳定性和振荡模式(如同步/异步).

(2) $n=6, \varepsilon=0.06, \alpha=0.5, k=0.2$. 系统的特征方程为 $\Delta(\lambda, \tau)=\Delta_0(\lambda, \tau)\Delta_1^2(\lambda, \tau)\Delta_2^2(\lambda, \tau)\Delta_3(\lambda, \tau)$, 其中, $\Delta_0(\lambda, \tau)=\lambda^2+(k-\varepsilon)\lambda+1-2k\lambda e^{-\lambda\tau}, \Delta_1(\lambda, \tau)=\lambda^2+(k-\varepsilon)\lambda+1-k\lambda e^{-\lambda\tau}, \Delta_2(\lambda, \tau)=\lambda^2+(k-\varepsilon)\lambda+1+k\lambda e^{-\lambda\tau}, \Delta_3(\lambda, \tau)=\lambda^2+(k-\varepsilon)\lambda+1+2k\lambda e^{-\lambda\tau}$. 求解 $D_0(\omega)=D_3(\omega)=0$ 和 $D_1(\omega)=D_2(\omega)=0$ 得 $\omega_0^-=\omega_3^-=0.83, \omega_0^+=\omega_3^+=1.21, \omega_1^-=\omega_2^-=0.93$ 和 $\omega_1^+=\omega_2^+=1.07$.

相应的临界时滞为 $\tau_{0,l}^- = 1.46, 9.03, 16.60, \dots, \tau_{0,l}^+ = 4.21, 9.42, 14.64, \dots, \tau_{1,l}^- = 0.85, 7.60, 14.35, \dots, \tau_{1,l}^+ = 5.11, 10.96, 16.81, \dots, \tau_{2,l}^- = 4.23, 10.98, 17.72, \dots, \tau_{2,l}^+ = 2.19, 8.04, 13.88, \dots, \tau_{3,l}^- = 5.25, 12.82, 20.39, \dots, \tau_{3,l}^+ = 1.60, 6.82, 12.03, \dots$, 将上述临界时滞从小到大排列为:

$$0 < \tau_{1,0}^- < \tau_{0,0}^- < \tau_{3,0}^+ < \tau_{2,0}^+ < \tau_{0,0}^+ < \tau_{2,0}^- < \tau_{1,0}^+ < \tau_{3,0}^- < \dots$$

根据定理1可知,系统的稳定区域为 $\tau \in (\tau_{0,0}^-, \tau_{3,0}^+)$, 不稳定区域为 $\tau \in (0, \tau_{0,0}^-) \cup (\tau_{3,0}^+, +\infty)$.

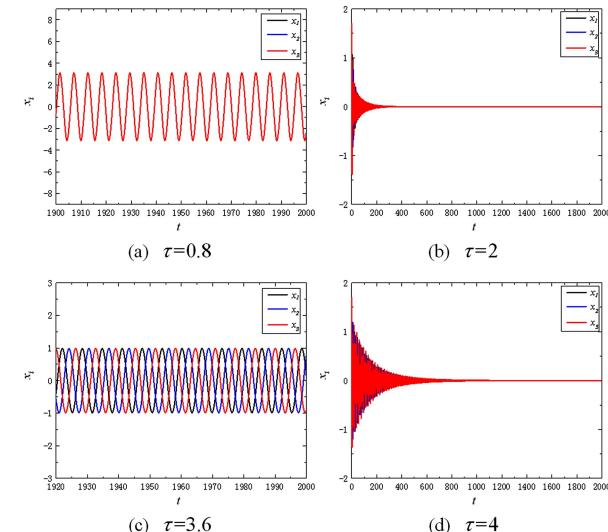


图3 $\varepsilon=0.03, k=0.25, \alpha=0.1$ 时三振子耦合系统响应

Fig.3 The responses of three coupled oscillators when $\varepsilon=0.03, k=0.25$, and $\alpha=0.1$

图4(a)和图4(b)分别表示,当 $\tau=1.2$ 和 $\tau=1.5$ 时,完全同步周期运动和稳定的零平衡点. 当 $\tau=2$ 时,出现了 Hopf 分岔导致的异步周期振荡, 如图4(c)所示. 图4(d)表明,当 $\tau=2.3$ 时,概周期运动出现. 随着时滞的增大,当 $\tau=3.2$ 时,概周期振荡消失,出现混沌现象,如图4(e)所示. 图5为 $\tau=3.2$ 时,系统的功率谱图和 Poincaré 截面图,其中, Poincaré 截面取为 $\Sigma=\{(x_1(t-1), x_1):(x_2=0, \dot{x}_2>0)\}$. 图5表明: x_1 的功率谱呈连续变化,而 Poincaré 截面上出现密集的离散点.

3 实验研究

实验电路由 van der Pol-Duffing 振子电路和时滞电路构成. 其中, van der Pol-Duffing 振子电路采用积分电路、加减法运算电路以及乘法电路等构成,而时滞则由滤波电路实现.

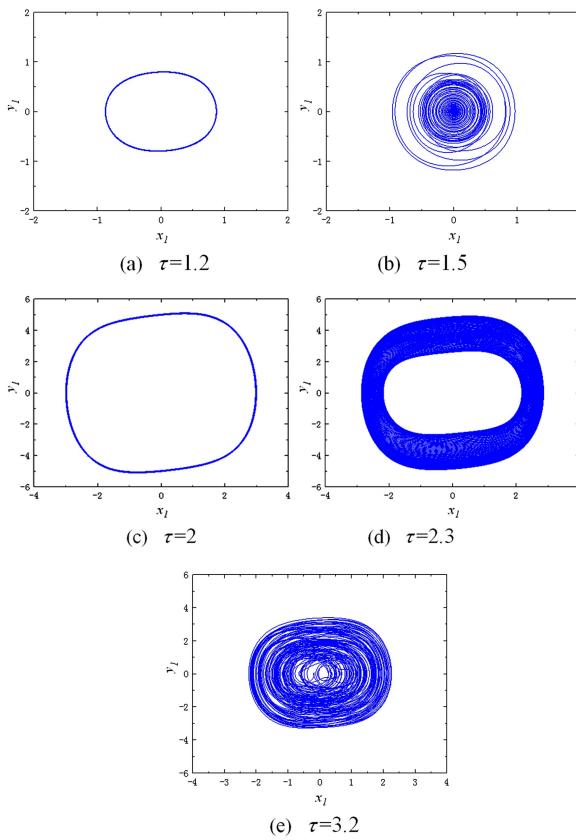
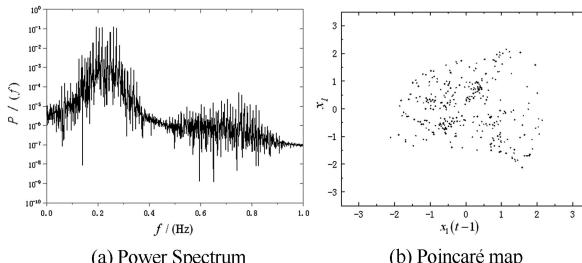
图4 当 $\varepsilon=0.06, k=0.2, \alpha=0.5$ 时, x_1-y_1 平面的相图Fig.4 The phase trajectories on the x_1-y_1 plane when $\varepsilon=0.06$, $k=0.2$, and $\alpha=0.5$ 图5 $\tau=3.2$ 时系统功率谱图和 Poincaré 截面图Fig.5 The power spectrum and Poincare section when $\tau=3.2$

图6为三振子耦合系统的电路原理图,其中,图6B为时滞电路,可实现时滞量为 $\tau=2R_dC_d$ ^[17],其中, $R=2.2K\Omega$.

如图6所示,电路方程为

$$\left\{ \begin{array}{l} C_{ia}R_{ia}\dot{x}_i = \frac{R_{i1}}{R_{i2}}Y_i \\ C_{ib}R_{ib}\dot{Y}_b = -\frac{R_{i3}}{R_{i4}}X_i - \frac{R_{i3}}{R_{i5}}X_i^2Y_i - \frac{R_{i3}}{R_{i6}}X_i^3 - \frac{R_{i3}}{R_{i7}}Y_i + \frac{R_{i3}}{R_{i8}}Y_{i+1}(t'-\tau') + \frac{R_{i3}}{R_{i9}}Y_{i-1}(t'-\tau') \end{array} \right. \quad (5)$$

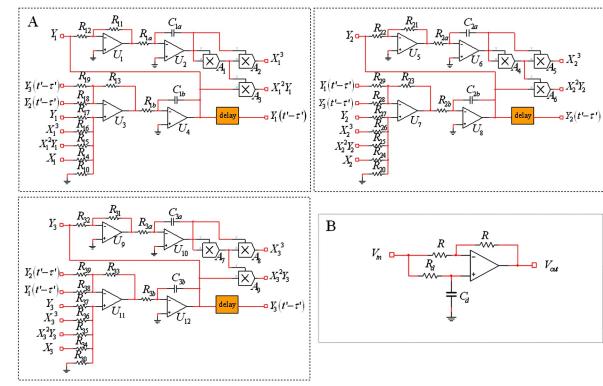


图6 三振子耦合系统的电路原理图

Fig.6 An electronic circuit implementation of three coupled oscillators

其中, X_i 和 Y_i 表示第 i 个振子电路中电容器的输出电压, $R_{ia}=R_{ib}=10K\Omega$, $C_{ia}=C_{ib}=100nF$, $R_{i1}=R_{i2}=R_{i3}=R_{i4}=10K\Omega$, $R_{i5}=333.33K\Omega$, $R_{i6}=100K\Omega$, $R_{i7}=45.45K\Omega$, $R_{i8}=R_{i9}=40K\Omega$, $R_{i0}=66.67K\Omega$, $i=1, 2, 3$. 电路参数与无量纲参数满足 $t=t'/R_{ia}C_{ia}$ 和 $\tau=\tau'/R_{ia}C_{ia}$.

如图7所示,电路经历了同步周期振荡、零电压、反相同步周期振荡以及零电压,其中,黑色、蓝色和红色曲线分别表示输出电压 X_1 , X_2 和 X_3 . 比较图3和图7可知,实验结果与数值仿真的结果相一致. 图8为随时滞量变化实验结果与数值仿真结果对比图. 显然,两者结果吻合较好.

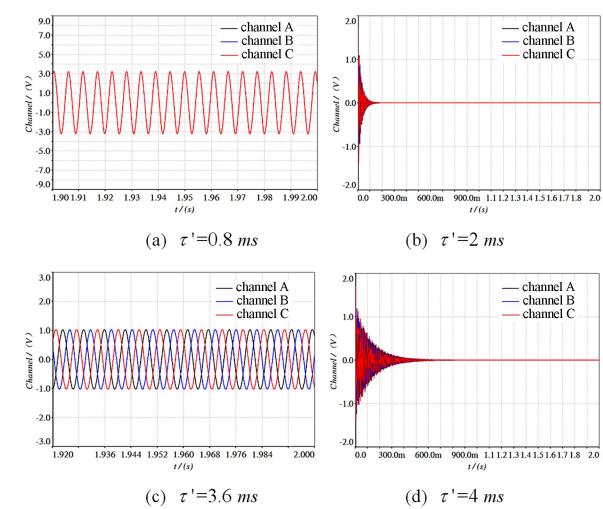
图7 三振子耦合系统电路输出电压 X_i 曲线Fig.7 The output voltages X_i in the electronic circuit for three coupled oscillators

图9为六振子耦合系统的电路原理图,其电路方程为

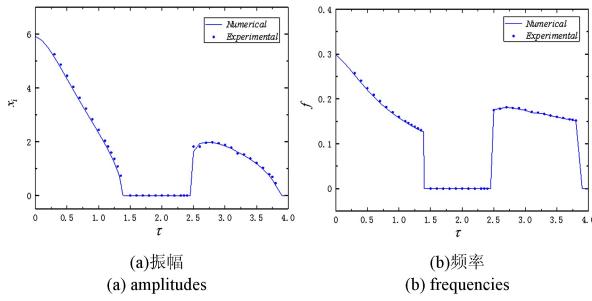


图 8 电路实验结果与数值模拟对比图

Fig.8 The numerical and experimental results

when the coupling time delay varies

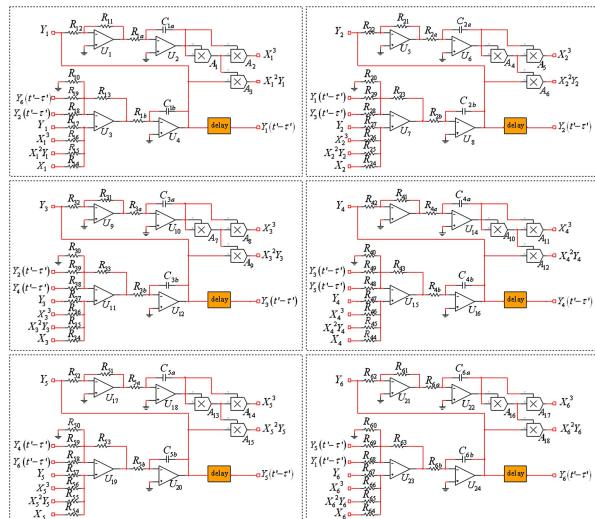
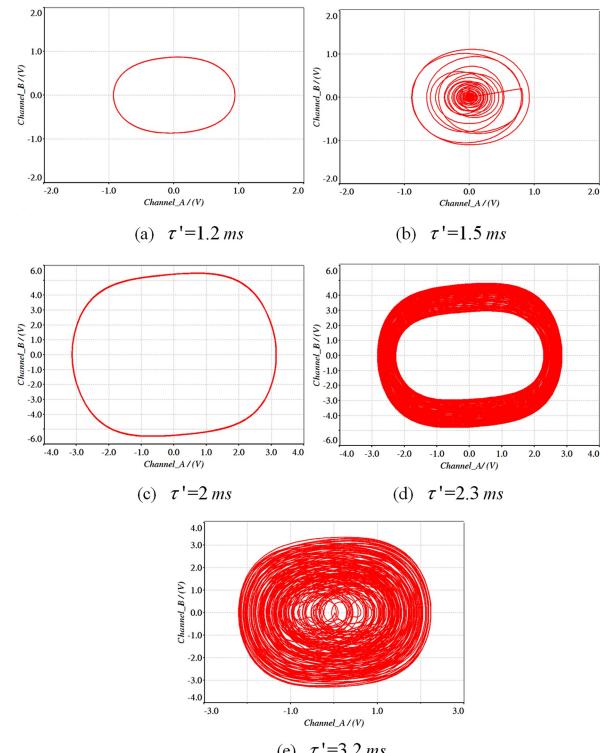


图 9 六振子耦合系统的电路原理图

Fig.9 An electronic circuit implementation of six coupled oscillators

$$\left\{ \begin{array}{l} C_{ia} R_{ia} \dot{X}_i = \frac{R_{i1}}{R_{i2}} Y_i \\ C_{ib} R_{ib} \dot{Y}_i = -\frac{R_{i3}}{R_{i4}} X_i - \frac{R_{i3}}{R_{i5}} X_i^2 Y_i - \frac{R_{i3}}{R_{i6}} X_i^3 - \frac{R_{i3}}{R_{i7}} Y_i + \frac{R_{i3}}{R_{i8}} Y_{i+1}(t'-\tau') + \frac{R_{i3}}{R_{i9}} Y_{i-1}(t'-\tau') \end{array} \right. \quad (6)$$

其中, X_i 和 Y_i 为第 i 个 van der Pol-Duffing 振子电路中电容器的输出电压, $R_{ia}=R_{ib}=10\text{K}\Omega$, $C_{ia}=C_{ib}=100\text{nF}$, $R_{i1}=R_{i2}=R_{i3}=R_{i4}=10\text{K}\Omega$, $R_{i5}=166.67\text{K}\Omega$, $R_{i6}=20\text{K}\Omega$, $R_{i7}=71.43\text{K}\Omega$, $R_{i8}=R_{i9}=50\text{K}\Omega$, $R_{i0}=33.33\text{K}\Omega$, $i=1, 2, \dots, 6$. 如图 10 所示, 电路经历了同步周期振荡, 零平衡点, 异步周期振荡, 概周期振荡及混沌. 比较图 10 和图 4 可知, 电路结果与数值仿真结果相一致.

图 10 六振子耦合系统电路在 X_1-Y_1 平面内的相图Fig.10 The phase trajectories on the X_1-Y_1 plane of the circuit for six coupled oscillators

4 结论

研究了时滞耦合 van der Pol-Duffing 振子环的非线性动力学. 通过解耦特征方程, 讨论了解耦后特征根分布, 获得了稳定条件, 并在耦合强度和时滞平面上给出了振幅死区和不稳定区域. 通过数值计算, 给出了诸如同步/异步周期振荡、概周期振荡以及混沌吸引子等现象. 搭建了电路实验平台, 实验结果与理论分析和数值计算的结果相吻合. 研究结果表明, 时滞可有效调控系统的动力学特性, 如增强或抑制同步, 选择不同的振荡模式等.

参 考 文 献

- 1 Strogatz S H. Exploring complex networks. *Nature*, 2001, 410(6825):268
- 2 Wang Q Y, Zheng Y H, Ma J. Cooperative dynamics in neuronal networks. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2013, 56: 19~27
- 3 Song Y L, Xu J, Zhang T H. Bifurcation, amplitude death and oscillation patterns in a system of three coupled van der Pol oscillators with diffusively delayed velocity

- coupling. *Chaos*, 2011, 21(2):023111
- 4 Gjurchinovski A, Zakharova A, Schöll E. Amplitude death in oscillator networks with variable-delay coupling. *Physical Review E*, 2014, 89(3):032915
- 5 Hu H Y, Wang Z H. Dynamics of controlled mechanical systems with delayed feedback. Springer: Springer Science & Business Media, 2013
- 6 王在华,胡海岩. 时滞动力系统的稳定性与分岔:从理论走向应用. 力学进展, 2013, 43(1): 3~20 (Wang Z H, Hu H Y. Stability and bifurcation of delayed dynamic systems: from theory to application. *Advances in Mechanics*, 2013, 43(1):3~20 (in Chinese))
- 7 张舒,徐鉴. 时滞耦合系统非线性动力学的研究进展. 力学学报, 2017, 49(3):565~587 (Zhang S, Xu J. Review on nonlinear dynamics in systems with coupling delays. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2017, 49(3):565~587 (in Chinese))
- 8 薛换斌,张继业. 时滞切换不确定神经网络系统的指数稳定性. 动力学与控制学报, 2018, 16(1):65~71 (Xue H B, Zhang J Y. Exponential stability of time-delay switched uncertain neural networks systems. *Journal of Dynamics and Control*, 2018, 16(1):65~71 (in Chinese))
- 9 Brezetskyi S, Dudkowski D, Kapitaniak T. Rare and hidden attractors in Van der Pol-Duffing oscillators. *European Physical Journal Special Topics*, 2015, 224(8):1459~1467
- 10 Xu J, Chung K W. Effects of time delayed position feed-back on a van der Pol-Duffing oscillator. *Physica D*, 2003, 180(1~2):17~39
- 11 Maccari A. Vibration amplitude control for a van der Pol-Duffing oscillator with time delay. *Journal of Sound & Vibration*, 2008, 317(1~2):20~29
- 12 Zang H, Zhang T H, Zhang Y D. Stability and bifurcation analysis of delay coupled Van der Pol-Duffing oscillators. *Nonlinear Dynamics*, 2014, 75(1~2):35~47
- 13 Jiang H, Zhang T H, Song Y L. Delay-induced double Hopf bifurcations in a system of two delay-coupled van der Pol-Duffing oscillators. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2015, 25(4):1550058
- 14 Liu X, Zhang T H. Bogdanov-takens and triple zero bifurcations of coupled van der Pol-Duffing oscillators with multiple delays. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2017, 27(9):1750133
- 15 Nana B, Woafao P. Synchronized states in a ring of four mutually coupled oscillators and experimental application to secure communications. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2011, 16(4):1725~1733
- 16 Orosz G, Wilson R E, Stépán G. Traffic jams:dynamics and control. *Philosophical Transactions Mathematical Physical & Engineering Sciences*, 2010, 368(1928):4455~4479
- 17 Ablay G. Novel chaotic delay systems and electronic circuit solutions. *Nonlinear Dynamics*, 2015, 81(4):1795~1804

DYNAMICS OF A RING OF COUPLED VAN DER POL-DUFFING OSCILLATORS WITH TIME DELAYS^{*}

Shi Tiantian Mao Xiaochchen[†]

(College of Mechanics and Materials, Hohai University, Nanjing 211100, China)

Abstract The dynamic behaviors of a delay-coupled ring of van der Pol-Duffing oscillators were studied. The stability and bifurcation of the system were determined by solving the associated characteristic equation. The parametrical regions of amplitude death were shown in the plane of time delay and coupling strength. Case studies were carried out by numerical simulations, which were validated by circuit experiments. It was shown that time delay can give rise to abundant and interesting behaviors, such as amplitude death, different periodic oscillations, quasi-periodic responses, and even chaotic attractors.

Key words time delay, van der Pol-Duffing oscillator, synchronization, amplitude death, complex dynamics

Received 12 October 2018, revised 12 December 2018.

* The project supported by the National Natural Science Foundation of China(11472097,11872169) and Fundamental Research Funds for the Central Universities under Grant (2018B17514).

† Corresponding author E-mail:maochen@hhu.edu.cn