第 17 卷第 2 期 2019 年 4 月
1672-6553/2019/17(2)/159-9

动力学与控制学报
JOURNAL OF DYNAMICS AND CONTROL

Vol.17 No.2
Apr. 2019

一类四维幂零向量场的超规范形及应用*

寇力英[1,3] 李静[1†] 张伟[2] 奚帅杰[1]

(1.北京工业大学 应用数理学院, 北京 100124)(2.北京工业大学 机械工程与应用电子技术学院, 北京 100124)

(3.中国民航大学 理学院,天津 300300)

摘要 研究一类具有对称性质的四维幂零向量场的超规范形问题,并将其应用于具有实际工程背景的高维非线性动力学模型的简化.发展与完善由 Sanders、Baider 和 KOW 提出的规范形进一步简化的理论,利用线性次数函数、多重李括号与分块矩阵的新记号表示相结合的方法,分别获得四维幂零向量场 3 次、5 次截断的超规范形的一般形式,并将超规范形理论应用于研究环型桁架卫星天线模型的化简问题.本文通过引入并完善大尺寸分块矩阵的新记号表示方法,获得一种处理大尺寸分块矩阵运算的新方法,简化繁琐的大尺寸矩阵的运算,为后续的研究带来便利条件.

关键词 四维幂零向量场, 超规范形, 线性次数函数, 多重李括号

DOI: 10.6052/1672-6553-2018-045

引言

随着现代数学理论和计算机技术的发展,非线性动力学理论研究取得了极大进展,并广泛应用到工程科学、生命科学、社会科学等领域中.近年来关于高维非线性动力系统的周期解及分岔理论不断发展,由于高维系统的复杂性与多样性,在理论研究和数值计算方面都会面临困难,因此对高维向量场进行化简往往是进行定性研究和数值分析的必要前提.规范形理论为向量场或非线性动力系统在奇点附近的化简提供了系统的方法, 为揭示高维非线性动力系统的周期解及分岔机理提供有力工具,为洞察重大工程实际问题的非线性动力学行为提供有效手段.

规范形理论的基本思想是经过一系列的近恒同变换将其简化为尽可能简单的形式,并且保持系统的局部动力学性态不变.近年来的研究表明,传统的规范形[1](Poincare-Birkhof 规范形、Takens 规范形)不一定是最简或唯一的,这使得规范形的应用受到限制,因此需要对其进行进一步化简.1984 年 Ushiki[2]首次提出最简规范形的概念,而超规范形(最简规范形、唯一规范形)的提出更是丰富和发展了规范形的进一步化简理论.

Kokubu 等[3]发展与完善 Baider 和 Sanders[4]的最简规范形理论,研究 Bogdanov-Takens(以下简称 B-T 规范形)向量场在 $\mu=2,\nu=1$ 情形的规范形进一步化简问题.文中给出了线性次数函数和 N 阶规范形的严格定义以及判断规范形唯一性的充分条件,利用多重李括号和线性次数函数相结合的方法,得到规范形的一般形式,并且验证了该规范形在非代数数条件下的唯一性.由 Kokubu, Oka 和 Wang 提出的最简规范形理论比较系统且完善,称其为 KOW 理论.之后,Peng 等[5]提出了判断规范形的唯一性的新的充分条件.Wang, Li 等[6,7]基于 KOW 理论,在非代数数的条件下解决了 Baider 和 Sanders 提出的 B-T 唯一规范形在 $\mu=2\nu$ 情形的公开问题,并给出其一般形式;首次获得 12 次非线性动力系统最简规范形在多种可能情形下的一般形式及其对应于原系统的全部系数.

在利用规范形理论解决实际工程问题时,科学家们比较关注的是规范形系数与原始非线性系统系数之间的对应关系,尤其是随着维数的增加,超规范形研究在理论及计算方面都会面临很多困难,需要探索新理论、新方法和新技术.2004 年,Zhang

2018-04-10 收到第 1 稿,2018-05-10 收到修改稿.
* 国家自然科学基金资助项目(11772007,11372014,11290152),北京市自然科学基金资助项目(1172002)
† 通讯作者 E-mail:leejing@bjut.edu.cn

等[8]对共轭算子法进行了改进,发展了一种计算四维非线性系统规范形及系数的有效方法,推导出计算最简规范形的通用公式,借助于 Maple 程序语言,获得了系统的规范形、规范形系数和相应的坐标形式变换,并将该理论成功地推广到工程应用中.Chen 等[9,10]提出了改进的直接法,研究高维非线性系统最简规范形及系数对应关系.2014 年以来,Li 等[11-13]首次提出处理大尺寸分块矩阵的新记号表示方法,并利用线性次数函数、多重李括号和首次积分相结合的方法研究了三维幂零向量场的超规范形问题;基于多重李括号的思想,提出一种适用于符号计算的递归算法,研究三维幂零向量场规范形的系数计算问题.

本文研究具有对称性质的四维幂零向量场的超规范形问题,并将其应用于具有实际工程背景的高维非线性动力学模型的简化.发展与完善由 Sanders、Baider 和 KOW 提出的规范形进一步简化的理论,利用线性次数函数与多重李括号相结合的方法,通过引入并完善大尺寸分块矩阵的新记号表示方法,分别获得四维幂零向量场 3 次、5 次截断的超规范形的一般形式.然后从环型桁架卫星天线呼吸振动形式下的动力学控制方程出发,利用多尺度方法得到直角坐标形式的 5 次平均方程,并利用超规范形理论对其进行化简,获得环型桁架卫星天线模型超规范形的一般形式及系数对应关系,使得简化模型最大限度地符合实际问题,为进一步对模型的复杂非线性动力学行为进行定性研究及数值分析奠定基础,为基于非线性动力学理论的减振设计提供指导.

1 四维幂零向量场基空间表示

考虑具有如下形式的四维幂零向量场:

$$\begin{aligned}V(x)=&x_2\partial_{x_1}+f_1(x_1,x_2,x_3,x_4)\partial_{x_1}+\\&(\alpha_1x_1x_2+\alpha_2x_1^3)\partial_{x_2}+f_2(x_1,x_2,x_3,x_4)\partial_{x_2}+\\&x_4\partial_{x_3}+f_3(x_1,x_2,x_3,x_4)\partial_{x_3}+\\&(\beta_1x_1^2x_3+\beta_2x_3^3)\partial_{x_4}+f_4(x_1,x_2,x_3,x_4)\partial_{x_4}\end{aligned}\tag{1}$$

其中,$x\in R^4$,$V(x)\in R^4$,$f_i(x_1,x_2,x_3,x_4)\in R(i=1,2,3,4)$ 表示线性次数函数 δ 定义下的高次项,且满足如下对称性

$$f_i(x_1,x_2,-x_3,-x_4)=f_i(x_1,x_2,x_3,x_4)\ (i=1,2)$$

$$f_i(x_1,x_2,-x_3,-x_4)=-f_i(x_1,x_2,x_3,x_4)\ (i=3,4)$$

令 H 表示所有四维多项式向量场组成的线性空间.定义李括号运算为

$$[\cdot,\cdot]:H\times H\to H,\ [U,V]=DV\cdot U-DU\cdot V$$

则 $\{H,[\cdot,\cdot]\}$ 构成一个李代数.

对于向量场(1),定义如下的线性次数函数 $\delta:D_4\to Z$:

$$\delta(x_1^mx_2^nx_3^px_4^q\partial_{x_i})=(m+p)+2(n+q)-1,i=1,3$$

$$\delta(x_1^mx_2^nx_3^px_4^q\partial_{x_i})=(m+p)+2(n+q)-2,i=2,4$$

H_k 表示线性次数函数 δ 定义下的所有四维 k 次多项式向量场组成的线性空间.对于任意的 $u\in H_i,v\in H_j$,显然有 $[u,v]\in H_{i+j}$,因此,$\{H,[\cdot,\cdot]\}$ 在线性次数函数 δ 定义下依然构成一个李代数.

容易验证

$$\delta(x_2\partial_{x_1})=\delta(x_1x_2\partial_{x_2})=\delta(x_1^3\partial_{x_2})=1$$

$$\delta(x_4\partial_{x_3})=\delta(x_1^2x_3\partial_{x_4})=\delta(x_3^3\partial_{x_4})=1$$

因此,向量场(1)可以表示为如下形式

$$V^{(0)}=V_1^{(0)}+V_2^{(0)}+\cdots+V_k^{(0)}+\cdots\tag{2}$$

其中,$V_k^{(0)}\in H_k,k=1,2,\cdots$.而最低次项为

$$\begin{aligned}V_1^{(0)}=&x_2\partial_{x_1}+(\alpha_1x_1x_2+\alpha_2x_1^3)\partial_{x_2}+x_4\partial_{x_3}+\\&(\beta_1x_1^2x_3+\beta_2x_3^3)\partial_{x_4}\end{aligned}$$

考虑到式(1)的对称性,引理 1 给出了对称线性空间 H_k 的基空间表示.记

$$\begin{aligned}\hat{H}_m=span\{&x_1^{m+1}\partial_{x_1},x_1^{m-2}x_3x_4\partial_{x_1},x_1^{m+2}\partial_{x_2}\\&x_1^{m-1}x_3x_4\partial_{x_2},x_1^mx_3\partial_{x_3},x_1^{m-1}x_4\partial_{x_3}\\&x_1^{m+1}x_3\partial_{x_4},x_1^mx_4\partial_{x_4}\},m\geqslant 2\end{aligned}$$

$$\hat{H}_0=span\{x_1\partial_{x_1},x_1^2\partial_{x_2},x_3\partial_{x_3},x_1x_3\partial_{x_4},x_4\partial_{x_4}\}$$

$$\begin{aligned}\hat{H}_1=span\{&x_1^2\partial_{x_1},x_1^3\partial_{x_2},x_3x_4\partial_{x_2},x_1x_3\partial_{x_3}\\&x_4\partial_{x_3},x_1^2x_3\partial_{x_4},x_1x_4\partial_{x_4}\}\end{aligned}$$

$$\hat{H}_{-2}=span\{\partial_{x_2}\}$$

$$\hat{H}_{-1}=span\{\partial_{x_1},x_1\partial_{x_2},x_3\partial_{x_4}\}$$

引理 1 令 $p\in N,\tilde{p}=[\frac{p+1}{2}],\bar{p}=[\frac{p+2}{2}]$,则 H_k 的基空间可以表示为

$$H_{2p+1}=\bigoplus_{l=0}^{\tilde{p}}\bigoplus_{j=0}^{p+1-2l}\bigoplus_{i=0}^{p+1-j-2l}x_2^ix_3^{2j}x_4^{2l}\hat{H}_{2p+1-2(i+j+2l)}$$

$$H_{2p+2}=\bigoplus_{l=0}^{\bar{p}}\bigoplus_{j=0}^{p+2-2l}\bigoplus_{i=0}^{p+2-j-2l}x_2^ix_3^{2j}x_4^{2l}\hat{H}_{2p+2-2(i+j+2l)}$$

2 四维幂零向量场的超规范形

2.1 N 阶规范形

考虑如下近恒同变换

$$y=\Phi_{Y_k}(x) \tag{3}$$

其中,$Y_k\in H_k, x\in R^4, \Phi_{Y_k}$为由向量场 $\dot{x}=Y_k(x)$ 生成的流 $\Phi_{Y_k}^t$所确定的时间 1 映射.则向量场(2)化为

$$\begin{aligned} V^{(1)} &= (_{\Phi Y_k}V^{(0)}=\exp(adY_k)V^{(0)} \\ &= V^{(0)}+[V^{(0)},Y_k]+\cdots+ \\ &\quad \frac{1}{n!}[V^{(0)},Y_k]^{(n)}+\cdots \end{aligned} \tag{4}$$

其中,$[V^{(0)},Y_k]$是 $V^{(0)}$ 与 Y_k 的李括号运算,而 $V^{(0)}$ 与 Y_k 的多重李括号运算定义为

$$[V^{(0)},Y_k]^{(n)}=[[V^{(0)},Y_k]^{(n-1)},Y_k], n=2,3,\cdots$$

对于任意 $k\in N^+$,定义如下线性算子

$$L_k^{(1)}:H_k\rightarrow H_{k+1}; Y_k\mapsto[V_1^{(0)},Y_k] \tag{5}$$

其中,$V_1^{(0)}$ 是向量场(2)在线性次数函数 δ 定义下的 1 次项.注意到 $L_k^{(1)}$ 依赖于 V_1,因此,可记为

$$L_k^{(1)}=L_k^{(1)}[V_1]$$

这样,H_{k+1} 可以分解为 $H_{k+1}=\mathrm{Im}L_k^{(1)}\oplus C_{k+1}^{(1)}$,其中,$C_{k+1}^{(1)}$是值域 $\mathrm{Im}L_k^{(1)}$ 在 H_{k+1}中的补空间.显然,经过一系列的线性变换 $L_k^{(1)}, k=2,3,\cdots$,并选取适当的 $Y_k, V_{k+1}^{(0)}$中属于 $\mathrm{Im}L_k^{(1)}$ 的项可以消去,因此,向量场(2)可化简为

$$V^{(1)}=V_1^{(1)}+V_2^{(1)}+\cdots+V_k^{(1)}+\cdots \tag{6}$$

其中,$V_1^{(1)}=V_1^{(0)}, V_k^{(1)}\in C_k^{(1)}, k=2,3,\cdots$.称式(6)为原始向量场(1)的一阶规范形.

若一阶规范形(6)不是最简的或唯一的,我们需要定义一系列的线性算子 $L_k^{(m)}$ 对其进行进一步化简,进而得到超规范形.假设对于 $m\geqslant 1$ 和任意的 $k\in N^+$,已经定义了 $L_k^{(m)}=L_k^{(m)}[V_1,V_2,\cdots,V_m]$,则 $L_k^{(m+1)}$ 定义为

$$L_k^{(m+1)}:\ \mathrm{Ker}L_k^{(m)}\times H_{k+m}\rightarrow H_{k+m+1}$$

$$((Y_1,\cdots Y_{k+m-1}),Y_{k+m})\mapsto[V_1,Y_{k+m}]+\cdots[V_{k+m},Y_1]$$

同理,经过一系列的线性变换 $L_k^{(m)}, k=2,3,\cdots, m=2,3,\cdots,N-1$, 向量场可化简为

$$V^{(N)}=V_1^{(N)}+V_2^{(N)}+\cdots+V_k^{(N)}+\cdots \tag{7}$$

若 $V_k^{(N)}\in C_k^{(N)}, k=2,3,\cdots$,则称式(7)为向量场(1)的 N 阶规范形.

引理 2 给出了判断 N 阶规范形为超规范形的充分条件.

引理 2[5]　如果对任意的 $T_1\in\mathrm{Ker}L_1^{(1)}$,存在 $\alpha\in R$,使得对于任意的 $k\geqslant 1$,有$[V_k,T_1]=\alpha[V_k,V_1]$,且对于任意的 $k\in N^+, k\neq 1$,有

$$\mathrm{Ker}L_k^{(N)}=\{0\}\times\mathrm{Ker}L_{k+1}^{(N-1)}$$

则 N 阶规范形(7)是唯一的.

规范形计算的关键是寻找线性算子的值域对应的补空间,我们从 $k=2p+1$ 和 $k=2p+2$ 两种情况出发,分别计算线性算子的核空间 $\mathrm{Ker}L_k^{(1)}$ 及补空间 $C_{k+1}^{(1)}, k=1,\cdots,7$,进而得到向量场(1) 5 次截断的一阶规范形,进而验证其为超规范形.

对于线性空间 H_k 中的项 $x_1^{m_i}x_2^{n_i}x_3^{p_i}x_4^{q_i}\partial_{x_j}, i,j=1,\cdots,4$,我们给出如下的排列顺序:

1)对任意的 $m_i,n_i,p_i,q_i\in N^+, i=1,\cdots,4$,

$$x_1^{m_1}x_2^{n_1}x_3^{p_1}x_4^{q_1}\partial_{x_1}\prec x_1^{m_2}x_2^{n_2}x_3^{p_2}x_4^{q_2}\partial_{x_2}\prec x_1^{m_3}x_2^{n_3}x_3^{p_3}x_4^{q_3}\partial_{x_3}\prec x_1^{m_4}x_2^{n_4}x_3^{p_4}x_4^{q_4}\partial_{x_4}$$

2)对于 $u=x_i, i=1,\cdots,4$,如果 q_i 是偶数,q_j 是奇数,则

$$x_1^{m_i}x_2^{n_i}x_3^{p_i}x_4^{q_i}\partial_u\prec x_1^{m_j}x_2^{n_j}x_3^{p_j}x_4^{q_j}\partial_u$$

3)对于 $u=x_i, i=1,\cdots,4$,如果 q_i,q_j 的奇偶性相同,且 $q_i<q_j$ 或 $q_i=q_j, p_i<p_j$ 或 $q_i=q_j, p_i=p_j, n_i<n_j$ 则

$$x_1^{m_i}x_2^{n_i}x_3^{p_i}x_4^{q_i}\partial_u\prec x_1^{m_j}x_2^{n_j}x_3^{p_j}x_4^{q_j}\partial_u$$

记线性算子 $L_k^{(1)}$ 在这组基下的矩阵表达式为 $\boldsymbol{L}$.为了简化矩阵形式的表达,引入表示大尺寸矩阵的新记号[11,12]:$\partial_{i,j}^{m,n}(\boldsymbol{M})$表示 $m\times n$ 的分块矩阵,而第(i,j)个元素为矩阵 $\boldsymbol{M}$,其余矩阵均为零矩阵.则矩阵

$$\boldsymbol{L}=\sum_{i,j=1}^{4}\partial_{i,j}^{4,4}(\boldsymbol{L}_{4(j-1)+i})$$

是 4×4 的分块矩阵,其中,$\boldsymbol{L}_5,\boldsymbol{L}_{15}$为负单位矩阵,$\boldsymbol{L}_3,\boldsymbol{L}_7,\boldsymbol{L}_8,\boldsymbol{L}_9,\boldsymbol{L}_{10},\boldsymbol{L}_{13},\boldsymbol{L}_{14}$均为零矩阵.

为了得到线性算子的补空间和核空间,我们首先需要对矩阵 $\boldsymbol{L}$ 进行化简便于分析.

若有 $\beta_1=\alpha_1^2$,向量场(1)中对变量 $x_i(i=1,2,3,4)$做适当的坐标变换,$x_1x_2\partial_{x_2}$和 $x_1^2x_3\partial_{x_4}$的系数均可以化为 1,相应地 $x_1^3\partial_{x_2}$和 $x_3^3\partial_{x_4}$的系数分别化为$\dfrac{\alpha_2}{\alpha_1^2}$和 β_2,为了简化计算,在 2.2 和 2.3 部分的讨论中,我们不妨假设 $\alpha_1=1$.

2.2　$k=2p+1$ 的情形

首先,利用分块矩阵 $\boldsymbol{L}_5$ 对 $\boldsymbol{L}_6$ 进行初等行变换,使其化为零矩阵,利用分块矩阵 $\boldsymbol{L}_{15}$对 $\boldsymbol{L}_{16}$进行初等行变换,使其化为零矩阵,则 $\boldsymbol{L}_2\rightarrow\overline{\boldsymbol{L}}_2, \boldsymbol{L}_{12}\rightarrow\overline{\boldsymbol{L}}_{12}$;

然后,利用分块矩阵 $\overline{\boldsymbol{L}}_2$ 对 $\boldsymbol{L}_4$ 进行初等行变换,使其化为零矩阵,则矩阵 $\boldsymbol{L}\rightarrow\overline{\boldsymbol{L}}$,其中,

$$\overline{\boldsymbol{L}}=\partial_{1,1}^{4,4}(\boldsymbol{L}_1)+\partial_{1,2}^{4,4}(\boldsymbol{L}_5)+\partial_{2,1}^{4,4}(\overline{\boldsymbol{L}}_2)+\partial_{3,3}^{4,4}(\boldsymbol{L}_{11})+\partial_{3,4}^{4,4}(\boldsymbol{L}_{15})+\partial_{4,3}^{4,4}(\overline{\boldsymbol{L}}_{12})$$

接下来,将分块矩阵 $\overline{\boldsymbol{L}}_2$ 和 $\overline{\boldsymbol{L}}_{12}$ 适当地删除某些行和列,使得变换后的矩阵 $\widetilde{\boldsymbol{L}}$ 为满秩的方阵.

当 $p=0$ 时,分别删去矩阵 $\overline{\boldsymbol{L}}_2$ 的第 1-2,4-6,8 行和第 2 列,删去矩阵 $\overline{\boldsymbol{L}}_{12}$ 的第 1,3-4,6 行,则 $\overline{\boldsymbol{L}}_2\to\widetilde{\boldsymbol{L}}_2,\overline{\boldsymbol{L}}_{12}\to\widetilde{\boldsymbol{L}}_{12}$,经计算得到

$$\det(\widetilde{\boldsymbol{L}}_2)=4,\det(\widetilde{\boldsymbol{L}}_{12})=-4\beta_3$$

当 $p=1,2,3$ 时,分块矩阵 $\overline{\boldsymbol{L}}_2$ 和 $\overline{\boldsymbol{L}}_{12}$ 均为列满秩的,将 $\overline{\boldsymbol{L}}_2$ 和 $\overline{\boldsymbol{L}}_{12}$ 分别删除某些行,则 $\overline{\boldsymbol{L}}_2\to\widetilde{\boldsymbol{L}}_2,\overline{\boldsymbol{L}}_{12}\to\widetilde{\boldsymbol{L}}_{12}$,经计算得到:对于 $p=i,i=1,2,3$,矩阵 $\widetilde{\boldsymbol{L}}_2$ 和 $\widetilde{\boldsymbol{L}}_{12}$ 的行列式分别记为 ψ_i 和 φ_i,其中,$\psi_i,\varphi_i(i=1,2,3)$ 是关于参数 α_2 的整系数多项式函数.

经过上述的删行处理后,变换后的方阵为:

$$\widetilde{\boldsymbol{L}}=\partial_{1,1}^{4,4}(\boldsymbol{L}_1)+\partial_{1,2}^{4,4}(\boldsymbol{L}_5)+\partial_{2,1}^{4,4}(\widetilde{\boldsymbol{L}}_2)+\partial_{3,3}^{4,4}(\boldsymbol{L}_{11})+\partial_{3,4}^{4,4}(\boldsymbol{L}_{15})+\partial_{4,3}^{4,4}(\widetilde{\boldsymbol{L}}_{12})$$

借助 Maple 符号计算软件,得到:若 $\alpha_2\notin S_1$,其中,

$$S_1=\left\{\frac{1}{9},\frac{2}{15},\frac{1}{3},1,3,\frac{11\pm\sqrt{73}}{12},\frac{11\pm\sqrt{65}}{4},\frac{293\pm\sqrt{74761}}{126},\frac{9\pm2\sqrt{3}}{9},\frac{16\pm\sqrt{141}}{6}\right\}$$

则 $\psi_i\varphi_i\neq0,i=0,1,2,3$,进而有 $\det(\widetilde{L})\neq0$.

因此,我们可得到引理 3.

引理 3 令 $p\in N$,若 $\alpha_2\notin S_1$,则

1) 对 $p=0$,线性算子 $L_1^{(1)}$ 补空间为

$$C_2^{(1)}=span\{x_1^4\partial_{x_2},x_1^2x_2\partial_{x_2},x_1^2x_3^2\partial_{x_2},x_2x_3^2\partial_{x_2},x_3^4\partial_{x_2},x_1x_3x_4\partial_{x_2},x_1^3x_3\partial_{x_4},x_1x_2x_3\partial_{x_4},x_1x_3^2\partial_{x_4},x_1^2x_4\partial_{x_4},x_2x_4\partial_{x_4},x_3^2x_4\partial_{x_4}\}$$

2) 对于 $p=1,2,3$,线性算子 $L_{2p+1}^{(1)}$ 补空间为

$$\begin{aligned}C_{2p+2}^{(1)}=span\{&x_1^{2p+4-2i}x_3^{2i}\partial_{x_2},i=0,\cdots,p+2,\\&x_1^{2p-2j+\tau}x_2^{1-\tau}x_3^{2j+2-\tau}x_4^{\tau}\partial_{x_2},j=0,\cdots,p,\\&x_1^{2p-2l-3}x_2^{1-\tau}x_3^{2l+3-2\tau}x_4^{1+2\tau}\partial_{x_2},l=0,\cdots,p-2,\\&x_1^{2p+3-2i'-\tau}x_3^{2i'+1-\tau}x_4^{\tau}\partial_{x_4},i'=0,\cdots,p+1,\\&x_1^{2p-2-2j'-4\sigma}x_2^{1-\tau}x_3^{2j'+2-2\tau}x_4^{1+2\tau+2\sigma}\partial_{x_4},\\&j'=0,\cdots,p-1-2\sigma,\tau=0,1,\sigma=0,1\}\end{aligned}$$

2.3 k=2p+2 的情形

与 $k=2p+1$ 的情形类似,同样地,对矩阵 $\boldsymbol{L}$ 进行化简及删行,当 $p=0,1,2$ 时,分块矩阵 $\overline{\boldsymbol{L}}_2$ 和 $\overline{\boldsymbol{L}}_{12}$ 均为列满秩的,将 $\overline{\boldsymbol{L}}_2$ 和 $\overline{\boldsymbol{L}}_{12}$ 分别删除某些行,则

$$\overline{\boldsymbol{L}}_2\to\widetilde{\boldsymbol{L}}_2,\overline{\boldsymbol{L}}_{12}\to\widetilde{\boldsymbol{L}}_{12}$$

经计算得到:对于 $p=0$,矩阵 $\widetilde{\boldsymbol{L}}_2$ 和 $\widetilde{\boldsymbol{L}}_{12}$ 的行列式分别记为 θ_0 和 $\beta_2\rho_0$.对于 $p=i,i=1,2$,矩阵 $\widetilde{\boldsymbol{L}}_2$ 和 $\widetilde{\boldsymbol{L}}_{12}$ 的行列式分别记为 θ_i 和 $\beta_2^{2i}\rho_i$,其中,$\theta_i,\rho_i(i=0,1,2)$ 是关于参数 α_2 的整系数多项式函数.

同样地,经过上述的删行处理后,变换后的方阵为

$$\widetilde{\boldsymbol{L}}=\partial_{1,1}^{4,4}(\boldsymbol{L}_1)+\partial_{1,2}^{4,4}(\boldsymbol{L}_5)+\partial_{2,1}^{4,4}(\widetilde{\boldsymbol{L}}_2)+\partial_{3,3}^{4,4}(\boldsymbol{L}_{11})+\partial_{3,4}^{4,4}(\boldsymbol{L}_{15})+\partial_{4,3}^{4,4}(\boldsymbol{L}_{12})$$

借助 Maple 符号计算软件,得到:若 $\beta_2\neq0$,且 $\alpha_2\notin S_2$,其中,

$$S_2=\left\{-2,-\frac{14}{15},-\frac{3}{62},\pm\frac{1}{9},\frac{229\pm\sqrt{60001}}{630},\frac{251\pm\sqrt{43465}}{72},\frac{3199-a}{3510}-\frac{1913731}{3150a},a=(3944051396+585)^{\frac{1}{3}}\right\}$$

则 $\theta_i\rho_i\neq0,i=0,1,2$,所以有 $\det(\widetilde{L})\neq0$.

因此,我们可得到引理 4.

引理 4 令 $p\in N$,若 $\alpha_2\notin S_2$ 且 $\beta_2\neq0$,则对于 $p=0,1,2$,线性算子 $L_{2p+2}^{(1)}$ 的补空间为

$$\begin{aligned}C_{2p+3}^{(1)}=span\{&x_1^{2p+5-2i-3\tau}x_3^{2i+\tau}x_4^{\tau}\partial_{x_2},\\&x_1^{2p-2j-2\tau-4\sigma}x_2^{1-\tau}x_3^{2j+1}x_4^{1+2\tau+2\sigma}\partial_{x_2},\\&x_1^{2p+4-2i-\tau}x_3^{2i+1-\tau}x_4^{\tau}\partial_{x_4},\\&x_1^{2p+1-2j-2\tau-4\sigma}x_2^{1-\tau}x_3^{2j}x_4^{1+2\tau+2\sigma}\partial_{x_4},\\&i=0,\cdots,p+2-\tau,\\&j=0,\cdots,p-1-2\sigma,\\&\tau=0,1,\sigma=0,1\}\end{aligned}$$

2.4 3 次、5 次截断超规范形

定理 1 若 $\beta_1=\alpha_1^2,\alpha_1\alpha_2\beta_2\neq0$ 且 $\dfrac{\alpha_2}{\alpha_1^2}\notin S_1\cup S_2$,则向量场(1)的 5 次截断的一阶规范形是超规范形.

证明: 当 $k=1$ 时,经计算得到

$$\mathrm{Ker}L_1^{(1)}=span\{x_2\partial_{x_1}+(\alpha_1x_1x_2+\alpha_2x_1^3)\partial_{x_2}+$$

$x_4\partial_{x_3}+(\beta_1x_1^2x_3+\beta_2x_3^3)\partial_{x_4}\}$

因此,对任意的 $T_1\in \mathrm{Ker}L_1^{(1)}$,存在 $\alpha\in R$,使得对于所有的 $k\geqslant 1$,有$[V_k,T_1]=\alpha[V_k,V_1]$成立.

当 $k=2,\cdots,7$ 时,由前面的分析并借助于 Maple 符号计算软件得到,若 $\beta_1=\alpha_1^2$, $\alpha_1\alpha_2\beta_2\neq 0$ 且 $\frac{\alpha_2}{\alpha_1^2}\notin S_1\cup S_2$,矩阵 $\boldsymbol{L}$ 是列满秩的,因此,

$$\mathrm{Ker}L_k^{(1)}=\{0\}.$$

由引理 2 可知,向量场(1)的 5 次截断的一阶规范形是唯一的,即为超规范形.

定理 2　若 $\beta_1=\alpha_1^2$, $\alpha_1\alpha_2\beta_2\neq 0$ 且 $\frac{\alpha_2}{\alpha_1^2}\notin S_1\cup S_2$,向量场(1)的 3 次截断超规范形为

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1&=x_2\\
\dot{x}_2&=\alpha_1x_1x_2+\alpha_2x_1^3+\sum_{i=0,2}b_{i,1,2-i,0}^{(3)}x_1^ix_3^{2-i}x_2+\\
&\quad\sum_{i=0,2}b_{i,1-i,1,1}^{(3)}x_1^ix_2^{1-i}x_3x_4\\
\dot{x}_3&=x_4\\
\dot{x}_4&=\beta_1x_1^2x_3+\beta_2x_3^3+d_{0,1,0,1}^{(2)}x_2x_4+d_{0,0,0,3}^{(3)}x_4^3+\\
&\quad\sum_{i=0,2}d_{i,0,2-i,1}^{(3)}x_1^ix_3^{2-i}x_4+\sum_{i=0,1}d_{1,1,i,1-i}^{(3)}x_1x_2x_3^ix_4^{1-i}
\end{aligned}$$

超规范形的各项系数由原始向量场(1)唯一确定.

定理 3　若 $\beta_1=\alpha_1^2$, $\alpha_1\alpha_2\beta_2\neq 0$ 且 $\frac{\alpha_2}{\alpha_1^2}\notin S_1\cup S_2$,向量场(1)的 5 次截断超规范形为

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1&=x_2\\
\dot{x}_2&=\alpha_1x_1x_2+\alpha_2x_1^3+\sum_{i=0,2}b_{i,1,2-i,0}^{(3)}x_1^ix_3^{2-i}x_2+\\
&\quad\sum_{i=0,2}b_{i,1-i,1,1}^{(3)}x_1^ix_2^{1-i}x_3x_4+X_4+X_5\\
\dot{x}_3&=x_4\\
\dot{x}_4&=\beta_1x_1^2x_3+\beta_2x_3^3+d_{0,1,0,1}^{(2)}x_2x_4+d_{0,0,0,3}^{(3)}x_4^3+\\
&\quad\sum_{i=0,2}d_{i,0,2-i,1}^{(3)}x_1^ix_3^{2-i}x_4+\sum_{i=0,1}d_{1,1,i,1-i}^{(3)}x_1x_2x_3^ix_4^{1-i}+\\
&\quad Y_4+Y_5
\end{aligned}$$

其中,

$$\begin{aligned}
X_4&=\sum_{i=0,2,4}^{i+j=4}b_{i,0,j,0}^{(4)}x_1^ix_3^j+\\
&\quad\sum_{i=0,2}^{i+j=3}b_{i,0,j,1}^{(4)}x_1^ix_3^jx_4+b_{0,0,1,3}^{(4)}x_3x_4^3\\
X_5&=\sum_{i=1,3,5}^{i+j=5}b_{i,0,j,0}^{(5)}x_1^ix_3^j+\sum_{i=1,3}^{i+j=4}b_{i,0,j,1}^{(5)}x_1^ix_3^jx_4+\\
&\quad\sum_{i=0,2}^{i+j=4}b_{i,1,j,0}^{(5)}x_1^ix_2x_3^j+\sum_{i=0,2}^{i+j=3}b_{i,1,j,1}^{(5)}x_1^ix_2x_3^jx_4+\\
&\quad\sum_{i=0,1}^{i+j=1}b_{i,j,1,3}^{(5)}x_1^ix_2^jx_3x_4^3\\
Y_4&=\sum_{i=1,3}^{i+j=4}(d_{i,0,j,0}^{(4)}x_1^ix_3^j+d_{i,0,0,j}^{(4)}x_1^ix_4^j)+\\
&\quad\sum_{i=0,1}^{i+j=1}d_{i,j,2,1}^{(4)}x_1^ix_2^jx_3^2x_4\\
Y_5&=\sum_{i=0,2,4;\tau=0,1}^{i+j=5}d_{i,0,j-\tau,\tau}^{(5)}x_1^ix_3^{j-\tau}x_4^\tau+\\
&\quad\sum_{i=0,2}^{i+j=2}d_{i,0,j,3}^{(5)}x_1^ix_3^jx_4^3+\\
&\quad\sum_{i=1,3}^{i+j=3}d_{i,1,j,1}^{(5)}x_1^ix_2x_3^jx_4+\\
&\quad\sum_{i=0,1}^{i+j=1}d_{i,i,0,2j+3}^{(5)}x_1^ix_2^ix_4^{2j+3}
\end{aligned}$$

超规范形的各项系数由原始向量场(1)唯一确定.

3　环型桁架可展开结构模型的化简

环型桁架可展开结构具有应用空间大、结构形式简明的特点.在一定范围内随着口径增大,质量并没有成比例增加,而且结构形式也不会发生改变,是目前大型卫星天线较为理想的结构形式,因此环型桁架卫星天线被广泛用于航空领域.为了便于分析环型桁架可展天线结构在太空条件下的非线性动力学性态,我们需要将其化简为更简单的形式.本节主要是利用超规范形理论对环型桁架可展结构的平均方程进行化简.

侯飞等[14]将环型桁架可展天线等效成圆柱壳结构,基于 Hamilton 原理建立呼吸振动形式下环型桁架可展开结构的动力学控制方程,并利用 Galerkin 方法对运动偏微分方程进行离散,得到二自由度的非线性运动学方程为

$$\begin{aligned}
&\ddot{w}_1+\mu_1\dot{w}_1+\omega_1^2w_1+\varepsilon\gamma_{11}f_T\cos(\Omega t)w_1+\\
&\quad\varepsilon\gamma_{12}w_2+\varepsilon\gamma_{13}w_1^3+\varepsilon\gamma_{14}w_1^2w_2+\varepsilon\gamma_{15}w_1w_2^2+\\
&\quad\varepsilon\gamma_{16}w_2^3=\varepsilon\gamma_{17}+\varepsilon\gamma_{18}f_T\cos(\Omega t)\\
&\ddot{w}_2+\mu_2\dot{w}_2+\omega_2^2w_2+\varepsilon\gamma_{21}f_T\cos(\Omega t)w_2+\\
&\quad\varepsilon\gamma_{22}w_1+\varepsilon\gamma_{23}w_2^3+\varepsilon\gamma_{24}w_2^2w_1+\varepsilon\gamma_{25}w_2w_1^2+\\
&\quad\varepsilon\gamma_{26}w_1^3=\varepsilon\gamma_{27}+\varepsilon\gamma_{28}f_T\cos(\Omega t)
\end{aligned}\tag{8}$$

其中,ω_1,ω_2 为相应线性系统的第一阶和第二阶固有频率,ε 为小扰动.

考虑 1:1内共振,即

$$\omega_1^2=\Omega^2+\varepsilon\sigma_1,\ \omega_2^2=\Omega^2+\varepsilon\sigma_2$$

其中,σ_1,σ_2 为系统的调谐参数.为了方便处理,令 $\Omega=1$.

运用多尺度方法对方程(8)进行摄动分析，并引入如下线性变换

$$x_1\to x_2,\quad x_2\to x_1,\quad x_3\to x_4,\quad x_4\to x_3$$

获得直角坐标形式的5次平均方程为：

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= (-a_1-5a_2)x_2+3a_3x_1^2+a_3x_2^2+3a_4x_3^2+\\
&a_4x_4^2+a_5(x_1^2+x_2^2)x_1+a_6(x_4^2+x_3^2)x_1+\\
&2a_6(x_2x_4+x_1x_3)x_3-a_7(x_1^2+x_2^2)x_2-\\
&a_8x_4^2x_2-a_9x_3^2x_2-a_{10}x_3x_4x_1-\\
&a_{11}(x_1^2+x_2^2)^2x_2-a_{12}x_3^2x_4^2x_2-\\
&a_{13}(x_3^2+x_4^2)x_1x_3x_4-a_{14}(x_3^4+x_4^4)x_2+\\
&a_{15}(x_4^4-x_3^4)x_2-a_{16}x_2^3x_4^2-a_{17}x_2^3x_3^2-\\
&a_{18}x_2^2x_3x_4x_1-a_{19}x_1^3x_3x_4-a_{20}x_1^2x_3^2x_2-\\
&a_{21}x_1^2x_4^2x_2\\
\dot{x}_2 &= (a_1-a_2)x_1+2a_3x_1x_2+2a_4x_3x_4+\\
&a_5(x_1^2+x_2^2)x_2+a_6(x_4^2+x_3^2)x_2+\\
&2a_6(x_2x_4+x_1x_3)x_4+a_8x_3^2x_1+\\
&a_7(x_1^2+x_2^2)x_1+a_9x_4^2x_1+a_{10}x_3x_4x_2+\\
&a_{16}x_1^3x_3^2+a_{11}(x_1^2+x_2^2)^2x_1+a_{12}x_3^2x_4^2x_1+\\
&a_{13}(x_3^2+x_4^2)x_2x_3x_4+a_{14}(x_3^4+x_4^4)x_1-\\
&a_{15}(x_4^4-x_3^4)x_1+a_{17}x_1^3x_4^2+a_{18}x_1^2x_3x_4x_2+\\
&a_{19}x_2^3x_3x_4+a_{20}x_2^2x_4^2x_1+a_{21}x_2^2x_3^2x_1\\
\dot{x}_3 &= (-b_1-5b_2)x_4+b_3x_2x_4+3b_3x_1x_3+\\
&b_4(x_2^2+x_1^2)x_3+2b_4(x_3x_1+x_4x_2)x_1+\\
&b_5(x_3^2+x_4^2)x_3-b_6x_1x_2x_3-b_7(x_4^2+x_3^2)x_4-\\
&b_8x_2^2x_4-b_9x_1^2x_4-b_{10}(x_2^4+x_1^4)x_4-\\
&b_{11}(x_2^4-x_1^4)x_4-b_{12}(x_3^2+x_4^2)^2x_4-\\
&b_{14}x_2^2x_4^3-b_{13}(x_1^2+x_2^2)x_1x_2x_3-b_{15}x_1^2x_4^3-\\
&b_{16}x_3^2x_2^2x_4-b_{17}x_3^2x_1^2x_4-b_{18}x_1x_2x_3x_4^2-\\
&b_{19}x_1^2x_2^2x_4-b_{20}x_1x_2x_3^3\\
\dot{x}_4 &= (b_1-b_2)x_3+b_3(x_2x_3+x_1x_4)+\\
&b_4(x_1^2+x_2^2)x_4+2b_4(x_1x_3+x_2x_4)x_2+\\
&b_5(x_3^2+x_4^2)x_4+b_6x_1x_2x_4+b_7(x_4^2+x_3^2)x_3+\\
&b_8x_1^2x_3+b_9x_2^2x_3+b_{10}(x_2^4+x_1^4)x_3+\\
&b_{11}(x_1^4-x_2^4)x_3+b_{12}(x_3^2+x_4^2)^2x_3+\\
&b_{14}x_1^2x_3^3+b_{13}(x_1^2+x_2^2)x_1x_2x_4+b_{15}x_2^2x_3^3+\\
&b_{16}x_4^2x_1^2x_3+b_{17}x_4^2x_2^2x_3+b_{18}x_1x_2x_4x_3^2+\\
&b_{19}x_1^2x_2^2x_3+b_{20}x_1x_2x_4^3
\end{aligned}\tag{9}$$

其中，

$$a_1=\frac{1}{8}(\mu_1^2+\sigma_1^2),\quad a_2=\frac{1}{24}\gamma_{11}^2f_T^2$$

$$a_3=\frac{3}{16}\gamma_{13}f_T\gamma_{18},\quad a_4=\frac{1}{16}\gamma_{15}f_T\gamma_{18}$$

$$a_5=\frac{3}{4}\mu_1\gamma_{13},\quad a_6=\frac{1}{4}\gamma_{15}\mu_2$$

$$a_7=\frac{3}{4}\gamma_{13}\sigma_1,\quad a_8=\frac{1}{2}\gamma_{15}\sigma_1+\frac{1}{4}\gamma_{15}\sigma_2$$

$$a_9=\frac{1}{2}\gamma_{15}\sigma_1-\frac{1}{4}\gamma_{15}\sigma_2,\quad a_{10}=\frac{1}{2}\gamma_{15}\sigma_2$$

$$a_{11}=\frac{15}{16}\gamma_{13}^2,\quad a_{12}=\frac{5}{8}\gamma_{15}^2,\quad a_{13}=\frac{5}{4}\gamma_{15}\gamma_{23}$$

$$a_{14}=\frac{5}{16}\gamma_{15}^2,\quad a_{15}=\frac{5}{8}\gamma_{15}\gamma_{23}$$

$$a_{16}=\frac{5}{4}\gamma_{13}\gamma_{15}+\frac{5}{8}\gamma_{25}\gamma_{15}$$

$$a_{17}=\frac{7}{4}\gamma_{13}\gamma_{15}-\frac{3}{8}\gamma_{25}\gamma_{15}$$

$$a_{18}=-\frac{9}{4}\gamma_{13}\gamma_{15}+2\gamma_{25}\gamma_{15}$$

$$a_{19}=\frac{5}{4}\gamma_{13}\gamma_{15}$$

$$a_{20}=\frac{5}{8}\gamma_{25}\gamma_{15}$$

$$a_{21}=3\gamma_{13}\gamma_{15}-\frac{3}{8}\gamma_{25}\gamma_{15}$$

$$b_1=\frac{1}{8}\mu_2^2+\frac{1}{8}\sigma_2^2$$

$$b_2=\frac{1}{24}\gamma_{21}^2f_T^2$$

$$b_3=\frac{1}{8}\gamma_{25}f_T\gamma_{18}$$

$$b_4=\frac{1}{4}\gamma_{25}\mu_1$$

$$b_5=\frac{3}{4}\mu_2\gamma_{23}$$

$$b_6=\frac{1}{2}\sigma_1\gamma_{25}$$

$$b_7=\frac{3}{4}\sigma_2\gamma_{23}$$

$$b_8=\frac{1}{2}\sigma_2\gamma_{25}+\frac{1}{4}\sigma_1\gamma_{25}$$

$$b_9=\frac{1}{2}\sigma_2\gamma_{25}-\frac{1}{4}\sigma_1\gamma_{25}$$

$$b_{10}=\frac{5}{16}\gamma_{25}^2$$

$$b_{11}=\frac{5}{8}\gamma_{25}\gamma_{13}$$

$$b_{12}=\frac{15}{16}\gamma_{23}^2$$

$$b_{13}=\frac{5}{4}\gamma_{25}\gamma_{13}$$

$$b_{14}=\frac{5}{8}\gamma_{25}\gamma_{15}+\frac{5}{4}\gamma_{25}\gamma_{23}$$

$$b_{15}=-\frac{3}{8}\gamma_{25}\gamma_{15}+\frac{7}{4}\gamma_{25}\gamma_{23}$$

$$b_{16}=-\frac{3}{8}\gamma_{25}\gamma_{15}+3\gamma_{25}\gamma_{23}$$

$$b_{17}=\frac{5}{8}\gamma_{25}\gamma_{15}$$

$$b_{18}=2\gamma_{25}\gamma_{15}$$

$$b_{19}=\frac{5}{8}\gamma_{25}^2$$

$$b_{20}=\frac{5}{4}\gamma_{25}\gamma_{23}$$

显然,原点是微分方程(9)的奇点,在奇点处的 Jacobi 矩阵为

$$\begin{pmatrix} 0 & -a_1-5a_2 & 0 & 0 \\ a_1-a_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -b_1-5b_2 \\ 0 & 0 & b_1-b_2 & 0 \end{pmatrix}$$

对应的特征方程为

$$(\lambda^2+a_1^2+4a_1a_2-5a_2^2)(\lambda^2+b_1^2+4b_1b_2-5b_2^2)=0 \quad (10)$$

显然,当 $a_1=a_2$, $b_1=b_2$ 时,特征方程(10)有 2 对双零特征根

$$\lambda_{1,2}=0,\quad \lambda_{3,4}=0$$

令 $a_1=a_2=b_1=b_2=\dfrac{1}{6}$,并作如下线性变换

$$x_1\to -x_1,\quad x_3\to -x_3$$

则系统(9)化为

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1={}&x_2-3a_3x_1^2-a_3x_2^2-3a_4x_3^2-a_4x_4^2+\\
&a_5(x_1^2+x_2^2)x_1+a_6(x_4^2+x_3^2)x_1+\\
&2a_6(x_2x_4+x_1x_3)x_3+a_8x_4^2x_2+\\
&a_7(x_1^2+x_2^2)x_2+a_9x_3^2x_2+a_{10}x_3x_4x_1+\\
&a_{12}x_3^2x_4^2x_2+a_{11}(x_1^2+x_2^2)^2x_2+\\
&a_{13}(x_3^2+x_4^2)x_1x_3x_4+a_{16}x_2^3x_4^2+\\
&a_{14}(x_3^4+x_4^4)x_2-a_{15}(x_4^4-x_3^4)x_2+\\
&a_{17}x_2^3x_3^2+a_{18}x_2^2x_3x_4x_1+a_{19}x_1^3x_3x_4+\\
&a_{20}x_1^2x_3^2x_2+a_{21}x_1^2x_4^2x_2\\
\dot{x}_2={}&-2a_3x_1x_2-2a_4x_3x_4+a_5(x_1^2+x_2^2)x_2-\\
&a_8x_3^2x_1+a_6(x_4^2+x_3^2)x_2+\\
&2a_6(x_2x_4+x_1x_3)x_4-a_9x_4^2x_1-\\
&a_7(x_1^2+x_2^2)x_1-a_{10}x_3x_4x_2-\\
&a_{11}(x_1^2+x_2^2)^2x_1-a_{12}x_3^2x_4^2x_1-\\
&a_{13}(x_3^2+x_4^2)x_2x_3x_4-a_{16}x_1^3x_3^2-\\
&a_{14}(x_3^4+x_4^4)x_1+a_{15}(x_4^4-x_3^4)x_1-a_{17}x_1^3x_4^2-\\
&a_{18}x_1^2x_3x_4x_2-a_{19}x_2^3x_3x_4-a_{20}x_2^2x_4^2x_1-\\
&a_{21}x_2^2x_3^2x_1\\
\dot{x}_3={}&x_4-b_3x_2x_4-3b_3x_1x_3+b_4(x_2^2+x_1^2)x_3+\\
&2b_4(x_3x_1+x_4x_2)x_1+b_5(x_3^2+x_4^2)x_3+\\
&b_6x_1x_2x_3+b_7(x_4^2+x_3^2)x_4+b_8x_2^2x_4+\\
&b_9x_1^2x_4+b_{10}(x_2^4+x_1^4)x_4+b_{11}(x_2^4-x_1^4)x_4+\\
&b_{12}(x_3^2+x_4^2)^2x_4+b_{14}x_2^2x_4^3+\\
&b_{13}(x_1^2+x_2^2)x_1x_2x_3+b_{15}x_1^2x_4^3+b_{16}x_3^2x_2^2x_4+\\
&b_{17}x_3^2x_1^2x_4+b_{18}x_1x_2x_3x_4^2+b_{19}x_1^2x_2^2x_4+\\
&b_{20}x_1x_2x_3^3\\
\dot{x}_4={}&-b_3(x_2x_3+x_1x_4)+b_4(x_1^2+x_2^2)x_4-\\
&b_6x_1x_2x_4+2b_4(x_1x_3+x_2x_4)x_2+\\
&b_5(x_3^2+x_4^2)x_4-b_7(x_4^2+x_3^2)x_3-\\
&b_8x_1^2x_3-b_9x_2^2x_3-b_{10}(x_2^4+x_1^4)x_3-\\
&b_{11}(x_1^4-x_2^4)x_3-b_{12}(x_3^2+x_4^2)^2x_3-\\
&b_{14}x_1^2x_3^3-b_{13}(x_1^2+x_2^2)x_1x_2x_4-b_{15}x_2^2x_3^3-\\
&b_{16}x_4^2x_1^2x_3-b_{17}x_4^2x_2^2x_3-b_{18}x_1x_2x_4x_3^2-\\
&b_{19}x_1^2x_2^2x_3-b_{20}x_1x_2x_4^3
\end{aligned}\quad (11)$$

方程(11)的线性部分矩阵为

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

由定理 5 得到,若 $4a_3^2+b_8=0$, $a_3\cdot a_7\cdot b_7\neq 0$,且 $-\dfrac{a_7}{4a_3^2}\notin S_1\cup S_2$,则系统(11)的 5 次截断的超规范形为

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1={}&x_2\\
\dot{x}_2={}&-2a_3x_1x_2-a_7x_1^3+b_{2,1,0,0}^{(3)}x_1^2x_2+\\
&b_{0,1,2,0}^{(3)}x_2x_3^2+b_{1,0,1,1}^{(3)}x_1x_3x_4+b_{5,0,0,0}^{(5)}x_1^5+\\
&b_{3,0,2,0}^{(5)}x_1^3x_3^2+b_{1,0,3,1}^{(5)}x_1x_3^3x_4+
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\quad b_{2,1,1,1}^{(5)} x_1^2 x_2 x_3 x_4 + b_{0,1,3,1}^{(5)} x_2 x_3^3 x_4 \\
&\dot{x}_3 = x_4 \\
&\dot{x}_4 = -b_8 x_1^2 x_3 - b_7 x_3^3 + d_{1,1,1,0}^{(3)} x_1 x_2 x_3 + \\
&\quad d_{2,0,0,1}^{(3)} x_1^2 x_4 + d_{0,0,2,1}^{(3)} x_3^2 x_4 + d_{1,1,0,1}^{(3)} x_1 x_2 x_4 + \\
&\quad d_{4,0,1,0}^{(5)} x_1^4 x_3 + d_{2,0,3,0}^{(5)} x_1^2 x_3^3 + d_{0,0,5,0}^{(5)} x_3^5 + \\
&\quad d_{3,1,0,1}^{(5)} x_1^3 x_2 x_4 + d_{1,1,2,1}^{(5)} x_1 x_2 x_3^2 x_4
\end{aligned} \tag{12}
$$

其中,系数有:

$$b_{2,1,0,0}^{(3)} = 4a_5, \quad b_{0,1,2,0}^{(3)} = 4a_6, \quad b_{1,0,1,1}^{(3)} = 8a_6$$

$$b_{5,0,0,0}^{(5)} = -a_{11}, \quad b_{3,0,2,0}^{(5)} = -a_{16}$$

$$b_{1,0,3,1}^{(5)} = -a_{14} - a_{15}$$

$$b_{2,1,1,1}^{(5)} = -a_{18} - 2a_{20} + 3a_{19} - \frac{6a_3}{5b_3}(-3b_{15} - b_{16} + b_{18}) + \frac{8}{5}(3b_{15} + b_{16} - b_{18})$$

$$b_{0,1,3,1}^{(5)} = -\frac{2a_4}{15b_3}(-3b_{15} - b_{16} + b_{18}) - \frac{2}{3}a_{12} + 2a_{13} - 4(a_{14} - a_{15})$$

$$d_{1,1,1,0}^{(3)} = 8b_4, \quad d_{2,0,0,1}^{(3)} = 4b_4$$

$$d_{0,0,2,1}^{(3)} = 5b_5, \quad d_{1,1,0,1}^{(3)} = -4a_9 + 2a_{10}$$

$$d_{4,0,1,0}^{(5)} = -b_{10} - b_{11}, \quad d_{2,0,3,0}^{(5)} = -b_{14}$$

$$d_{0,0,5,0}^{(5)} = -b_{12}$$

$$d_{3,1,0,1}^{(5)} = \frac{2}{3}b_{19} - b_{13} + 4b_{10} - 4b_{11}$$

$$d_{1,1,2,1}^{(5)} = -\frac{3}{2}b_{20} + b_{17} + \frac{3}{10}b_{18} + \frac{3}{5}b_{15} - \frac{4}{5}b_{16}$$

由原始系统(11)中的系数唯一确定.

4 结论

本文基于对 Bogdanov-Takens 最简规范形研究的成功经验,将其推广至四维情形.利用线性次数函数与多重李括号相结合的方法,通过引入并完善大尺寸分块矩阵的新记号表示方法,分别获得四维幂零向量场 3 次、5 次截断的超规范形.并将理论结果应用于环型桁架卫星天线模型的简化问题.

随着维数的增加,会面临嵌套的大尺寸分块矩阵的计算与处理,本文通过对大尺寸分块矩阵的新记号表示的引入,获得一种处理大尺寸分块矩阵运算的新方法,简化繁琐的大尺寸矩阵的运算,为后续的研究带来便利条件.

在实际应用方面,将超规范形理论应用于研究环型桁架卫星天线模型的化简问题,获得超规范形的一般形式及系数对应关系,使得简化模型最大限度地符合实际问题,为进一步揭示复杂非线性动力系统的周期解及分岔机理奠定基础,为基于非线性动力学理论的减振设计提供指导.

参 考 文 献

1 Arnold V I. Geometrical method in the theory of ordinary differential equation. New York:Spring-Verlag, 1988:3~36

2 Ushiki S. Normal forms for singularities of vector fields. *Japan Journal of Applied Mathematics*, 1984,1(1):1~37

3 Kokubu H, Oka H, Wang D. Linear grading function and further reduction of normal forms. *Journal of Differential Equations*, 1996,132(2):293~318

4 Baider A, Sanders J A. Further reduction of the Takens-Bogdanov normal form. *Journal of Differential Equations*, 1992,99(2):205~244

5 Peng J P, Wang D. A sufficient condition for the uniqueness of normal forms and unique normal forms of generalized Hopf singularities. *International Journal Bifurcation and Chaos*, 2004,14(9):3337~3345

6 Wang D, Li J, Huang M H, et al. Unique normal form of Bogdanov-Takens singularities. *Journal of Differential Equations*, 2000,163(1):223~238

7 Li J, Wang D, Zhang W. General forms of the simplest normal form of Bogdanov-Takens singularities. *Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems*, 2001, 8(4):519~530

8 Zhang W, Wang F, Zu J. Computation of normal forms for high dimensional non-linear systems and application to non-planar non-linear oscillations of a cantilever beam. *Journal of Sound and Vibration*, 2004,278(4):949~974

9 Chen S P, Zhang W. Further reduction of normal forms for high dimensional nonlinear systems and application to a composite laminated piezoelectric plate. *Applied Mechanics and Materials*, 2013,291:2662~2665

10 陈淑萍,张伟. 一类求解非线性动力系统高阶规范形的新方法. 动力学与控制学报, 2013,11(3):193~198 (Chen S P, Zhang W. A new approach for computing normal forms of high dimensional nonlinear systems. *Journal of Dynamics and Control*, 2013,11(3):193~198 (in Chinese))

11 Li J, Zhang L N, Wang D. Unique normal form of a class of 3 dimensional vector fields with symmetries. *Journal of*

Differential Equations, 2014,257(7):2341~359

12 Li J, Kou L Y, Wang D. Unique normal form for a class of three-dimensional nilpotent vector fields. *International Journal Bifurcation and Chaos*, 2017,27(8):1750131

13 Li J, Kou L Y, Wang D, et al. Unique normal form and the associated coefficients for a class of three-dimensional nilpotent vector fields. *International Journal Bifurcation and Chaos*, 2017,27(14):1750224

14 侯飞,张伟. 环型桁架卫星天线的非线性动力学分析. 动力学与控制学报, 2016,14(2):138~142 (Hou F, Zhang W. Analysis on nonlinear dynamics of circular antenna. *Journal of Dynamics and Control*, 2016,14(2): 138~142 (in Chinese))

HYPERNORMAL FORM FOR A CLASS OF FOUR-DIMENSIONAL NILPOTENT VECTOR FIELDS AND ITS APPLICATION *

Kou Liying[1,3]　Li Jing[1†]　Zhang Wei[2]　Xi Shuaijie[1]

(1.*College of Applied Sciences*, *Beijing University of Technology*, *Beijing* 100124, *China*)

(2.*College of Mechanical Engineering and Applied Electronics Technology*, *Beijing University of Technology*, *Beijing* 100124, *China*)

(3.*College of Science*, *Civil Aviation University of China*, *Tianjin* 300300, *China*)

Abstract In this paper, we mainly focus on the hypernormal form for a class of four-dimensional nilpotent vector fields, and the results are applied to simplify the practical engineering models in the high-dimensional nonlinear dynamics. We improve and develop the further reduction theory of the normal form proposed by Sanders, Baider and KOW, and based on the method of linear grading function, multiple Lie bracket and the new notations for block matrices, we obtain the three order and the five order hypernormal form, respectively, and then the results are applied to simplify the circular truss antenna models. The introduction of the new notations for block matrices gives a new method for dealing with the calculation of big size block matrices, which brings conveniences for the later research.

Key words four-dimensional nilpotent vector fields, hypernormal form, linear grading function, multiple Lie brackets

---

Received 10 April 2018, revised 10 May 2018.

* The project supported by the National Natural Science Foundation of China (11772007, 11372014, 11290152) and the Beijing Natural Science Foundation (1172002).

† Corresponding author E-mail: leejing@bjut.edu.cn