

# 基于传递函数法的带外挂大柔性机翼颤振分析\*

张忠源<sup>1†</sup> 段静波<sup>2</sup> 路平<sup>1</sup> 王龙<sup>3</sup>

(1.陆军工程大学石家庄校区 无人机工程系, 石家庄 050003)

(2.石家庄铁道大学 工程力学系, 石家庄 050003)

(3.武警新疆总队直升机大队, 乌鲁木齐 830017)

**摘要** 基于带外挂大柔性机翼结构和气动特点,使用带有半解析半数值特性的传递函数方法进行处理.首先,将变形后的柔性机翼视为曲梁,基于曲梁的运动微分方程,结合传递函数方法,将曲梁运动微分方程整理成状态空间方程形式.然后,借鉴有限元方法的思想将单元进行组集,组集时结合机翼挂载处内力平衡和位移协调条件,得到了机翼整体平衡方程,结合求解复特征值的方法,完成了带外挂大展弦比大柔性机翼的动气动弹性稳定性分析.对比通过有限元方法得到的仿真结果,证实了文章提出计算方法的准确性和高效性.文章结尾,分析了外挂质量、转动惯量、位置分布及数量等变量对带外挂大展弦比大柔性机翼的动气动弹性稳定性的影响.

**关键词** 大展弦比, 柔性机翼, 外挂, 颤振, 传递函数法

DOI: 10.6052/1672-6553-2018-056

## 引言

大展弦比大柔性的机翼具有重量轻、结构面密度低的特性,在飞行载荷作用下机翼几何弯曲和扭转变形程度大,机翼平衡态和未变形结构相比有明显的几何差异,其气动弹性问题十分突出.特别会在机翼下安装外挂,这将会很大程度上改变机翼的气动弹性稳定性,如图 1 所示.



图 1 带外挂飞机

Fig.1 The plane with external store

国内外学者针对此类问题进行的研究成果如下:谢长川等分别结合机翼的片条理论和三维升力线理论对大展弦比机翼颤振特性进行了分析<sup>[1-3]</sup>;

周洲等用几何精确地描述了柔性机翼的几何非线性弹性变形,并使用有限元计算软件 Fluent 求解气动力,从而进行流固耦合求解<sup>[4,5]</sup>;Palacios 与 Cesnik 则采用计算结构力学(CSD)与计算流体力学(CFD)耦合计算的方法研究了大展弦比机翼的非线性静气动弹性响应问题<sup>[6]</sup>;王伟基于 CR 理论和气动力的 ONERA 方法也对大柔性飞机非线性气动弹性响应问题进行了计算<sup>[7]</sup>;张健等分析了侧向随动力影响下大展弦比大柔性机翼颤振特性<sup>[8,9]</sup>;叶炜梁等针对机翼翼梢带外挂情况,采取 v-g 法和 Therdorson 气动力的偶极子有限元划分法来解决此类问题<sup>[10]</sup>;Yang Y R 为解决极限环颤振问题,采用 KBM 方法分析了飞行器带外挂系统和小展现比机翼两种模型的气动特性<sup>[11]</sup>;Karpel M 运用一种根据模态分析建立的耦合技术,主要针对机翼的气动弹性和气动主动控制问题<sup>[12]</sup>;Liviu Librescu 等结合复合材料的特性及力学特性,分析了带外挂复合材料机翼的颤振特性及其响应问题<sup>[13]</sup>;为解决飞行器带外挂滚转运动时的气动弹性问题,Fazelzadeh 等利用 Hamilton 变分原理提出

2018-05-07 收到第 1 稿,2018-06-12 收到修改稿.

\* 国家自然科学基金资助项目(11702325)

† 通讯作者 E-mail: 121943464@qq.com

气动弹性控制方程,数值模拟验证了机翼颤振速度以及可用的理论和实验结果<sup>[14]</sup>;周秋萍等通过颤振边界曲线得到极限环相图方法,解决了飞行器气动系统极限环分析<sup>[15]</sup>;Ozcan等通过机翼气动建模,然后进行数值计算方法和实验测试对带外挂机翼的颤振结果分析<sup>[16]</sup>;为解决间隙非线性问题, Deman Tang等利用冯卡门板理论对翼结构进行理论模拟,从而得到了带外挂刚性机翼的气动特性<sup>[17]</sup>;Chen Y M等将谐波平衡的方法用于解决带外挂机翼的非线性气动弹性问题<sup>[18]</sup>;许军等由Hamilton原理求得带外挂刚性机翼的颤振微分方程,得到了带外挂刚性机翼在进行弯扭运动时的气动弹性结果<sup>[19]</sup>;P.Hamid等采用Hamilton原理和Peter's有限状态空气动力学模型,研究了带外挂飞机机翼的气动弹性颤振分析<sup>[20]</sup>;段静波等将传递函数方法应用于大展弦比机翼颤振分析,研究了大展弦比机翼的颤振特性<sup>[21]</sup>。

本文将基于传递函数方法解决带外挂大柔性机翼的气动弹性问题,基于曲梁的运动微分方程,结合传递函数方法进行整理运算,借鉴有限元思想对单元进行组集时考虑机翼挂载处内力平衡和位移协调条件,通过求解特征值方法完成对带外挂柔性机翼的颤振分析。

## 1 机翼颤振模型

对图2所示带外挂柔性机翼进行颤振分析,本文的求解思路如下:大展弦比柔性机翼静变形后可视为一根曲梁,根据曲梁单元运动微分方程和机翼非定常气动模型,得出单元柔性机翼颤振微分方程,而后得出机翼单元的传递函数,组装单元时,对机翼外挂通过内力平衡与位移状态条件处理,最后进行求解计算。

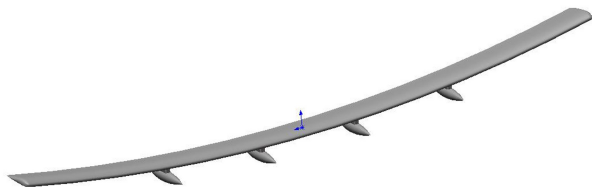


图2 带外挂柔性机翼

Fig.2 The flexible wing with external store

### 1.1 机翼的颤振微分方程

选取曲梁单元如图3,  $x$  坐标轴沿曲梁切向,  $y$

坐标轴沿曲梁径向,  $z$  坐标轴沿曲梁竖向, 曲率用  $R$  表示。

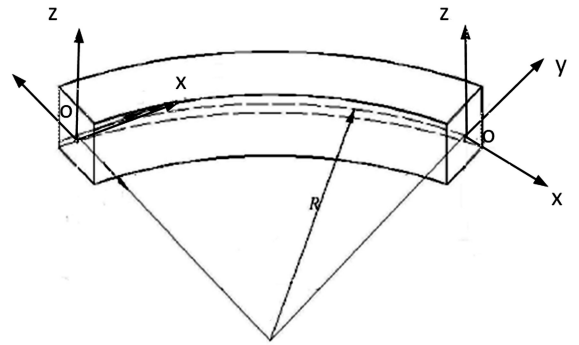


图3 曲梁单元自然坐标系

Fig.3 The natural coordinate of curve beam elements

基于曲梁六自由度振动方程和Theodorsen气动模型,推导出柔性机翼单元的颤振微分方程:

$$\begin{cases}
 \frac{kGA}{R} \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{u}{R} - \psi_z \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left[ EA \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{w}{R} \right) \right] = \rho A \ddot{u} \\
 \frac{\partial}{\partial x} \left[ kGA \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{u}{R} - \psi_z \right) \right] - \frac{EA}{R} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{w}{R} \right) - \\
 \pi \rho b^2 (\ddot{w} + V \dot{\varphi}_x - b \bar{a} \varphi_x) - \\
 2\pi \rho V b C(\omega, V) \left( V \varphi_x + \dot{w} + b \left( \frac{1}{2} - \bar{a} \right) \varphi_x \right) \\
 = \rho A \ddot{w} - \rho A z_\alpha \ddot{\varphi}_x \\
 \frac{\partial}{\partial x} \left( EI \frac{\partial \psi_z}{\partial x} \right) + kGA \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{u}{R} - \psi_z \right) = \rho I \ddot{\psi}_z \\
 \frac{\partial}{\partial x} \left[ kGA \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \psi_y \right) \right] = \rho A \ddot{v} \\
 \frac{\partial}{\partial x} \left[ EI_y \left( \frac{\partial \psi_y}{\partial x} + \frac{\varphi_x}{R} \right) \right] - kGA \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \psi_y \right) + \frac{GJ}{R} \left( \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} - \frac{\psi_y}{R} \right) \\
 = \rho I_y \ddot{\psi}_y \\
 \frac{\partial}{\partial x} \left[ GJ \left( \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} - \frac{\psi_y}{R} \right) \right] - \frac{EI_y}{R} \left( \frac{\partial \psi_y}{\partial x} + \frac{\varphi_x}{R} \right) + \\
 \pi \rho b^2 \left( b \bar{a} \ddot{w} - V b \left( \frac{1}{2} - \bar{a} \right) \dot{\varphi}_x - b^2 \left( \frac{1}{8} + \bar{a}^2 \right) \varphi_x \right) + \\
 2\pi \rho V b^2 \left( \frac{1}{2} + \bar{a} \right) C(\omega, V) \left( V \varphi_x + \dot{w} + b \left( \frac{1}{2} - \bar{a} \right) \varphi_x \right) \\
 = \rho I_\rho \ddot{\varphi}_x - \rho A z_\alpha \ddot{w}
 \end{cases} \quad (1)$$

其中,  $u, w, v$  表示曲梁单元沿坐标轴  $x, y, z$  三个方向的位移,  $\psi_z, \psi_y, \varphi_x$  表示为曲梁单元绕  $z, y, x$  坐标轴的扭转角,  $\ddot{u}, \ddot{w}, \ddot{v}, \ddot{\psi}_z, \ddot{\psi}_y, \ddot{\varphi}_x$  分别表示  $u, w, v, \psi_z, \psi_y, \varphi_x$  对时间的二阶导数,  $\rho$  为曲梁的密度,  $A$  为曲

梁单元截面积。 $E$ 表示拉伸弹性模量, $G$ 表示剪切弹性模量, $k$ 表示剪切刚度修正系数。 $z_0$ 为弹性轴到质心轴的距离。 $I_z, I_y, J$ 分别为绕坐标轴 $z, y, x$ 三个方向的惯性矩。 $t$ 为时间。 $k = \omega b/V$ 表示机翼折合频率,为无量纲参数, $C(k)$ 是Theodorsen函数,因为 $k$ 为 $\omega$ 和 $V$ 的函数,可以把 $C(k)$ 表示成 $C(\omega, V)$ ,公式中其它变量含义参考文献[22]。

## 1.2 机翼单元的传递函数

将颤振计算微分方程进行傅里叶变换,化简处理,可得出状态空间方程:

$$\frac{\partial \boldsymbol{\eta}_e(x, \omega)}{\partial x} = \mathbf{F}_e(\omega, V) \boldsymbol{\eta}_e(x, \omega) + \mathbf{g}_e(x, \omega) \quad (2)$$

其中, $\mathbf{g}_e(x, \omega) = \mathbf{0}$ ,  $\boldsymbol{\eta}_e(x, \omega)$ 为单元状态向量,

$$\boldsymbol{\eta}_e(x, \omega) = \begin{bmatrix} u & \frac{\partial u}{\partial x} & w & \frac{\partial w}{\partial x} & \psi_z & \frac{\partial \psi_z}{\partial x} \\ v & \frac{\partial v}{\partial x} & \psi_y & \frac{\partial \psi_y}{\partial x} & \varphi_x & \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \end{bmatrix}^T$$

转移矩阵 $\mathbf{F}_e(\omega, V)$ 为 $12 \times 12$ 的方阵,矩阵中非零元素见附录A。

边界条件:

$$\mathbf{M}_b \boldsymbol{\eta}_e(0, \omega) + \mathbf{N}_b \boldsymbol{\eta}_e(l, \omega) = \boldsymbol{\gamma}_e(\omega) \quad (3)$$

其中, $l$ 表示单元长度, $\mathbf{M}_b, \mathbf{N}_b$ 表示由机翼单元端点条件得到的选择矩阵,均为 $12 \times 12$ 的方阵,其非零元素为:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_b(1,1) &= 1, \mathbf{M}_b(2,3) = 1, \mathbf{M}_b(3,5) = 1 \\ \mathbf{M}_b(4,7) &= 1, \mathbf{M}_b(5,9) = 1, \mathbf{M}_b(6,11) = 1 \\ \mathbf{N}_b(7,2) &= 1, \mathbf{N}_b(8,4) = 1, \mathbf{N}_b(9,6) = 1 \\ \mathbf{N}_b(10,8) &= 1, \mathbf{N}_b(11,10) = 1, \mathbf{N}_b(12,12) = 1 \end{aligned}$$

$\boldsymbol{\gamma}_e(\omega)$ 内有力和位移等元素,具体为:

$$\boldsymbol{\gamma}_e(\omega) = [u(0, \omega) w(0, \omega) \psi_z(0, \omega) \\ v(0, \omega) \psi_y(0, \omega) \varphi_x(0, \omega) \\ u(l, \omega) w(l, \omega) \psi_z(l, \omega) \\ v(l, \omega) \psi_y(l, \omega) \varphi_x(l, \omega)]^T$$

方程(2)的传递函数解为:

$$\boldsymbol{\eta}_e(x, \omega) = \mathbf{H}_e(x, \omega, V) \boldsymbol{\gamma}_e(\omega) \quad (4)$$

其中,

$$\mathbf{H}_e(x, \omega, V) = e^{\mathbf{F}_e(\omega, V)x} [\mathbf{M}_b + \mathbf{N}_b e^{\mathbf{F}_e(\omega, V)l}]^{-1} \quad (5)$$

## 1.3 外挂的传递函数

$m_0$ 表示单个外挂质量,对应转动惯量表示为 $I_0$ ,外挂距机翼截面刚心的长度表示为 $z_0$ , $\beta(t)$ 为外挂相对机翼根部截面弦线的偏转角, $K_\beta$ 表示外挂与机翼连接处的扭转刚度。 $K_\beta(\beta(t) - \varphi_x)$ 表示外

挂因为俯仰方向上转动产生的对弹性轴的扭矩,通过傅里叶变换得到 $K_\beta(\beta(\omega) - \varphi_x)$ ;  $m_0 z_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$ 表示外挂自身重力在挂载处对机翼弹性轴的扭矩,通过傅里叶变换得到 $-m_0 z_0 \omega^2 w$ ,  $m_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$ 表示外挂由于其自身重力在机翼挂载处的剪力,通过傅里叶变换得到 $-m_0 \omega^2 w$ 。

以上在确定外挂挂载处平衡方程时,引入了新的变量 $\beta(t)$ ,因此需要多加一个求解方程.对于外挂,其俯仰振动微分方程为:

$$(I_0 + m_0 r_0^2) \frac{\partial^2 \beta(t)}{\partial t^2} + K_\beta(\beta(t) - \varphi_x) = 0 \quad (6)$$

其中, $r_0$ 表示外挂挂载处到外挂质心的长度,且 $r_0 = \sqrt{y_0^2 + z_0^2}$ ,其中, $y_0, z_0$ 分别表示集中外挂质心和机翼截面刚心的弦向和铅垂长度。

对公式(6)进行Fourier变换,并整理得:

$$\beta(\omega) = \frac{K_\beta \varphi_x}{K_\beta - \omega^2 (I_0 + m_0 r_0^2)} \quad (7)$$

将公式(7)代入 $K_\beta(\beta(\omega) - \varphi_x)$ 并整理得:

$$\frac{K_\beta \omega^2 (I_0 + m_0 r_0^2)}{K_\beta - \omega^2 (I_0 + m_0 r_0^2)} \varphi_x$$

## 1.4 单元组装

这里将有限元的求解思路引入,把大柔性大展弦比机翼看作是由若干曲梁单元组成.具体处理方法如下:

曲梁单元截面上的内力为

$$\begin{cases} N_x = EA \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{w}{R} \right), Q_y = kGA \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{u}{R} - \psi_z \right) \\ M_z = EI_z \frac{\partial \psi_z}{\partial x}, Q_z = kGA \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \psi_y \right) \\ M_y = EI_y \left( \frac{\partial \psi_y}{\partial x} + \frac{\varphi_x}{R} \right), T_x = GJ \left( \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} - \frac{\psi_y}{R} \right) \end{cases} \quad (8)$$

其中, $M_y, M_z$ 表示此曲梁单元对 $y, z$ 坐标轴的弯矩, $T_x$ 表示此曲梁单元对 $x$ 坐标轴的扭矩, $N_x$ 表示沿 $x$ 坐标轴方向的轴力, $Q_y$ 和 $Q_z$ 表示沿 $y, z$ 坐标轴的剪力。

曲梁单元内力可以表示为

$$\boldsymbol{Q}_e(x) = \boldsymbol{Q}_{e\eta}(x) \boldsymbol{\eta}_e(x, \omega) \quad (9)$$

其中, $\boldsymbol{Q}_e(x) = [N_x Q_y \quad M_z Q_z \quad M_y \quad T_x]^T$ ,  $\boldsymbol{Q}_{e\eta}(x)$ 为 $6 \times 12$ 的矩阵,其非零元素为:

$$\boldsymbol{Q}_{e\eta}(1,2) = EA, \boldsymbol{Q}_{e\eta}(1,3) = EA/R$$

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_{\eta_e}(2,1) &= -kGA/R, \mathbf{Q}_{\eta_e}(2,4) = kGA \\ \mathbf{Q}_{\eta_e}(2,5) &= -kGA \\ \mathbf{Q}_{\eta_e}(3,5) &= EI_z \\ \mathbf{Q}_{\eta_e}(4,8) &= kGA, \mathbf{Q}_{\eta_e}(4,9) = kGA \\ \mathbf{Q}_{\eta_e}(5,10) &= EI_y, \mathbf{Q}_{\eta_e}(5,11) = EI_y/R \\ \mathbf{Q}_{\eta_e}(6,9) &= -GJ/R, \mathbf{Q}_{\eta_e}(6,12) = GJ \end{aligned}$$

把(4)式代入(9)式,令  $x=0, l$ , 即曲梁单元端点的内力可表示为:

$$\mathbf{f}_e = \mathbf{K}_e(\omega, V) \boldsymbol{\gamma}_e(\omega) \quad (10)$$

其中,

$$\mathbf{f}_e = \begin{Bmatrix} \mathbf{Q}_e(0) \\ \mathbf{Q}_e(l) \end{Bmatrix},$$

$$\mathbf{K}_e(\omega, V) = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{\eta_e}(0) \mathbf{H}_e(0, \omega, V) \\ -\mathbf{Q}'_{\eta_e}(l) \mathbf{H}_e(l, \omega, V) \end{bmatrix}$$

类似有限元方法中的节点力处理方法,  $\mathbf{f}_e$  等效为节点两端的内力,  $\mathbf{K}_e(\omega, V)$  等效为刚度矩阵,  $\boldsymbol{\gamma}_e(\omega)$  等效为节点运动产生的位移向量。

设外挂位于某单元端点处, 此处机翼内力包括扭矩、弯矩和剪力应处于平衡状态, 可以表示为:

$$\begin{cases} N'_x = N_x = EA \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{w}{R} \right) \\ M'_z = M_z = EI_z \frac{\partial \psi_z}{\partial x} \\ M'_y = M_y = EI_y \left( \frac{\partial \psi_y}{\partial x} + \frac{\varphi_x}{R} \right) \\ Q'_z = Q_z = kGA \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \psi_y \right) \\ Q'_y = Q_y - m_0 \omega^2 w = kGA \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{u}{R} - \psi_z \right) - m_0 \omega^2 w \\ T'_x = T_x + K_\beta (\beta(t) - \varphi_x) - m_0 z_0 \omega^2 w \\ \quad = GJ \left( \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} - \frac{\psi_y}{R} \right) + K_\beta (\beta(t) - \varphi_x) - m_0 z_0 \omega^2 w \end{cases} \quad (11)$$

根据公式(9)及外挂传递函数可得

$$\mathbf{Q}'_e(l) = [N'_x \quad Q'_y \quad M'_z Q'_z \quad M'_y]^\top$$

$\mathbf{Q}'_{\eta_e}(l)$  是  $6 \times 12$  的矩阵, 其中非零元素如下:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}'_{\eta_e}(1,2) &= EA, \mathbf{Q}'_{\eta_e}(1,3) = EA/R \\ \mathbf{Q}'_{\eta_e}(2,1) &= -kGA/R, \mathbf{Q}'_{\eta_e}(2,3) = -m_0 \omega^2 \\ \mathbf{Q}'_{\eta_e}(2,4) &= kGA, \mathbf{Q}'_{\eta_e}(2,5) = -kGA \\ \mathbf{Q}'_{\eta_e}(3,5) &= EI_z \\ \mathbf{Q}'_{\eta_e}(4,8) &= kGA, \mathbf{Q}'_{\eta_e}(4,9) = kGA \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}'_{\eta_e}(5,10) &= EI_y, \mathbf{Q}'_{\eta_e}(5,11) = EI_y/R \\ \mathbf{Q}'_{\eta_e}(6,3) &= -m_0 z_0 \omega^2, \mathbf{Q}'_{\eta_e}(6,9) = -GJ/R \\ \mathbf{Q}'_{\eta_e}(6,11) &= \frac{K_\beta \omega^2 (I_0 + m_0 r_0^2)}{K_\beta - \omega^2 (I_0 + m_0 r_0^2)} \end{aligned}$$

$$\mathbf{Q}'_{\eta_e}(6,12) = GJ$$

带外挂单元的节点内力和刚度矩阵为:

$$\mathbf{f}_e = \begin{Bmatrix} \mathbf{Q}_e(0) \\ \mathbf{Q}'_e(l) \end{Bmatrix},$$

$$\mathbf{K}_e(\omega, V) = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{\eta_e}(0) \mathbf{H}_e(0, \omega, V) \\ -\mathbf{Q}'_{\eta_e}(l) \mathbf{H}_e(l, \omega, V) \end{bmatrix}$$

结合有限元思想, 将各个单元组集进行拼接, 从而得出整个机翼的平衡方程:

$$\mathbf{K}(\omega, V) \boldsymbol{\gamma}(\omega) = \mathbf{f} \quad (12)$$

其中,  $\mathbf{K}(\omega, V)$  表示整个机翼的刚度矩阵,  $\boldsymbol{\gamma}(\omega)$  表示机翼节点位移向量,  $\mathbf{f}$  表示各个单元的内力拼装向量。

## 2 颤振特性的求解

机翼整体由外部气动力、机翼结构和外挂组成, 而不受其他外力影响, 所以, 整个机翼处于平衡状态, 推出公式(12)中:

$$\mathbf{f} = 0 \quad (13)$$

按照机翼的假设状态, 结合有限元思想将刚度矩阵  $\mathbf{K}(\omega, V)$  按边界条件整理<sup>[23,24]</sup>。

若机翼发生颤振,  $\boldsymbol{\gamma}(\omega)$  一定存在非零解, 所以应该满足:

$$\det[\mathbf{K}(\omega, V)] = 0 \quad (14)$$

因为  $\mathbf{K}(\omega, V)$  是复矩阵, 只有满足行列式实部和虚部都等于零, 才可使矩阵  $\mathbf{K}(\omega, V)$  行列式的值为零, 可得:

$$\begin{cases} \operatorname{Re}\{\det[\mathbf{K}(\omega, V)]\} = 0 \\ \operatorname{Im}\{\det[\mathbf{K}(\omega, V)]\} = 0 \end{cases} \quad (15)$$

由公式(15)可以得到两个方程, 而矩阵  $\mathbf{K}(\omega, V)$  中恰好有两个未知数变量分别为空速  $V$  和圆频率  $\omega$ , 可以定解。求解上述(15)式, 可得到满足方程组(15)的解, 但可能得到多组  $(V, \omega)$  满足方程(15)。根据机翼空速在超过颤振临界速度就会发生颤振, 所以求得的一组解  $(V, \omega)$  中, 空速  $V$  最小的这组解可以反映出机翼的颤振特性。

这里需要说明的是: 为了得到(15)式的解, 采取用 MATLAB 绘制  $\operatorname{Re}\{\det[\mathbf{K}(\omega, V)]\}$  和  $\operatorname{Im}\{\det[\mathbf{K}(\omega, V)]\}$  的等值线图, 通过等值线的交

点判断出相对应的解;为了增加求解速度和精度,可以先在大区间  $\begin{cases} V \in (V_0, V_1) \\ \omega \in (\omega_0, \omega_1) \end{cases}$  内找到机翼颤振速

度所在的较小区间  $\begin{cases} V' \in (V'_0, V'_1) \\ \omega' \in (\omega'_0, \omega'_1) \end{cases}$ ,在此区间内划分更细的区间范围  $\Delta V'$  和  $\Delta \omega'$ ,然后利用 MATLAB 绘制  $\text{Re}\{\det[\mathbf{K}(\omega, V)]\}$  和  $\text{Im}\{\det[\mathbf{K}(\omega, V)]\}$  的等值线图,最终求得机翼的颤振速度和颤振频率。

### 3 算例验证

方法正确性验证通过采用本文方法计算机翼携带外挂的情形与有限元软件 MSC 的计算结果对比.外挂主要物理参数如表 1 所示。

表 1 外挂的物理参数

Table 1 Parameters of the external store

Basic parameters	Value
Mass (kg)	$m_0 = 2$
Moment of inertia ( $\text{kg} \cdot \text{m}^2$ )	$I_0 = 0.1$
Chord distance from the elastic axis (m)	$y_0 = 0$
Vertical distance from the elastic axis (m)	$z_0 = 0$
Pitch connection stiffness ( $\text{N} \cdot \text{m}^2$ )	$K_\beta = \infty$

为提高方法验证的效率,令机翼重心到机翼截面刚心的长度  $x_\alpha = 0$ ,表 2 为机翼其他主要参数。

表 2 机翼主要参数

Table 2 The parameters of the aircraft wing

Basic parameters	Value
Half of span (m)	$L = 16.0$
Half of chord (m)	$b = 0.5$
Mass of unit length ( $\text{kg}/\text{m}$ )	$m = 0.75$
Position of the elastic axis (%chord)	$\bar{a} = 0$
Distance between the center of gravity and the elastic axis	$z_\alpha = 0$
Rotary inertia of unit length ( $\text{kg} \cdot \text{m}^2$ )	$I_\alpha = 0.1$
Bending stiffness of vertical ( $\text{N} \cdot \text{m}^2$ )	$EI_z = 2.0 \times 10^4 \text{N} \cdot \text{m}^2$
Bending stiffness of chord ( $\text{N} \cdot \text{m}^2$ )	$EI_y = 4.0 \times 10^6 \text{N} \cdot \text{m}^2$
Stiffness of twist ( $\text{N} \cdot \text{m}^2$ )	$GJ = 1.0 \times 10^4$
Air density ( $\text{kg}/\text{m}^3$ )	$\rho = 0.0889$

如图 4 所示,这里主要采用 MSC.Patran 软件进行仿真,先对带外挂机翼模型进行建模,划分网格时使用二维网格,每个机翼分成 60 个结构性单元,为模拟具有质量和转动惯量的外挂特性,这里采用质量单元,这里取三种典型变形进行分析,记变形一、变形二和变形三,对应的翼尖位移取半展长的 3.125%、6.250% 和 12.50%,分别对三种变形机翼携带一个外挂情形进行模态仿真,并利用 MSC

中的分析模块 FlightLoads 进行气动弹性分析。

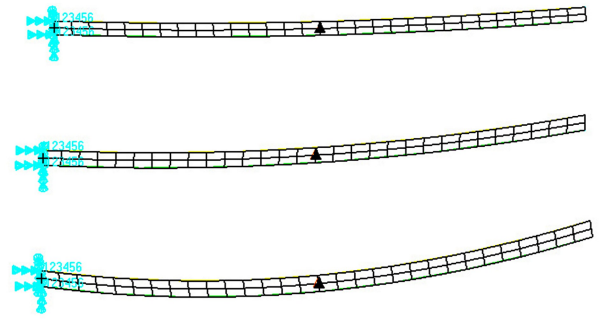


图 4 带外挂柔性机翼有限元模型

Fig.4 The FEM model of the flexible wing with an external store

为验证上一节提出的计算方法对柔性机翼携带多个外挂同样适用,本文不仅对柔性机翼带单个外挂情形进行仿真对比,还分别对三种变形机翼携带多个外挂进行有限元建模仿真,图 5 以变形二机翼为例展示携带 1 至 3 个外挂机翼的仿真模型。

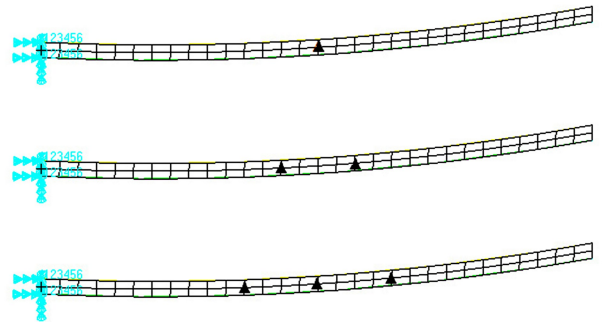


图 5 带不同外挂数目的机翼有限元模型

Fig.5 The FEM model of the wing with different external stores

如表 3 所示,将机翼携带不同数量外挂的算例分别用本文算法和有限元方法进行计算.通过表 3 的对比结果可以得出,采用两种方法计算得到的颤振速度和频率具有比较好的一致性,从而验证了本文方法的正确性.可能的误差原因在文献[21]给予了分析说明,不在此赘述。

表 3 机翼带不同数量外挂颤振特性

Table 3 Flutter characteristics of aircraft wings with different amount of external store

	The flutter velocity/m/s (This article/the MSC solution)			
	None	One	Two	Three
Case 1	35.7/36.6	40.0/39.3	41.4/40.4	43.3/42.4
Case 2	27.3/25.7	31.7/28.4	33.4/31.3	36.7/35.1
Case 3	25.2/23.2	27.1/25.5	28.1/27.3	30.2/29.1

### 4 机翼颤振特性分析

从引言可知,当外挂的物理参数发生改变时,

相应机翼的气动弹性也会发生改变,这直接影响整个飞行器的颤振特性,所以本节专门针对此问题进行了讨论.本节主要以机翼带单个外挂和多个外挂两种情况为例,从以下几个方面进行分析:外挂质量、转动惯量、挂载位置分布情况和外挂数量.表1和表2为计算所需的基本参数.

#### 4.1 单个外挂对机翼颤振特性的影响

以机翼挂载单个外挂为例,挂点展向位置为 $0.5L$ ( $L$ 为机翼半展长),弦向位于弹性轴上,分别改变外挂质量和转动惯量,研究其对机翼颤振特性的影响规律.外挂质量的改变会影响机翼的气动特性,如图6所示,其横坐标表示外挂质量 $m$ ,其纵坐标表示颤振速度 $V$ .同样的,转动惯量的改变也对机翼气动特性产生较大影响,如图7所示,其横坐标为外挂的转动惯量 $I_0$ 和机翼单位长度转动惯量 $I_\alpha$ 之比,其纵坐标表示颤振速度 $V$ .图6和图7均为柔性机翼在三种变形条件下的颤振速度.从两图可以看出,随着外挂质量和转动惯量的增加,机翼几种变形条件下颤振速度也不断增加.机翼处于大变形条件下,颤振速度增加趋势相对较缓;随着机翼变形程度的减小,颤振速度增加趋势更加明显.

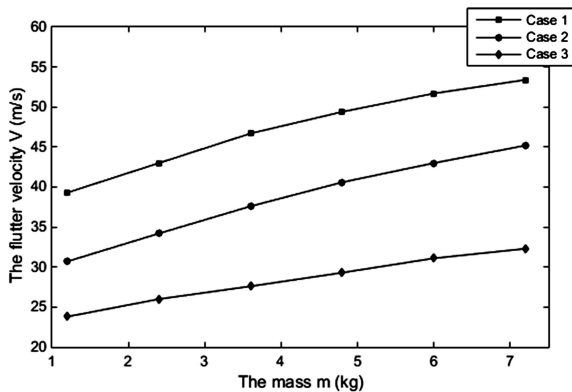


图6 机翼外挂质量对颤振速度的影响

Fig.6 The influence of the mass of the external store on the velocity of the wing flutter

机翼弹性轴在机翼上的相对位置会影响机翼的颤振特性,外挂的存在又会改变机翼的受力特性,因此,外挂的弦向位置变化,即与弹性轴的相对位置变化,也会对机翼颤振特性产生较大影响.仍以带单个外挂柔性机翼为例,图8水平轴表示外挂挂载处弦向位置 $z$ 与机翼半弦长 $b$ 之比,弦向位置 $z$ 位于弹性轴前时取值为负,位于弹性轴后时取值为正,纵坐标为机翼颤振速度 $V$ .从图中可以看出,

随着外挂弦向位置从机翼前缘到后缘的过程中,机翼在三种变形情况下,颤振速度不断降低,其中机翼在大变形情况下,颤振特性最为稳定,颤振速度变化最小,综上机翼为获得较好的颤振特性,应将外挂置于靠近机翼前缘的位置.

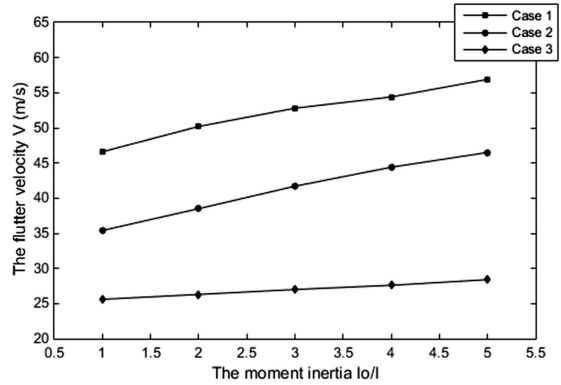


图7 机翼外挂转动惯量对颤振速度的影响

Fig.7 The influence of the moment inertia of the external store on the velocity of the wing flutter

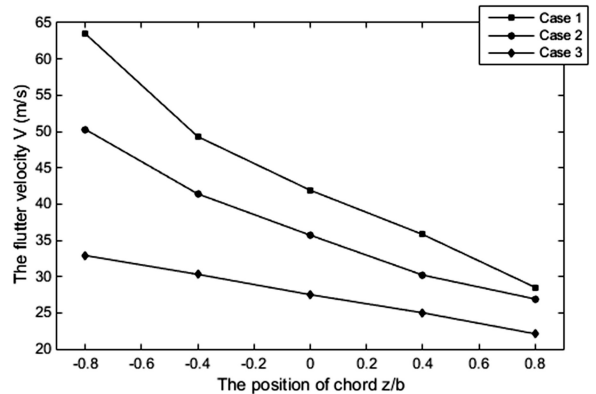


图8 外挂机翼弦向位置对颤振速度的影响

Fig.8 The influence of the position of the external store on the velocity of the wing flutter

本文建立的机翼气动模型是三维结构及引入了机翼长度因素,图9给出了外挂挂载位置沿展向位置变化对机翼气动特性的影响.仍以带单个外挂柔性机翼为例,图上水平轴表示机翼外挂展向位置坐标 $x$ 与机翼半展长 $L$ 之比,纵轴表示机翼颤振速度 $V$ .根据图中的变换曲线可以得到,随着外挂挂载位置从翼根到翼梢,机翼颤振速度先增加后降低,当外挂位于翼展中部位置时,可获得最优的颤振特性,其中机翼变形程度较大时,颤振特性较为稳定,颤振速度变化幅度较小,随着机翼变形程度减小,颤振速度变化得越明显.此规律结合外挂弦向分布规律对带大展弦比柔性机翼飞行器的设计具有指

导意义,为提高此类飞行器机翼颤振特性,应尽量使外挂位于机翼中部且靠近前缘位置。

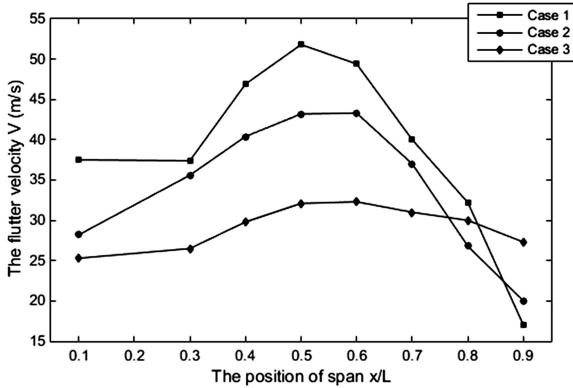


图9 外挂在机翼展向位置对颤振速度的影响

Fig.9 The influence of the position of the external store on the velocity of the wing flutter

#### 4.2 多个外挂对机翼颤振特性的影响

上节讨论了单个外挂对机翼颤振速度的影响,本小节在前面的基础上拓展到机翼带多个外挂的情形,通过计算发现在外挂数目不变的情况下,外挂质量、转动惯量、挂载位置分布情况等因素对机翼颤振速度的影响与上一小节讨论的结果基本一致,这里不再重复讨论。

外挂数量也是影响机翼气动特性的重要参数。因此,本文研究了外挂数量对机翼颤振的影响,其中,外挂挂点沿机翼展向均匀分布。以下从两个角度进行分析:

一是单个外挂质量不变,随着数量的增加,外挂总质量增加,颤振特性如图 10 所示,其横坐标表示外挂数量,其纵坐标表示机翼颤振速度  $V$ 。当单个外挂质量不变,随着数量增加,机翼颤振速度变化基本与图 6 相同,即随着数量的增加(总质量增加),机翼颤振速度提高,其中机翼变形程度较大时,颤振特性较为稳定,颤振速度变化较小;机翼变形程度越小时,颤振速度提高得越明显。

二是外挂总质量不变,随着数量增加,单个外挂质量减小,颤振特性如图 11 所示,其横坐标表示外挂数量,其纵坐标表示机翼颤振速度  $V$ 。当外挂总质量不变,外挂数量增加,颤振特性较上一种情况发生改变,随着数量的增加,即外挂质量更加均匀地分布在机翼上,当机翼变形程度较大时,颤振特性非常稳定,颤振速度几乎不变;当机翼变形比较小时,颤振特性提高明显。所以在进行机翼设计时,

当外挂总质量不变且机翼变形程度较大,外挂挂载的均匀程度对机翼颤振特性几乎没有影响。

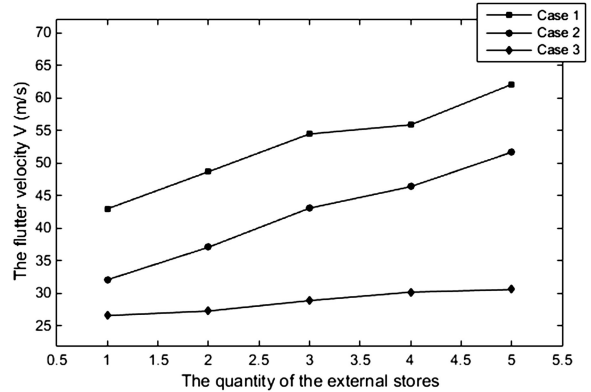


图10 单个外挂质量不变

Fig.10 The mass of the single external store is constant

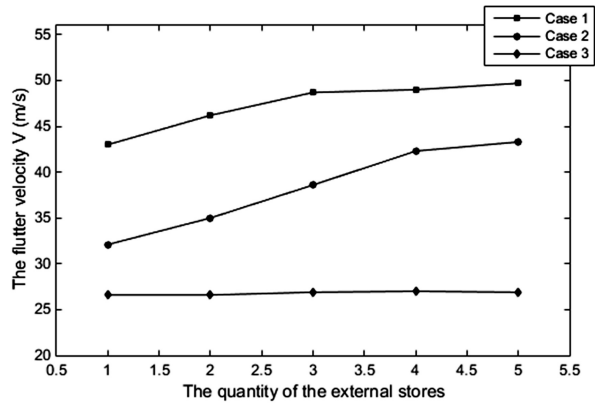


图11 外挂总质量不变

Fig.11 The mass of all external store is constant

## 5 结论

本文基于带外挂大柔性机翼结构和气动特点,使用带有半解析半数值特性的传递函数方法进行处理,经过与 MSC. FlightLoads 算例相比较,证明了本文计算方法的正确性和高效性,同时探讨了机翼在大变形条件下,外挂质量、转动惯量、位置分布及数量对颤振特性的影响,得出如下结论:

1) 随着外挂质量和转动惯量的增加机翼颤振速度也不断增加。机翼的变形程度越大,机翼的颤振特性越稳定,外挂质量和转动惯量的变化对颤振速度的影响越小。

2) 使外挂位于机翼中部且靠近前缘位置,可有效提高飞行器大展弦比柔性机翼颤振特性。机翼在大变形情况下,外挂位置分布对机翼颤振特性影响较小。

3)随着外挂数目的增多,机翼颤振特性有所提高,但随着机翼变形程度的增大,外挂数目对机翼颤振速度的影响在减小,尤其在外挂总质量不变的条件下,外挂分散程度对机翼颤振特性几乎没有影响。

## 参 考 文 献

- Xie C C, Leng J Z, Yang C. Geometrical nonlinear aeroelastic stability analysis of a composite high-aspect-ratio wing. *Shock and Vibration*, 2007, 15(3-4): 325~333
- 谢长川,吴志刚,杨超. 大展弦比柔性机翼的气动弹性分析. 北京航空航天大学学报, 2003, 29(12): 1087~1091 (Xie C C, Wu Z G, Yang C. Aeroelastic analysis of flexible large aspect ratio wing. *Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics*, 2003, 29(12): 1087~1091 (in Chinese))
- 杨超,王立波,谢长川等. 大变形飞机配平与飞行载荷分析方法. 中国科学:技术科学, 2012, 42(10): 1137~1147 (Yang C, Wang L B, Xie C C, et al. Aeroelastic trim and flight loads analysis of flexible aircraft with large deformations. *Sciences China: Technology Science*, 2012, 42(10): 1137~1147 (in Chinese))
- 王伟,周洲,祝小平等. 考虑几何非线性效应的大柔性太阳能无人机静气动弹性分析. 西北工业大学学报, 2014, 32(4): 499~505 (Wang W, Zhou Z, Zhu X P, et al. Static aeroelastic characteristics analysis of a very flexible solar powered UAV with geometrical nonlinear effect considered. *Journal of Northwestern Polytechnical University*, 2014, 32(4): 499~505 (in Chinese))
- 王伟,周洲,祝小平等. 几何大变形太阳能无人机非线性气动弹性稳定性研究. 西北工业大学学报, 2015, 33(1): 1~7 (Wang W, Zhou Z, Zhu X P, et al. Exploring aeroelastic stability of very flexible solar powered UAV with geometrically large deformation. *Journal of Northwestern Polytechnical University*, 2015, 33(1): 1~7 (in Chinese))
- Palacios R, Cesni C S. Static nonlinear aeroelasticity of flexible slender wings in compressible flow. *AIAA Journal*, 2005, 43(2): 1~10
- 王伟,周洲,祝小平等. 一种基于CR理论的大柔性机翼非线性气动弹性求解方法. 振动与冲击, 2015, 34(19): 62~70 (Wang W, Zhou Z, Zhu X P, et al. A CR theory-based approach for solving nonlinear aeroelasticity of very flexible wings. *Journal of Vibration and Shock*, 2015, 34(19): 62~70 (in Chinese))
- 张健,向锦武. 侧向随动力作用下大展弦柔性机翼的稳定性. 航空学报, 2010, 31(11): 2115~2123 (Zhang J, Xiang J W. Stability of High-aspect-ratio Flexible Wings Loaded by a Lateral Follower Force. *Acta Aeronautica et Astronautica Sinica*, 2010, 31(11): 2115~2124 (in Chinese))
- 程春晓,李道春,向锦武等. 柔性后缘可变形机翼气动特性分析. 北京航空航天大学学报, 2016, 42(2): 360~367 (Cheng C X, Li D C, Xiang J W, et al. Analysis on aerodynamic characteristics of morphing wing with flexible trailing edge. *Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics*, 2016, 42(2): 360~367 (in Chinese))
- 叶伟梁. 带翼梢外挂的CKI机翼颤振分析. 南京航空航天大学学报, 1993, 25(4): 554~560 (Ye W L. Analysis for flutter of CKI wing with tip external stores. *Journal of Nanjin University of Aeronautics & astronautics*, 1993, 25(4): 554~560 (in Chinese))
- Yang Y R. KBM method of analyzing limit cycle flutter of a wing with an external store and comparison with a wind-tunnel test. *Journal of Sound and Vibration*, 1995, 187(2): 271~280
- Karpel M, Moulin B, Anguita L, et al. Flutter analysis of aircraft with external stores using modal coupling. *Journal of Aircraft*, 2004, 47(4): 892~901
- Liviu L, Ohseop S. Dynamics of composite aircraft wings carrying external stores. *AIAA Journal*, 2008, 46(3): 568~578
- Fazelzadeh S A, Marzocca P, Rashid E, et al. Effects of Rolling Maneuver on divergence and flutter of aircraft wing store. *Journal of Aircraft*, 2010, 47(1): 64~71
- 周秋萍,邱志平. 机翼带外挂系统极限环颤振的区间分析. 航空学报, 2010, 31(3): 514~518 (Zhou Q P, Qiu Z P. Interval analysis for limit cycle flutter of a wing with an external store. *Acta Aeronautica et Astronautica Sinica*, 2010, 31(3): 514~518 (in Chinese))
- Ozcan, Unal M F, Aslan A R, et al. Aeroelastic characteristics of external store configurations at low speeds. *Journal of Aircraft*, 2011, 32(1): 161~171
- Deman T, Earl H. Dowell. Aeroelastic analysis and experiment for wing/store model with stiction nonlinearity. *Journal of Aircraft*, 2011, 48(5): 1512~1530
- Chen Y M, Liu J K, Meng G. An incremental method for limit cycle oscillations of an airfoil with an external store.



- International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2012,47: 75~83
- 19 许军,马晓平. 带外挂机翼的极限环颤振分析. 机械强度, 2014,36(6):841~845 (Xu J, Ma X P. Limit cycle flutter analysis of a wing with an external store. *Journal of Mechanical Strength*, 2014,36(6):841~845 (in Chinese))
- 20 Hamid P, Abbas M, Ahmad F S. Flutter analysis of an aircraft wing carrying, elastically, an external store. *Applied Clay Science*, 2015,61(61):44~51
- 21 段静波,江涛. 带外挂机翼颤振分析的传递函数方法. 振动与冲击, 2017,36(10):109~116 (Duan J B, Jiang T. Transfer function method for the flutter of aircraft wings with an external store. *Journal of Vibration and Shock*, 2017,36(10):109~116 (in Chinese))
- 22 赵永辉. 气动弹性力学与控制. 北京:科学出版社, 2006 (Zhao Y H. Aeroelastic mechanics and control. Beijing:Science Press, 2006 (in Chinese))
- 23 谢长川,吴志刚,杨超. 大展弦比柔性机翼的气动弹性分析. 北京航空航天大学学报, 2003,29(12):1087~1091 (Xie C C, Wu Z Z, Yang C. Aeroelastic analysis of flexible large aspect ratio wing. *Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics*, 2003,29(12):1087~1091 (in Chinese))
- 24 王伟,周洲,祝小平等. 考虑几何非线性效应的大柔性太阳能无人机静气动弹性分析. 西北工业大学, 2014,32(4):499~505 (Wang W, Zhou Z, Zhu X P, et al. Static aeroelastic characteristics analysis of a very flexible solar powered UAV with geometrical nonlinear effect considered. *Journal of Northwestern Polytechnical University*, 2014,32(4):499~505 (in Chinese))

## FLUTTER ANALYSIS OF A FLEXIBLE WING WITH EXTERNAL STORES BY TRANSFER FUNCTION METHOD\*

Zhang Zhongyuan<sup>1†</sup> Duan Jingbo<sup>2</sup> Lu Ping<sup>1</sup> Wang Long<sup>3</sup>

(1. Department of UAV Engineering, Army Engineering University, Shijiazhuang 050003, China)

(2. Department of Engineering Mechanics, Shijiazhuang Tiedao University, Shijiazhuang 050003, China)

(3. Helicopter Battalion of Armed Police Xinjiang Force, Urumqi 830017, China)

**Abstract** Transfer function method was employed to study the flutter of high-aspect-ratio flexible aircraft wings carrying external stores. Firstly, the flexible wing was modeled as a curve beam, and the flutter differential equations of a curve-beam element were established. Further, by using the transfer function method, the differential equations were formulated in a state-space form. Moreover, considering the deformation compatibility and internal force balance at the position of the external store, the governing equations of the whole wing were obtained by element assembling. Both the flutter velocity and flutter frequency were obtained by solving complex eigenvalue equations. The results are good agreement with finite element analysis, which indicates that the present method is accurate and efficient for flutter analysis of the flexible wing. Finally, the effects of the mass, moment inertia, number and position of the external store on the aeroelastic characteristics of the flexible wing were investigated.

**Key words** high-aspect-ratio, flexible wing, the external store, flutter, transfer function method

## 附录 A:

$$F_e(1,2) = 1$$

$$F_e(2,1) = \left( \frac{kGA}{EAR^2} - \frac{\rho A}{EA} \omega^2 \right)$$

$$F_e(2,4) = - \left( \frac{EA}{EAR} + \frac{kGA}{EAR} \right)$$

$$F_e(2,5) = \frac{kGA}{EAR}$$

$$F_e(3,4) = 1$$

$$F_e(4,2) = \left( \frac{kGA}{kGAR} + \frac{EA}{kGAR} \right)$$

$$F_e(4,3) = \left( \frac{EA}{kGAR^2} - \frac{\rho A}{kGA} \omega^2 + \frac{-\pi \rho b^2 \omega^2 + 2\pi \rho V b C(\omega, V) \omega i}{kGA} \right)$$

$$F_e(4,6) = 1$$

$$F_e(4,11) = \left( \frac{\rho A z_\alpha \omega^2 + \pi \rho b^2 (V \omega i + b \bar{a} \omega^2) + 2\pi \rho V b C(\omega, V) (V + b(0.5 - \bar{a})) \omega i}{kGA} \right)$$

$$F_e(5,6) = 1$$

$$F_e(6,1) = \frac{kGA}{EI_z R}$$

$$F_e(6,4) = \frac{kGA}{EI_z}$$

$$F_e(6,5) = \left( \frac{kGA}{EI_z} - \frac{\rho I}{EI_z} \omega^2 \right)$$

$$F_e(7,8) = 1$$

$$F_e(8,7) = \frac{\rho A \omega^2}{kGA}$$

$$F_e(8,10) = -1$$

$$F_e(9,10) = 1$$

$$F_e(10,8) = \frac{kGA}{EI_y}$$

$$F_e(10,9) = \left( \frac{kGA}{EI_y} + \frac{GJ}{EI_y R^2} - \frac{\rho I_y \omega^2}{EI_y} \right)$$

$$F_e(10,12) = - \left( \frac{EI_y}{EI_y R} + \frac{GJ}{EI_y R} \right)$$

$$F_e(11,12) = 1$$

$$F_e(12,3) = \left( \frac{\pi \rho b^3 \bar{a} \omega^2 - 2\pi \rho V b^2 (0.5 + \bar{a}) \cdot C(\omega, V) \omega i + \rho A z_\alpha \omega^2}{GJ} \right)$$

$$F_e(12,10) = \left( \frac{GJ}{GJR} + \frac{EI_y}{GJR} \right)$$

$$F_e(12,11) = \left( \frac{\frac{EI_y}{GJR^2} - \frac{\rho I_y \omega^2}{GJ} + \frac{\pi \rho b^3 V (0.5 - \bar{a}) \omega i - \pi \rho b^4 (0.125 + \bar{a}^2) \omega^2}{GJ}}{-2\pi \rho V^2 b^2 (0.5 + \bar{a}) C(\omega, V) - 2\pi \rho V b^3 (0.25 - \bar{a}^2) C(\omega, V) \omega i} \right)$$