

# 压电智能结构的主动控制及压电执行器布局优化

陶鸿飞 崔升<sup>†</sup>

(复旦大学 航空航天系, 上海 200433)

**摘要** 本文对压电梁、板结构振动主动控制进行了研究, 分别建立了压电悬臂梁的耦合动力学方程以及 Kirchhoff 假设下矩形压电薄板的耦合动力学方程, 通过采用独立模态空间控制法, 实现了对压电智能结构前两阶模态的主动振动控制。为提高主动控制的抑振效果, 通过仿真实例分析了压电执行器在梁上的不同布局对于主动控制抑振效果的影响, 得到了压电执行器粘附于悬臂梁上的最佳布局。最后实验验证了压电悬臂梁在自由振动以及模态共振下压电执行器对于悬臂梁响应控制的可行性和有效性。

**关键词** 压电陶瓷, 智能结构, 主动控制, 布局优化

DOI: 10.6052/1672-6553-2018-067

## 引言

压电智能材料在结构振动控制中的应用由来已久, 早期的压电材料多用于结构的被动减振、抑振, 随着科学技术的发展, 人们对于控制要求、控制精度提出了更高的标准, 压电智能结构主动控制、半主动控制、新型压电智能结构等逐渐成为研究热点。从 20 世纪八十年代开始, 诸多学者将目光转向将压电材料应用于结构振动主动控制的研究。1985 年, Bailey 等人<sup>[1]</sup>率先将压电材料应用于悬臂梁主动振动控制, 通过在整个梁上粘贴一整片压电薄膜来进行悬臂梁的振动控制。陶宝祺<sup>[2]</sup>从理论上研究分析压电作动器应用于柔性结构振动主动控制, 并进行了相关的实验验证。孙东昌<sup>[3]</sup>将压电薄膜分割, 提出了分布单元方法, 突破了一整片薄膜对于高阶模态无法控制的局限。李岳峰等人<sup>[4]</sup>在梁表面粘贴多组压电传感器/执行器, 实现了多输入多输出的结构振动主动控制。马治国等人<sup>[5]</sup>建立了压电悬臂梁在受到拉伸弯曲作用下系统的机电耦合动力学方程。Crawley 等人<sup>[6]</sup>提出了一种仿人控制算法, 用于压电悬臂梁的结构建模并进行了振动控制。Wang<sup>[7]</sup>建立了经典的层合板理论并分析了压电执行器对于层合板的作用效果。Tani 和 Qin<sup>[8-10]</sup>建立了板壳结构的压电耦合动力学方程, 实现了对

板壳结构的振动主动控制。由于不合理的执行器电压加载方式会导致结构的瞬态和残余振动, 影响控制精度和系统的稳定性, 王晓明等人<sup>[11]</sup>和张书扬等人<sup>[12]</sup>分别在智能结构动态形状的主动控制方面进行抑振, 提高了动态形状控制的效果。

对压电元件的布局优化一直以来是智能结构振动控制研究中的一个十分重要的课题。1987 年, Crawley 和 Luis<sup>[13]</sup>运用压电执行器对压电悬臂梁振动主动控制时, 分析得到压电作动器布置于应变模态最大处控制效果最好。Kwak 等人<sup>[14]</sup>研究了利用压电材料作为传感器和执行器同时对多模态进行主动控制, 适当减少压电传感器/执行器效果可以更好。王会利等人<sup>[15]</sup>从减少压电材料在振动控制中尽量降低对研究对象的影响的角度, 进行了薄板的多模态的主动控制试验, 结果表明优化配置压电材料的数量和尺寸可以改善压电智能结构的控制效果。

本文对压电梁、板结构振动主动控制进行了研究, 利用压电陶瓷的正逆压电效应, 在智能结构的上下表面对称粘贴压电陶瓷片分别用作传感器和执行器, 分别建立了压电梁、板结构的耦合动力学方程, 运用独立模态空间控制法仿真实现了对压电智能结构前两阶模态的主动控制, 并分析比较了压电陶瓷不同的粘附位置对于控制效果的影响, 得到

2018-05-18 收到第 1 稿, 2018-06-22 收到修改稿。

<sup>†</sup> 通讯作者 E-mail: shcui@fudan.edu.cn

压电陶瓷的最优布局。

在此基础上,构建基于 Arduino Uno 控制板的压电悬臂梁的主动控制系统验证了压电悬臂梁在自由振动以及模态共振下压电执行器对于悬臂梁响应控制的可行性和有效性。

## 1 压电智能结构动力学建模

本文研究的压电智能结构包括一维压电梁结构和二维压电板结构。选用的  $d_{31}$  型压电陶瓷如图 1 所示,它的极化方向与应力方向相互正交<sup>[16]</sup>。

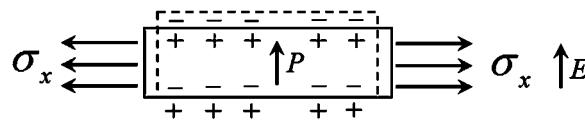


图 1  $d_{31}$ 型压电材料压电效应示意图

Fig.1 Schematic diagram of  $d_{31}$  piezoelectric effect

### 1.1 压电悬臂梁动力学建模

压电悬臂梁模型如图 2 所示,压电陶瓷对称粘贴于悬臂梁上下表面,分别作为传感器和执行器,并认为压电片和梁之间结合良好,没有相对位移。悬臂梁采用欧拉梁模型,即假设梁的各截面的中心主惯性轴在同一平面内,外载荷也在该平面内,并且在低频振动时忽略剪切变形以及截面绕中性轴转动惯量的影响。梁的横向振动位移可表示为  $y(x, t)$ 。梁的长宽厚分别为  $l_b, w_b, h_b$ , 杨氏模量为  $E_b$ , 密度为  $\rho_b$ 。压电陶瓷片(PZT)长为  $l_p$ , 粘贴在梁上的左端点  $x_1$ , 右端点  $x_2$ , 宽为  $w_p$ , 厚为  $h_p$ , 常电位移下弹性模量为  $E_p^D$ , 纵向压电常数为  $d_{31}$ 。下角表  $b, p$  分别代表梁基质和压电片。

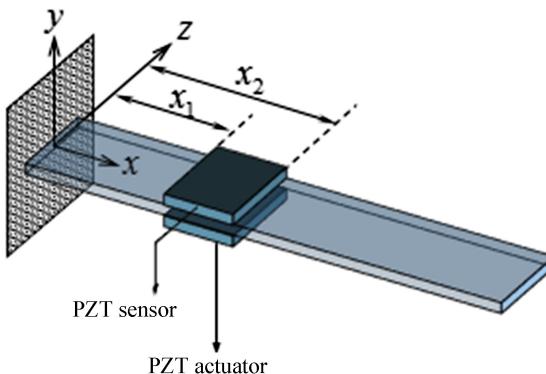


图 2 压电悬臂梁示意图

Fig.2 Schematic diagram of piezoelectric cantilevered beam

考虑到压电陶瓷的横观各向同性,应用第四类

压电方程并简化可得<sup>[17]</sup>:

$$\begin{bmatrix} T_1 \\ E_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11}^D & -h_{31} \\ -h_{31} & \beta_{33}^S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_1 \\ D_3 \end{bmatrix} \quad (1)$$

其中,  $T_1$  为  $x$  方向主应力;  $S_1$  为  $x$  方向主应变;  $E_3$  为  $z$  方向电场;  $D_3$  为  $z$  方向电位移;  $c_{11}^D$  即  $E_p^D$  为在常电位移下压电陶瓷的弹性模量;  $h_{31}$  为压电刚度常数;  $\beta_{33}^S$  为常应变下介电常数。

根据哈密顿原理

$$\delta H = \delta \int_{t_1}^{t_2} (T - U + W) dt = 0 \quad (2)$$

可以得到关于压电耦合的悬臂梁动力学方程组:

$$\begin{aligned} \rho_b A_b \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + c_b \frac{\partial y}{\partial t} + E_b I_b \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \\ 2 \left( \rho_p A_p \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + c_p \frac{\partial y}{\partial t} + E_p I_p \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} \right) \cdot \\ [H(x-x_1) - H(x-x_2)] \\ = f(x, t) - w_p h_{31} D_3 h_p (h_b + h_p) \cdot \\ \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} [H(x-x_1) - H(x-x_2)] \right) \end{aligned} \quad (3)$$

$$\left[ h_{31} h_p (h_b + h_p) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{2\beta_{33}^S h_p}{w_p l_p} Q - u \right] \cdot$$

$$[H(x-x_1) - H(x-x_2)] = 0 \quad (4)$$

其中,  $H(\cdot)$  为 Heaviside 函数, 其导数为  $\delta$  函数。 $A_b, A_p$  分别为梁基质层和压电层的截面积。 $I_b, I_p$  分别是梁基质层和压电层横截面对中性轴的惯性矩。

电学方程如方程(4)所示, 第一项是梁振动在压电片上产生的电压, 第二项由于压电片本身固有电容, 第三项是外部输入的控制电压。

对悬臂梁的横向振动位移在模态空间展开, 并振型截断在前  $n$  阶主振型, 则有:

$$y(x, t) = \sum_{i=1}^n Y_i(x) q_i(t) = [Y]^T [q] \quad (5)$$

其中,  $Y_i$  是第  $i$  阶位移主振型。

方程(3)就可以写成如下形式:

$$M \ddot{q}(t) + C \dot{q}(t) + K q(t) = F_{exf} + F_{piezo} \quad (6)$$

其中,

$$\begin{aligned} M = \rho_b A_b \int_0^{l_b} Y_i Y_i^T dx + \\ 2\rho_p A_p \int_0^{l_b} Y_i Y_i^T [H(x-x_1) - H(x-x_2)] dx \end{aligned} \quad (7)$$

$$C = c_b \int_0^{l_b} Y'_i Y'^T_i dx + \\ 2c_p \int_0^{l_b} Y'_i Y'^T_i [H(x - x_1) - H(x - x_2)] dx \quad (8)$$

$$K = E_b I_b \int_0^{l_b} Y''_i Y'^T_i dx + \\ 2E_p^D I_p \int_0^{l_b} Y''_i Y'^T_i [H(x - x_1) - H(x - x_2)] dx \quad (9)$$

$$F_{exf} = \int_0^{l_b} Y_i f(x, t) dx \quad (10)$$

$$F_{piezo} = -bd_{31}E_p^D u(h_p + h_b) + \\ \int_0^{l_b} Y_i [\delta'(x - x_1) - \delta'(x - x_2)] dx \quad (11)$$

### 1.1.1 压电执行器

根据方程(11),压电片作动器对于悬臂梁的力输入可化为:

$$F_{piezo} = K_u u [Y'_i(x_1) - Y'_i(x_2)] \quad (12)$$

其中,

$$K_u = \frac{1}{2} bd_{31} E_p^D (h_p + h_b) \quad (13)$$

外力只考虑压电作用时,则  $f(x, t) = 0$ , 方程(6)在模态空间可解耦,各分量为:

$$\ddot{q}_i(t) + 2\zeta_i \omega_i \dot{q}_i(t) + \omega_i^2 q_i(t) = B_i u \quad (14)$$

其中,

$$B_i = K_u [Y'_i(x_1) - Y'_i(x_2)] \quad (15)$$

### 1.1.2 压电传感器

压电片传感器提取悬臂梁状态信号:

$$Q(t) = \int_A D_3 dA \\ = \int_0^{l_b} d_{31} E_p^D h_p y \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} [H(x - x_1) - H(x - x_2)] dx \\ = \frac{1}{2} d_{31} E_p^D h_p h_b \frac{\partial y}{\partial x} [\delta(x_1) - \delta(x_2)] \quad (16)$$

把方程(5)带入方程(16)可得传感器输出电压:

$$u_{out}(t) = \sum_{i=1}^n C_i q_i(t) \quad (17)$$

其中,

$$C_i = K_c [Y'_i(x_1) - Y'_i(x_2)] \quad (18)$$

$$K_c = \frac{d_{31} h_p h_b}{2(\varepsilon_{33}^T \cdot s_{11}^E - d_{31}^2) l_p} \quad (19)$$

## 1.2 压电矩形板力学建模

由于生活实际中常见的板结构约束条件多为固支,且在板的自由振动衰减中主要以低阶模态为主,因此本文以四边固支板为例,对压电矩形板的前两阶振动模态进行主动控制。

如图3所示的四边固支矩形薄板,长度为  $a$ ,宽为  $b$ ,厚为  $h_b$ .压电片对称粘贴于矩形板上下表面,分别作为传感器和执行器,并认为压电片和板之间结合良好,无相对位移.压电传感器与压电执行器均为方形且尺寸相同,边长为  $l_p$ ,厚度为  $h_p$ .下角表  $b, p$  分别代表板基质和压电片.

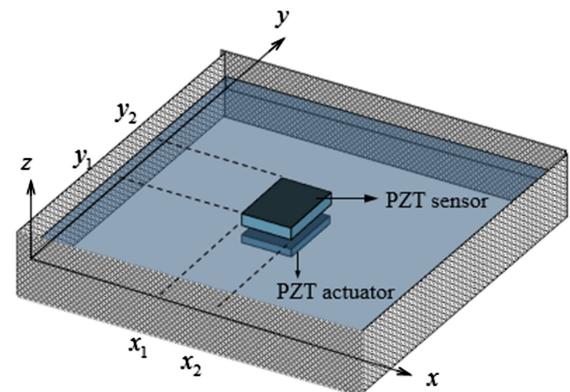


图3 四边固支压电板示意图

Fig.3 Schematic diagram of piezoelectric four-sided support plate

应用第四类压电方程并针对薄板简化可得<sup>[15]</sup>:

$$\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_6 \\ E_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11}^D & c_{12}^D & 0 & -h_{31} \\ c_{12}^D & c_{11}^D & 0 & -h_{31} \\ 0 & 0 & c_{66}^D & 0 \\ -h_{31} & -h_{31} & 0 & \beta_{33}^S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_6 \\ D_3 \end{bmatrix} \quad (20)$$

其中,  $T_1, T_2, T_6$  为应力分量;  $S_1, S_2, S_6$  为应变分量;  $E_3$  为  $z$  方向电场;  $D_3$  为  $z$  方向电位移;  $c_{11}^D, c_{12}^D, c_{66}^D$  为在常电位移下压电陶瓷的弹性常数;  $h_{31}$  为压电刚度常数;  $\beta_{33}^S$  为常应变下介电常数.

由于压电陶瓷为横观各向同性材料,并且在承受二维应变波动的薄板上忽略厚度方向上的正应力与横向切应力,当压电陶瓷不受约束时,给定极化方向上电压  $V$ ,则有在  $x$  方向应变  $\varepsilon_x^p$  和  $y$  方向应变  $\varepsilon_y^p$  相等且值为:

$$\varepsilon_x^p = \varepsilon_y^p = \varepsilon_p = \frac{d_{31}}{h_p} V \quad (21)$$

当压电执行器在  $x$  和  $y$  方向产生形变时,对应

地可求得应力,沿厚度方向积分可得压电执行器内部沿  $x$  和  $y$  方向的弯矩  $m_x$  和  $m_y$ ,进一步地,依据关于中性面的力矩平衡可确定弯矩  $m_x$  和  $m_y$  的值.

计算可得弯矩为:

$$\begin{aligned} m_x &= m_y \\ &= C_0 \varepsilon_p [H(x-x_1) - H(x-x_2)] \cdot \\ &\quad [H(y-y_1) - H(y-y_2)] \end{aligned} \quad (22)$$

其中,

$$C_0 = -E_b \frac{1+\mu_p}{1-\mu_b} \frac{P}{1+\mu_b-(1+\mu_p)P} \frac{1}{6} h_b^2 \quad (23)$$

$$P = -\frac{E_p}{E_b} \frac{1-\mu_b^2}{1-\mu_p^2} K \quad (24)$$

$$K = \frac{6h_b h_p (h_b + h_p)}{(h_b^3 + 8h_p^3) + 6h_b h_p} \quad (25)$$

因此,对于仅依赖于压电执行器提供外力矩的薄板振动系统:

$$D_b \nabla^4 w + \rho_b h_b \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 m_y}{\partial y^2} \quad (26)$$

压电执行器作用在薄板表面上的外载荷可以由下式计算:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} &= C_0 \varepsilon_p [\delta'(x-x_1) - \delta'(x-x_2)] \cdot \\ &\quad [H(y-y_1) - H(y-y_2)] \\ \frac{\partial^2 m_y}{\partial y^2} &= C_0 \varepsilon_p [H(x-x_1) - H(x-x_2)] \cdot \\ &\quad [\delta'(y-y_1) - \delta'(y-y_2)] \end{aligned} \quad (27)$$

采用独立模态空间控制法,将板的挠度按主振型展开为如下双重级数形式:

$$w(x, y, t) = \sum_i^\infty \sum_j^\infty W_{i,j}(x, y) q_{i,j}(t) \quad (28)$$

由于薄板主振型的正交性,可将式(28)在模态空间中解耦:

$$\ddot{q}_{r,s}(t) + \omega_{r,s}^2 q_{r,s}(t) = B_m u \quad (29)$$

### 1.2.1 压电执行器

式(29)中,  $B_m u = F_{piezo}$  是广义力,可由下式计算:

$$F_{piezo} = \iint_{A_b} \left( \frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 m_y}{\partial y^2} \right) W_{r,s}(x, y) dx dy \quad (30)$$

$u$  为压电执行器的控制输入电压.

由方程(30)可得:

$$B_m = K a \left[ \int_{y_1}^{y_2} \left( \frac{\partial W_{i,j}(x_1, y)}{\partial x} - \frac{\partial W_{i,j}(x_2, y)}{\partial x} \right) dy + \right]$$

$$\left. \int_{x_1}^{x_2} \left( \frac{\partial W_{i,j}(x, y_1)}{\partial y} - \frac{\partial W_{i,j}(x, y_2)}{\partial y} \right) dx \right] \quad (31)$$

其中,

$$Ka = \frac{C_0 d_{31}}{\rho h_b h_p} \quad (32)$$

### 1.2.2 压电传感器

由于压电传感器层相对板厚度更薄,假定其应变在压电层内为常数且都等于板外表面的应变.因此,应变可简化计算:

$$\varepsilon_x^p = -r^p \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \varepsilon_y^p = -r^p \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (33)$$

其中,  $r^p$  为压电片到薄板中性轴的距离,即  $r^p = h_b/2$ .

在压电传感器中,上下电极面内平均感生电压为:

$$V_3 = \frac{h_p}{A_p} \int_{A_p} h_{31} (\varepsilon_x^p + \varepsilon_y^p) dx dy \quad (34)$$

其中,  $A_p$  为压电片面积.

将式(27)和式(33)代入方程(34)积分可得传感器输出电压:

$$V_3 = \sum_i^\infty \sum_j^\infty C_m q_{i,j}(t) \quad (35)$$

其中,

$$\begin{aligned} C_m = K_s \left[ \int_{y_1}^{y_2} \left( \frac{\partial W_{i,j}(x_1, y)}{\partial x} - \frac{\partial W_{i,j}(x_2, y)}{\partial x} \right) dy + \right. \\ \left. \int_{x_1}^{x_2} \left( \frac{\partial W_{i,j}(x, y_1)}{\partial y} - \frac{\partial W_{i,j}(x, y_2)}{\partial y} \right) dx \right] \end{aligned} \quad (36)$$

$$K_s = \frac{d_{31} h_b h_p}{2(\varepsilon_{33}^T \cdot s_{11}^E + \varepsilon_{33}^T \cdot s_{12}^E - 2d_{31}^2)(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)} \quad (37)$$

### 1.3 状态空间

将一维压电梁、二维压电板的耦合动力学方程转化到状态空间,在模态空间中引入状态空间变量:

$$\begin{aligned} X(t) = [q_1(t), q_2(t), \dots, q_n(t), \dot{q}_1(t), \\ \dot{q}_2(t), \dots, \dot{q}_n(t)]^T \end{aligned} \quad (38)$$

可将压电梁、板系统转化到状态空间.在状态空间形式上,压电梁、板系统具有同一性,

$$\begin{aligned} \dot{X}(t) &= AX(t) + Bu(t) \\ Y(t) &= CX(t) \end{aligned} \quad (39)$$

其中,状态矩阵  $A$  为:

$$A = \begin{pmatrix} 0_{n \times n} & I_{n \times n} \\ -\Lambda_{n \times n} & -2\zeta_i \omega_{i n \times n} \end{pmatrix} \quad (40)$$

对单压电执行器/传感器作用于压电梁、板结构的振动主动控制系统而言,即单输入单输出系统。控制矩阵  $B$ 、输出矩阵  $C$  分别为:

$$B = \begin{bmatrix} 0_{n \times 1} \\ (B_i)_{n \times 1} \end{bmatrix} \quad (41)$$

$$C = [(C_i)_{1 \times n} \quad 0_{1 \times n}] \quad (42)$$

对于压电悬臂梁,  $B_i C_i$  分别由方程(15)和(18)计算可得。对于压电矩形板,  $B_m C_m$  分别由方程(31)和(36)计算可得。

## 2 压电陶瓷布局分析

由上节推导可知,对于压电悬臂梁和压电矩形板,在模态空间中存在:

$$B_i \propto C_i, B_m \propto C_m \quad (43)$$

即在第  $m$  阶模态振动下,在板的某一位置使得  $C_m$  值越大,压电传感器的输出电压也就越大,相应地  $B_m$  值也就越大,因而可以提供较小的输入电压  $u$ ,就可达到同等水平的控制作用。由此可见,对于压电梁、板模态振动主动控制压电片在梁、板结构上的布局优化问题,即转化为寻求压电传感器输出电压最大的压电片布局。压电智能结构电压:

$$V_3 = \int_0^{h_p} E_3 dz \quad (44)$$

结合压电本构关系,对梁有

$$V_3 = h_p (h_{31} \varepsilon_x^p - \beta_{33}^S D_3) \quad (45)$$

对板有

$$V_3 = h_p (h_{31} \varepsilon_x^p + h_{31} \varepsilon_y^p - \beta_{33}^S D_3) \quad (46)$$

可见,在无外源场强下,对于梁,同一材质压电传感器输出电压

$$V_3 \propto \varepsilon_x^p \quad (47)$$

同理,对于板

$$V_3 \propto (\varepsilon_x^p + \varepsilon_y^p) \quad (48)$$

由于压电陶瓷片厚度相较于基梁、板厚度较小,因此假定其应变在压电层内为常数,且都等于板外表面的应变,即压电梁、板模态振动主动控制压电片在梁、板结构上的布局优化问题,即转化为寻求悬臂梁应变  $\varepsilon_x$  最大,矩形薄板  $x, y$  方向应变和  $(\varepsilon_x + \varepsilon_y)$  最大的压电片布局。

## 2.1 悬臂梁应变模态

$r^p$  为压电片到悬臂梁中性轴的距离,近似为  $r^p = h_b/2$ 。悬臂梁应变为:

$$\varepsilon(x) = \frac{h_b}{2} \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} \quad (49)$$

图 4 所示为悬臂梁前两阶应变模态图,其中红色圆圈代表压电悬臂梁的应变模态极大值坐标,一阶应变模态极值点  $x=0$ ,二阶  $x=0, x=0.53l$ 。

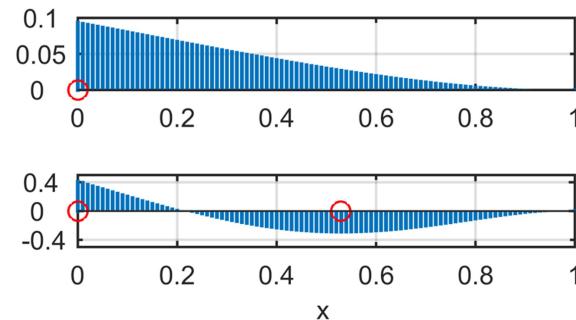


图 4 悬臂梁前两阶应变模态图

Fig.4 Cantilevered beam's first two orders strain modes diagram

## 2.2 四边固支薄板应变模态:

与压电悬臂梁作类似简化  $r^p = h_b/2$ , 则矩形板应变为:

$$(\varepsilon_x + \varepsilon_y) = \frac{h_b}{2} \left( \frac{\partial^2 w(x, y, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w(x, y, t)}{\partial y^2} \right) \quad (50)$$

图 5 所示为四边固支板前两阶应变模态的等高线图,从图中可知一阶应变最大在矩形板中心。二阶应变模态在长度中轴线上会出现节线,节线处应变为零,节线两侧应变符号反向,因此,应避免将压电片布局在应变节线处。

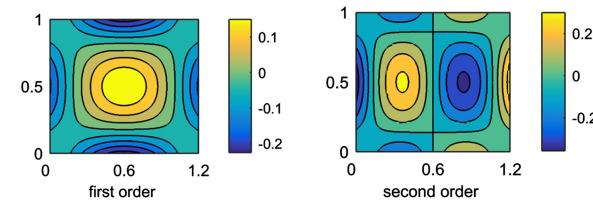


图 5 四边固支板前两阶应变模态

( $x$  方向应变与  $y$  方向应变之和) 等高线图

Fig.5 The firsttwo orders modal strain contour map of the four-sided support plate

## 3 压电智能结构主动控制仿真

### 3.1 压电悬臂梁仿真

本节以具体的压电悬臂梁为例,用 Simulink 工

具箱采用 LQR 控制策略针对系统的前两阶模态进行独立模态空间控制.梁与压电传感器及压电执行器尺寸如表 1 所示.

表 1 压电悬臂梁的材料属性

Table 1 Piezoelectric cantilevered beam material properties

Parameters	Actuator (PZT-5A)	Sensor (PZT-5A)	Beam (Steel)
Young's modulus(GPa)	63	63	200
Poisson's ratio	0.3	0.3	0.33
Electric modulus(m/V)	171e-12	171e-12	0
Length(mm)	17.5	17.5	260
Width(mm)	17.5	17.5	13
Thickness(mm)	0.3	0.3	0.5
Density(kg/m <sup>3</sup> )	7650	7650	7850

考虑悬臂梁第一、第二阶应变模态.分别在梁上的 5 处不同位置对称粘贴压电传感器/执行器如图 6 所示,压电片的左端点位置分别为  $x_1 = [0, 0.15, 0.18, 0.22, 0.65] \cdot l_b$ , 压电片的长为  $l_p = 0.067l_b$ , 即红色短线所示, 观察压电执行器在不同位点的控制效果. 梁端部位移模态响应图及输入的控制电压图如图 7 和图 8 所示.

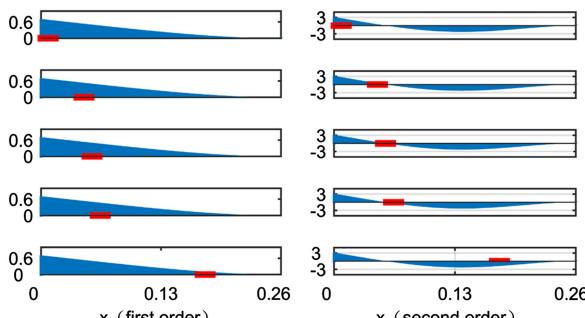


图 6 一、二阶振型自由振动下压电片各位点相对位置图

Fig.6 The relative positions of the piezoelectric slices at the first two orders free vibration

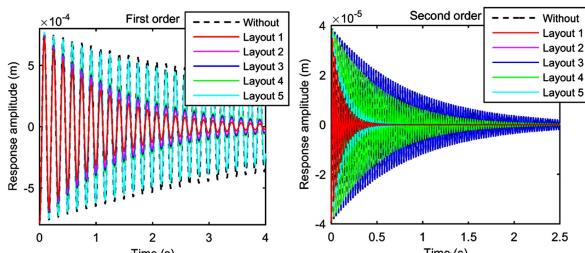


图 7 一、二阶振型自由振动下各位点减振效果图

Fig.7 Vibration attenuation effect at each position of the first two orders free vibration

结合图 6(左)、7(左)、8(左)可以看到,一阶

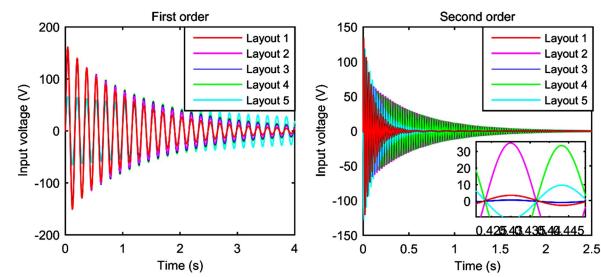


图 8 一、二阶振型自由振动下各位点执行器控制电压图

Fig.8 Actuation control voltage at each position of the first two orders free vibration

模态下随着压电片远离固定端, 应变越来越小, LQR 方法的控制效果越弱. 在悬臂梁根部压电执行器主动控制所需电压量级与在端部(应变接近零处)所需电压量级差别不大, 但压电执行器作用在根部移振幅衰减速度更快, 衰减幅度更大. 结合图 7(右)和图 8(右)在二阶模态下一、二、三号位的端部位移图及输入电压图可知, 随着应变的减小, 控制效果越差; 比较二、四号位的端部位移图及输入电压图可知, 在应变的节点左右两侧, 相位相差 180 度. 四、五号位的对比, 也辅助证明了应变越大的位点粘贴压电片控制效果越好. 在位点接近二阶应变模态节点处( $x_1 = 0.22l_b$ )几乎无控制作用. 可见压电片布局应避开应变节点.

控制的目标是通过尽可能小的力, 达到快速收敛的效果. 无疑, 在前两阶模态上, 将压电片粘贴在应变最大的位点将能得到最优的控制效果.

### 3.2 压电矩形板仿真

类似地, 以四边固支矩形压电板为例, 在给定初始模态位移下, 采用 LQR 控制控制板的前两阶模态, 来验证主动控制抑振的有效性, 并分析不同压电布局对于控制效果的影响. 仿真参数如表 2 所示.

表 2 压电智能板材料属性

Table 2 Piezoelectric plate material properties

Material	Young's modulus (Pa)	Density (kg/m <sup>3</sup> )	Poisson's ratio	Size (mm)
Aluminum	7e10	2700	0.3	360 * 300 * 3
PZT-5A	6.3e10	7750	0.3	50 * 50 * 0.3

压电矩形板一阶固有频率为 246.4 Hz, 二阶固有频率为 450.1 Hz. 针对薄板前两阶模态分别设计如图 9 所示的压电片布局方案. 方案 1~6 压电执行器中点坐标分别为  $(a/2, b/2)$   $(3a/20, b/2)$   $(a/2, 3b/20)$   $(a/2, b/2)$   $(a/3, b/2)$   $(a/3, b/5)$ . 在一阶模

态下,选取板中点( $a/2, b/2$ )处的响应作为观测点;二阶模态下,选取板( $a/3, b/2$ )处的响应作为观测点。

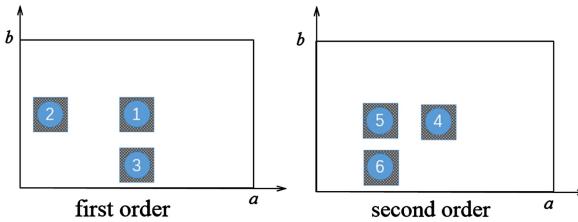


图 9 三种压电执行器布局方案示意图

Fig.9 Schematic diagram of three layouts for actuators

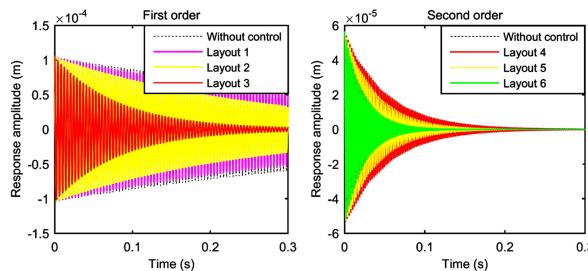


图 10 三种布局方案位移响应对比图

Fig.10 Comparison of displacement responses for three layouts

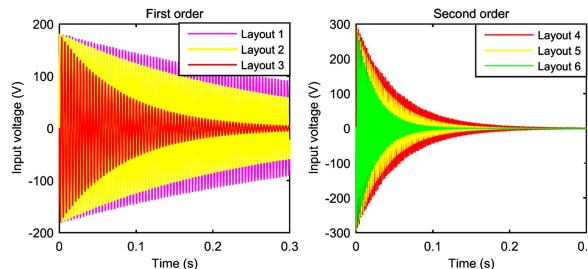


图 11 三种布局方案控制电压对比图

Fig.11 Comparison of actuation control voltage for three layouts

由图 5 可知,在一阶模态下,板中心为一阶应变模态最大处,为最佳粘贴布局,对比图 10(左)和图 11(左)中橙线,结果表明方案 1,即一阶应变模态最大处的响应衰减最迅速,并且控制输入的电压相对最小。可见,将压电执行器粘贴在应变最大处控制效果最好。

同理,图 10(右)和图 11(右)结果表明,方案 5(图中绿线),即二阶应变模态最大处的响应衰减最迅速,并且控制输入的电压相对最小。可见,将压电执行器粘贴在应变最大处控制效果最好。值得注意的是,板的中心为二阶应变模态零点处,方案 4 的布局覆盖了板横向和纵向的应变节线,沿节线两侧的应变相位相差 180 度,响应曲线与未控制完全

重合,也就是说在此处对于二阶模态的控制几乎无效。

#### 4 压电悬臂梁主动控制实验分析

压电悬臂梁主动控制实验装置如图 12 所示。在对梁自由振动主动控制时,将一对压电传感器和压电执行器对称粘贴在悬臂梁靠近根部的两侧;在对梁一、二阶模态共振进行主动控制时,将两对压电传感器和压电执行器分别对称分布在悬臂梁根部的两侧和梁中部二阶应变模态最大处的两侧。

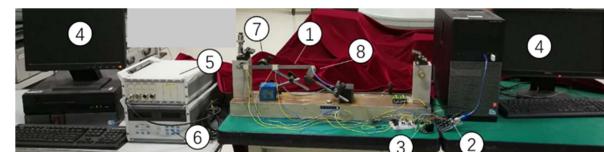


图 12 压电悬臂梁控制实验装置图

(1-压电悬臂梁;2-Arduino Uno 控制板;3-L298N 驱动器;  
4-PC;5-信号采集仪;6-信号发生器;7-非接触式激振器;  
8-电涡流位移传感器)

Fig.12 Piezoelectric cantilevered beam control experimental device

当压电悬臂梁发生振动时,压电传感器根据梁应变特征输出电压信号,通过 Arduino Uno 板的模拟信号输入引脚将信号读入到 PC 端 Simulink 中,经过数字滤波过滤掉高阶噪声以及低阶的电压漂移,然后经过 PD 控制策略,得到输出的控制电压信号,控制电压信号从 Simulink 传输入 Arduino Uno 板,再经由 Arduino 的 PWM 输出引脚输出特定频率脉冲调制信号,经过 L298N 的双 H 桥输出模拟信号,用以驱动压电执行器抑制悬臂梁的振动。从而构成完整的主动控制闭环回路。其中 L298N 的驱动能量由两节 9V 积层电池串联供能。实验压电悬臂梁的参数同表 1. 表 3 列出了压电悬臂梁的前两阶固频的理论值与实测值。

表 3 前两阶固频

Table 3 The first two orders natural frequency

Natural frequency	Theoretical value	Experimental value
First order	6.0 Hz	5.8 Hz
Second order	37.8 Hz	33.9 Hz

#### 4.1 由衰减振动控制

实验的设计如图 13 所示,压电传感器和执行器粘贴在距离梁根部 4cm 处。给定初位移 15mm,测试控制前后梁自由衰减振动曲线并比较。

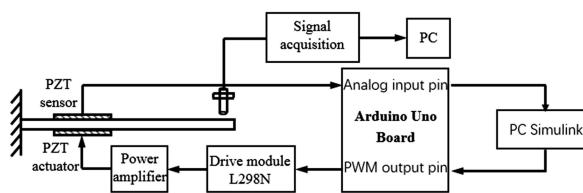


图 13 压电悬臂梁自由衰减振动控制示意图

Fig.13 Schematic diagram of free attenuation vibration control system

图 14(a)表示在初始位移为 15mm 下,压电悬臂梁系统压电传感器在控制前后的自由振动衰减曲线,控制前(虚线)阻尼比为 0.0026,控制后(实线)阻尼比为 0.013.图 14(b)表示由 PD 控制所需要输入的控制电压曲线,以及经过限位操作后的等效 Bang-Bang 控制输入电压曲线.

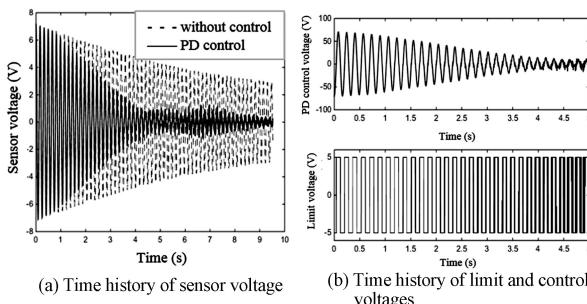


图 14 自由衰减振动控制

(初始位移 15mm)

Fig.14 Curves of free attenuation vibration control system

(initial tip displacement is 15mm)

可见,利用 Arduino 控制板进行主动控制,得到比较明显的振动抑制效果,阻尼比相较于未施加控制时提高了 5 倍.控制响应速度较快,在 4s 内将梁端部位移衰减到 1mm 以下.受实验测试条件的限制,本次实验的有效信号在 0.4V 以上,即梁的端部位移大于等于 0.5mm.

#### 4.2 一、二阶模态共振下的振动控制

实验的设计如图 15 所示,两对压电陶瓷分别粘贴在距离梁根部 1cm 和 11.5cm 处.采用非接触式激振器持续激励压电悬臂梁系统,使系统分别处于一、二阶模态共振状态.通过控制开关 I 和开关 II 施加控制.

图 16 所示为压电悬臂梁在一、二阶模态共振下的振动控制效果,在第 6s 处施加控制.从(1a)和(2a)、(1b)和(2b)的对比中可以验证在理论计算中得到的结论,压电执行器控制输入在梁振动应变较大处控制效果较好.

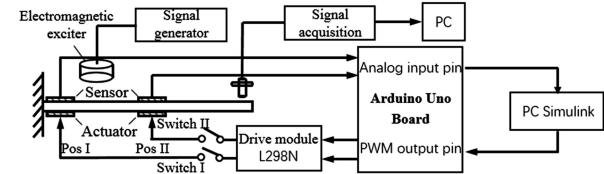


图 15 压电悬臂梁一、二阶模态共振下的振动控制示意图

Fig.15 Schematic diagram of first and second modal resonance vibration control system

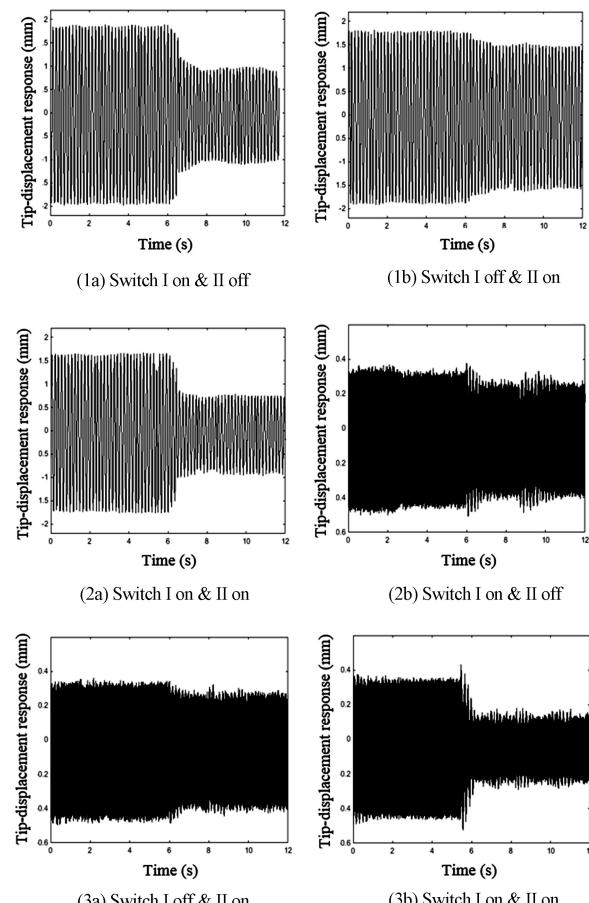


图 16 一、二阶模态共振下的振动控制效果图

Fig.16 The response diagram of beam before and after control when excitation reaches first and second modal resonance

综合来看,该控制系统在前两阶模态控制上效果显著.5V 的压电执行器输入上限对于系统的控制能量有限,选择最优的控制位置、增加压电执行器的数量可以有效降低模态共振的峰值.

## 5 结论

本文应用哈密顿原理,推导了压电悬臂梁的耦合动力学方程组,并运用模态分析理论将其转化到状态空间,通过 LQR(线性二次型调节器)控制方法对压电悬臂梁模型前两阶模态振动进行主动控

制(闭环反馈控制)仿真,取得了比较好的控制效果,将独立模态空间控制法从一维梁结构扩展到二维板结构.建立了压电矩形板的动力学方程,并分析比较了压电陶瓷不同的布局对于控制效果的影响,结果表明在应变较大的位置粘贴压电执行器效果更好.

通过设计基于 Arduino Uno 板的振动主动控制实验,用 PD(比例-微分控制器)与 Bang-Bang 相结合的控制方法研究对压电悬臂梁的主动控制效果.实验结果表明:

(1) Arduino Uno 板结合经典的 PID 控制方法以及 Bang-Bang 控制方法对压电悬臂梁的主动控制方便而有效.在自由振动中使用这种控制手段将阻尼比提高了 5 倍,达到较明显的抑振效果.在模态共振下进行主动控制,亦可观察到较明显的幅值衰减.

(2) 压电执行器作用于悬臂梁的各阶应变最大处的抑振效果较好.为进一步利用压电陶瓷做分布式结构动力学主动控制提供了理论和实验依据.

(3) 在输入功率有上限的情况下(弱电压),增加压电执行器的数量可以有效降低模态共振的峰值.

## 参考文献

- 1 Bailey T, Ubbard J E. Distributed piezoelectric-polymer active vibration control of a cantilever beam. *Journal of Guidance Control & Dynamics*, 1985, 8(5):23
- 2 梅胜敏,陶宝祺,秦太验. 压电作动器用于振动主动控制技术的研究. 航空学报, 1997, 18(1): 100~103 (Mei S M, Tao B Q, Qin T Y. Studies on the technology of active vibration control by using piezoelectric actuators. *Acta Aeronautica Et Astronautica Sinica*, 1997, 18(1): 100~103 (in Chinese))
- 3 孙东昌. 智能板振动控制的分布压电单元法. 力学学报, 1996, 28(6):693~699 (Sun D C. Distributed piezoelectric element method for vibration control of smart plates. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 1996, 28(6):693~699 (in Chinese))
- 4 李岳峰,朱德懋,姚军等. 压电梁振动的多输入多输出主动控制. 振动工程学报, 1998(1):9~17 (Li Y F, Zhu D M, Yao J , et al. Multiple input multiple output active vibration control for piezoelectric beams. *Journal of Vibration Engineering*, 1998(1):9~17 (in Chinese))
- 5 马治国,闻邦椿,颜云辉. 压电智能梁的拉伸—弯曲耦合模型. 机械工程学报, 1999, 35(5):63~64 (Ma Z G, Wen B C, Yan Y H. Tension-bending coupling model of piezoelectric intelligent beams. *Chinese Journal of Mechanical Engineering*, 1999, 35(5):63~64 (in Chinese))
- 6 Crawley E F. Intelligent structures for aerospace—A technology overview and assessment. *AIAA Journal*, 1994, 32(8):1689~1699
- 7 Wang B T, Rogers C A. Laminate plate theory for spatially distributed induced strain actuators. *Journal of Composite Materials*, 1991, 25(4):433~452
- 8 Tani J, Qiu J. Vibration control of cylindrical shells using distributed piezoelectric sensors and actuators. In: Ieee/Asme International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics '97. Final Program and Abstracts, 1995:65
- 9 Qiu J, Tani J, Ohtomo K. Vibration control of a multi-layer piezoelectric cylindrical shell. *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers*, 1998, 64(619):811~818
- 10 Zhu Y E, Qiu J, Tani J, et al. Vibration control of a steering wheel using piezoelectric actuators. *Journal of Intelligent Material Systems & Structures*, 1999, 10(2):92~99
- 11 王晓明,周文雅,寻广彬等. 带有振动抑制的压电结构动态形状主动控制. 宇航学报, 2017, 38(2):185~191 (Wang X M, Zhou W Y, Xun G B, et al. Dynamic shape control of piezoelectric structures with vibration suppression. *Journal of Astronautics*, 2017, 38(2):185~191 (in Chinese))
- 12 张书扬,张顺琦,李靖等. 基于 PID 算法的压电智能结构形状与主动振动控制. 西北工业大学学报, 2017, 35(1):74~81 (Zhang S Y, Zhang S Q, Li J, et al. Shape control and active vibration control of piezoelectric smart structures with PID algorithm. *Journal of Northwestern Polytechnical University*, 2017, 35(1):74~81 (in Chinese))
- 13 Crawley E F, Luis J D. Use of piezoelectric actuators as elements of intelligent structures. *AIAA Journal*, 1987, 25(10):1373~1385
- 14 Kwak M K, Heo S. Active vibration control of smart grid structure by multinput and multioutput positive position feedback controller. *Journal of Sound & Vibration*, 2007, 304(1):230~245

- 15 王会利,李凯翔,陈春兰等.飞机典型壁板结构主动振动控制试验研究.机械科学与技术,2013,32(10):1532~1536 (Wang H L, Li K X, Chen C L, et al. Experimentally investigating active vibration control of panel structure of airplane. *Mechanical Science and Technology*, 2013,32(10):1532~1536 (in Chinese))
- 16 李靖.风车式压电发电装置研究[硕士学位论文].南京:南京航空航天大学,2015 (Li J. Research on the windmill-type energy harvesting device using piezoelectric materials [Master Thesis]. Nanjing: Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, 2015 (in Chinese))
- 17 史丽萍.多次压电效应探析及在传感执行器上的应用基础研究[博士学位论文].大连:大连理工大学,2006 (Shi L P. Analysis of multiple piezoelectric effects and applied research on sensor actuators [Ph.D Thesis]. Dalian: Dalian University of Technology, 2006 (in Chinese))

## ACTIVE CONTROL OF PIEZOELECTRIC STRUCTURES AND OPTIMAL PLACEMENT OF PIEZOELECTRIC ACTUATORS<sup>\*</sup>

Tao Hongfei Cui Sheng<sup>†</sup>

(Department of Aeronautics and Astronautics, Fudan University, Shanghai 200433, China)

**Abstract** The active vibration control of piezoelectric beam and plate structures was studied. The coupling dynamic equations of a piezoelectric cantilevered beam and a rectangular piezoelectric plate under the Kirchhoff assumption were established, respectively. The independent modal-space control method was used to achieve the active vibration control of the first two modes of the piezoelectric structures. In order to improve the vibration suppression effect of the active control, the influence of the layout of a piezoelectric actuator on the beam was analyzed through numerical simulations, and the optimal layout of the piezoelectric actuator adhered to the cantilevered beam was obtained. Finally, the feasibility and effectiveness of piezoelectric actuators for response control of cantilevered beams under free vibration and modal resonance were verified by experiments.

**Key words** piezoelectric ceramics, intelligent structure, active control, optimization