

# 超混沌地磁系统的同步控制<sup>\*</sup>

王全宇<sup>1†</sup> 王贺元<sup>1,2</sup> 李阔<sup>1</sup>

(1.辽宁工业大学 理学院, 锦州 121001) (2.沈阳师范大学 数学与系统科学学院, 沈阳 110034)

**摘要** 基于 Lyapunov 稳定性理论, 通过在地磁系统中加入状态反馈控制器, 构造出四维超混沌地磁系统, 研究其最基本的动力学特性, 讨论了该系统的全局指数同步以及存在时滞和分数阶情况下的同步控制问题。数值仿真结果表明所提出方法的可行性和有效性。

**关键词** 地磁系统, 全局指数同步, 时滞, 分数阶, 同步控制

DOI: 10.6052/1672-6553-2018-054

## 引言

混沌是非线性系统特有的一种运动形式<sup>[1]</sup>, 是产生于确定性系统的依赖于初始条件的往复性稳态非周期运动, 类似于随机振动而具有长期不可预测性。自 Lorenz 教授在三维自治系统中发现 Lorenz 系统以来<sup>[2]</sup>, 人们就不断地寻找新的混沌系统, 如 Chen 系统<sup>[3]</sup>、Lü 系统<sup>[4]</sup>。具有两个或者两个以上正的 Lyapunov 指数的系统称为超混沌系统, Rossler 在 1979 年首次发现超混沌系统。随后的几十年里, 国内外学者进行了大量的研究, 如 Chen 等在 Chen 系统的基础上提出了超混沌 Chen 系统<sup>[5]</sup>; Lü 等基于 Lü 系统提出了超混沌 Lü 系统<sup>[6]</sup>; Nikolov 等提出了变形超混沌 Rossler 系统<sup>[7]</sup>。

混沌的同步属于一种广义混沌控制, 混沌同步是使驱动系统和响应系统以同步的方式振动, 两个混沌系统的动力学行为当初始条件接近时最终达到相同。混沌系统的控制与同步在物理系统、激光、等离子、电路、化学反应器、生态系统、生物系统都有潜在应用。由于这些潜在的应用价值, 许多科学家近几十年来一直致力于混沌控制与同步的研究。混沌控制与同步中的自适应控制与同步<sup>[8-10]</sup>、滞后控制与同步<sup>[11,12]</sup>、反同步<sup>[13]</sup>、相同步<sup>[14]</sup>、脉冲同步<sup>[15]</sup>及滑膜同步<sup>[16]</sup>方法已扩展到超混沌控制与同步领域。本文中我们主要基于 Lyapunov 稳定性理论对地磁系统<sup>[17]</sup>增加三个反馈控制器, 构造超

混沌地磁系统, 用 Matlab 软件数值模拟系统发生超混沌现象的吸引子图像, 讨论该系统的全局指数同步<sup>[18]</sup>以及不同情况下(时滞<sup>[11,12]</sup>、分数阶<sup>[19-21]</sup>)超混沌地磁系统的同步控制问题。

## 1 超混沌地磁系统的设计

地磁系统<sup>[17]</sup>可表示为如下方程:

$$\begin{cases} \dot{x} = a(y - x) \\ \dot{y} = zx - y \\ \dot{z} = R - xy - z \end{cases} \quad (1)$$

当  $a=5, R=18$  时, 地磁系统处于混沌状态, 其混沌吸引子在各平面投影如图 1 所示。

在系统(1)中引入变量  $w$ , 产生的新系统为

$$\begin{cases} \dot{x} = a(y - x) + xw \\ \dot{y} = zx - yw \\ \dot{z} = R - xy - z + w \\ \dot{w} = bx \end{cases} \quad (2)$$

要想产生超混沌吸引子, 必须要满足以下几个条件:①具有耗散结构;②方程的维数不少于四维;③系统至少有两个增强不稳定因素的方程且这两个方程至少有一个含非线性项。系统(2)中  $b$  为新引入的控制参数, 当参数的取值  $a=5, R=18, b=-3$ , 系统的 Lyapunov 指数为  $\lambda_1=2.3072, \lambda_2=0.061812, \lambda_3=-0.010385, \lambda_4=-8.3586$ , 此时系统表现出超混沌行为, 超混沌吸引子的仿真结果如图 2 所示。

2018-03-28 收到第 1 稿, 2018-04-19 收到修改稿。

\* 国家自然科学基金资助(11572146, 11526105)

† 通讯作者 E-mail: 342652382@qq.com

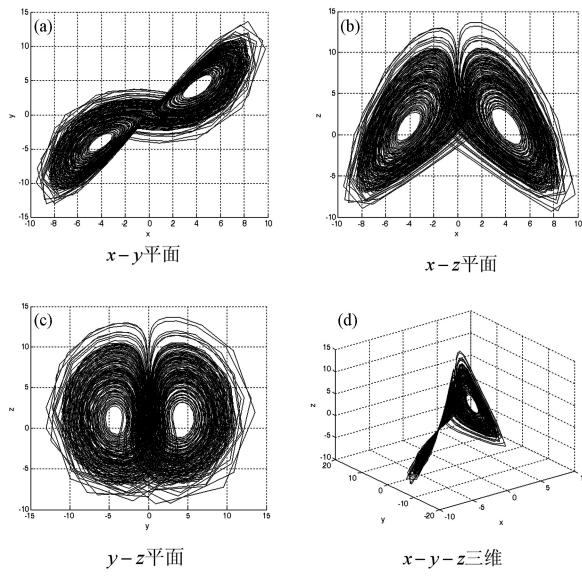


图1 地磁系统的混沌吸引子

Fig.1 Attractors of earth's magnetic field system

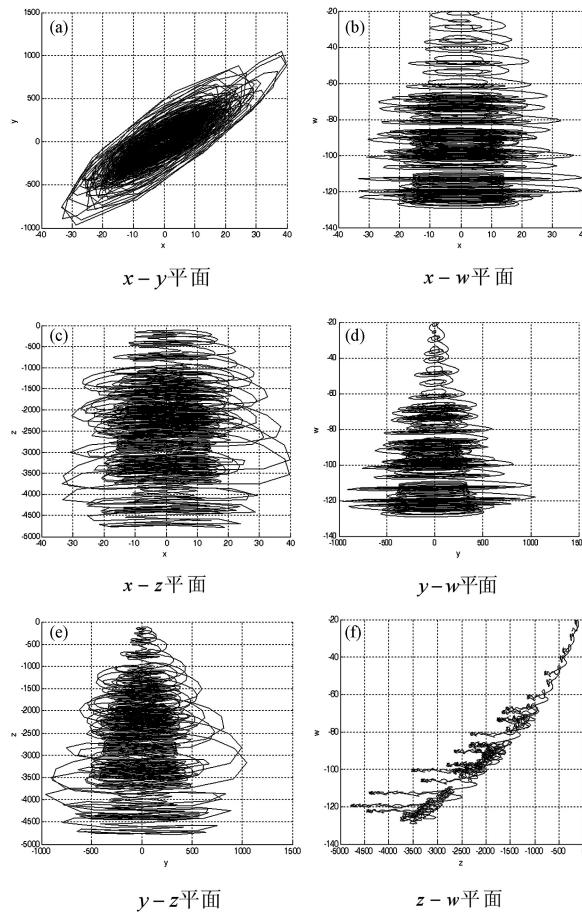


图2 超混沌地磁系统吸引子

Fig.2 Attractors of hyperchaotic earth's magnetic field system

## 2 全局指数同步

我们研究  $a=5, R=18, b=-3$  时系统的同步问题。

驱动系统:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a(x_2 - x_1) + x_1 x_4 \\ \dot{x}_2 = x_1 x_3 - x_2 x_4 \\ \dot{x}_3 = R - x_1 x_2 - x_3 + x_4 \\ \dot{x}_4 = b x_1 \end{cases} \quad (3)$$

响应系统可表示为

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = a(y_2 - y_1) + y_1 y_4 + \mu_1 \\ \dot{y}_2 = y_1 y_3 - y_2 y_4 + \mu_2 \\ \dot{y}_3 = R - y_1 y_2 - y_3 + y_4 + \mu_3 \\ \dot{y}_4 = b y_1 + \mu_4 \end{cases} \quad (4)$$

响应系统中的  $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$  是要设计的控制器。

我们令  $e^T = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ ,  $e_i = y_i - x_i, i=1, 2, 3, 4$ , 可以得到误差动力系统:

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = ae_2 - ae_1 + e_1 e_4 + x_1 e_4 + x_4 e_4 - x_4 e_1 + \mu_1 \\ \dot{e}_2 = e_1 e_3 + x_1 e_3 + x_3 e_1 - e_2 e_4 - x_2 e_4 - x_4 e_2 + \mu_2 \\ \dot{e}_3 = -e_1 e_2 - x_1 e_2 - x_2 e_1 - e_3 + e_4 + \mu_3 \\ \dot{e}_4 = b e_1 + \mu_4 \end{cases} \quad (5)$$

**定理1:** 对于上述误差系统, 当控制器选取如下形式:

$$\begin{cases} \mu_1 = -(a+k)e_1 - ae_2 + ae_1 - e_1 e_4 - x_1 e_4 - x_4 e_1 \\ \mu_2 = -e_2 - e_1 e_3 - x_1 e_3 - x_3 e_1 + e_2 e_4 + x_2 e_4 + x_4 e_2 \\ \mu_3 = -e_3 + e_1 e_2 + x_1 e_2 + x_2 e_1 + e_3 - e_4 \\ \mu_4 = -e_4 - b e_1 \end{cases} \quad (6)$$

选取适当的  $k > 0$ , 使得矩阵

$$P = \begin{bmatrix} a+k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

是正定的, 则误差系统的零解是全局稳定的, 从而驱动系统和响应系统是全局指数同步的。

**证明:** 构造一个径向无界 Lyapunov 函数  $V = \frac{1}{2}(e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 + e_4^2)$ , 计算  $V$  沿着误差系统的正半轨线对时间的导数, 有

$$\frac{dV}{dt} = e_1 \dot{e}_1 + e_2 \dot{e}_2 + e_3 \dot{e}_3 + e_4 \dot{e}_4$$

$$\begin{aligned}
&= e_1(ae_2 - ae_1 + e_1e_4 + x_1e_4 + x_4e_1 + \mu_1) + \\
&\quad e_2(e_1e_3 + x_1e_3 + x_3e_1 - e_2e_4 - x_2e_4 - x_4e_2 + \mu_2) + \\
&\quad e_3(-e_1e_2 - x_1e_2 - x_2e_1 - e_3 + e_4 + \mu_3) + e_4(be_1 + \mu_4) \\
&= -(a+k)e_1^2 - e_2^2 - e_3^2 - e_4^2 \\
&= \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -(a+k) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{bmatrix} \\
&= -\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} a+k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{bmatrix} \\
&= -e^T P e
\end{aligned}$$

其中,

$$P = \begin{bmatrix} a+k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

为了使误差系统的零解全局指数稳定,只需保证矩阵  $P$  正定即可,当且仅当  $a+k>0$  成立时,即  $k>-a$ ,从而得到  $k>-5$  时,矩阵  $P$  是正定的,而  $\dot{V}$  是负定的,那么,有  $\frac{dV}{dt} \leq -\lambda_{\min}(P)(e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 + e_4^2)$ ,其中

$\lambda_{\min}$  为矩阵  $P$  的最小特征值. 从而有  $e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 + e_4^2 = V(X(t)) \leq V(X(t_0)) e^{-\lambda_{\min}(P)(t-t_0)}$ ,  $t \geq t_0$ . 当  $t \rightarrow \infty$  时,  $V(X(t)) \rightarrow 0$ , 误差系统的零解是全局指数稳定的,因此驱动系统和响应系统是全局指数同步的,同步误差随时间  $t$  的变化如图 3 所示.

### 3 时滞同步

考虑带有时滞项的超混沌地磁系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a(x_2 - x_1) + x_1x_4 \\ \dot{x}_2 = x_1x_3 - x_2x_4 \\ \dot{x}_3 = R - x_1x_2 - x_3 + x_4 \\ \dot{x}_4 = bx_1(t-\tau) \end{cases} \quad (7)$$

当  $\tau=0$  时,系统(7)为超混沌地磁系统;当  $a=5$ ,  $R=18$ ,  $b=-3$ ,  $\tau=0.6$  时,超混沌吸引子及庞加莱映射如下

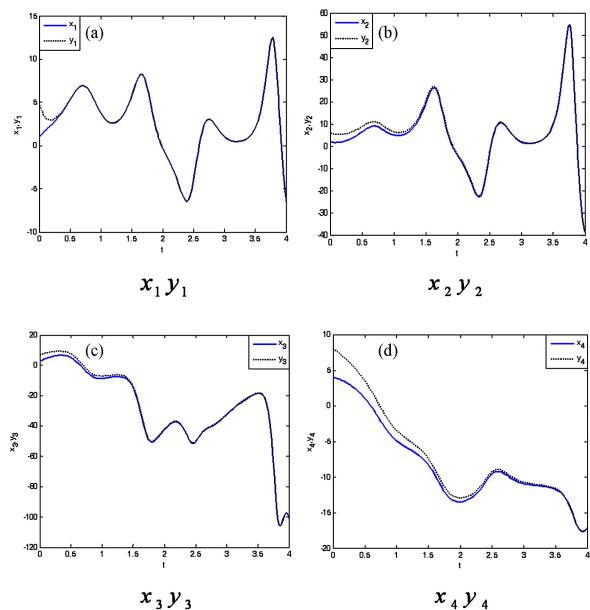


图 3 驱动系统和响应系统的状态变量的状态轨迹

Fig.3 State trajectories of state variables for drive system and response system

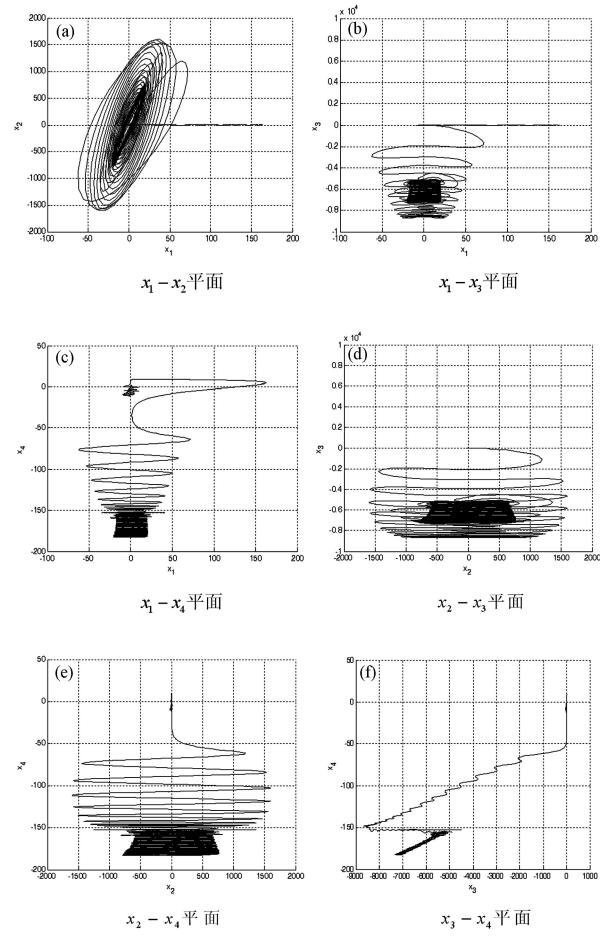
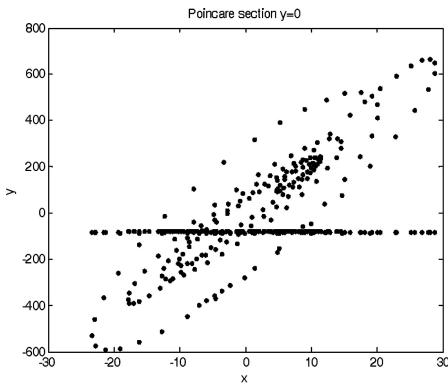


图 4  $\tau=0.6$  时系统(7)的超混沌吸引子

Fig.4 Hyperchaotic attractors of system(7) when  $\tau=0.6$

图5 庞加莱映射( $\tau=0.6$ )Fig.5 Poincare map( $\tau=0.6$ )

取系统(3)为驱动系统,则响应系统如下:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = a(y_2 - y_1) + y_1 y_4 + \mu_1 \\ \dot{y}_2 = y_1 y_3 - y_2 y_4 + \mu_2 \\ \dot{y}_3 = R - y_1 y_2 - y_3 + y_4 + \mu_3 \\ \dot{y}_4 = b y_1(t-\tau) + \mu_4 \end{cases} \quad (8)$$

其中,  $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$  是我们要设计的控制器, 令  $e^T = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ ,  $e_i = y_i - x_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ , 误差动力系统为

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = ae_2 - ae_1 + e_1 e_4 + x_1 e_4 + x_4 e_4 - x_4 e_1 + \mu_1 \\ \dot{e}_2 = e_1 e_3 + x_1 e_3 + x_3 e_1 - e_2 e_4 - x_2 e_4 - x_4 e_2 + \mu_2 \\ \dot{e}_3 = -e_1 e_2 - x_1 e_2 - x_2 e_1 - e_3 + e_4 + \mu_3 \\ \dot{e}_4 = be_1(t-\tau) + \mu_4 \end{cases} \quad (9)$$

控制器选取如下形式

$$\begin{cases} \mu_1 = -(a+k)e_1 - ae_2 + ae_1 - e_1 e_4 - x_1 e_4 - x_4 e_1 \\ \mu_2 = -e_2 - e_1 e_3 - x_1 e_3 - x_3 e_1 + e_2 e_4 + x_2 e_4 + x_4 e_2 \\ \mu_3 = -e_3 + e_1 e_2 + x_1 e_2 + x_2 e_1 + e_3 - e_4 \\ \mu_4 = -k_1 e_4 \end{cases} \quad (10)$$

选取适当的  $k > 0, k_1 > 0$ , 使矩阵  $P$  正定.

其中,

$$P = \begin{bmatrix} a+k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_1 \end{bmatrix}$$

那么,  $V$  对时间  $t$  的导数为

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 + e_4^2 + \alpha \int_{t-\tau}^t e_1^2 dt \\ &= -e_1^2 - e_2^2 - e_3^2 + be_1 e_4(t-\tau) - \\ &\quad k_1 e_4^2 + \alpha e_1^2 - \alpha e_1^2(t-\tau) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= -e^T P e + be_1 e_4(t-\tau) - \alpha e_1^2(t-\tau) \\ &\leq -e^T P e + \left(\frac{1}{2}\lambda - \alpha\right) e_1^2(t-\tau) \end{aligned}$$

显然, 存在  $\lambda, \alpha$  使  $\frac{1}{2}\lambda - \alpha < 0$ , 图 6 为超混沌地磁系统的时滞同步结果.

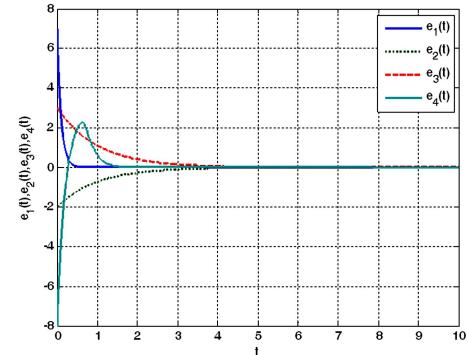


图6 时滞同步误差曲线

Fig.6 Time-delay synchronization error curve

#### 4 分数阶同步

驱动系统如下:

$$\begin{cases} D^q x_1 = a(x_2 - x_1) + x_1 x_4 \\ D^q x_2 = x_1 x_3 + x_2 x_4 \\ D^q x_3 = R - x_1 x_2 - x_3 + x_4 \\ D^q x_4 = bx_1 \end{cases} \quad (11)$$

当  $a=5, R=18, b=-3, q=0.7588$  时, 超混沌吸引子及庞加莱映射如图 7~8 所示.

受控的响应系统为

$$\begin{cases} D^q y_1 = a(y_2 - y_1) + y_1 y_4 + \mu_1 \\ D^q y_2 = y_1 y_3 + y_2 y_4 + \mu_2 \\ D^q y_3 = R - y_1 y_2 - y_3 + y_4 + \mu_3 \\ D^q y_4 = by_1 + \mu_4 \end{cases} \quad (12)$$

其中,  $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$  为要设计的控制器.

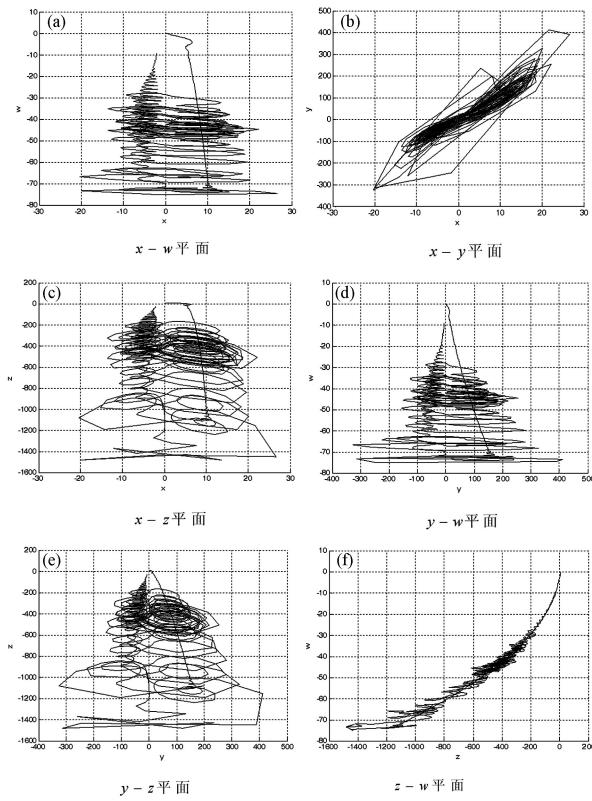
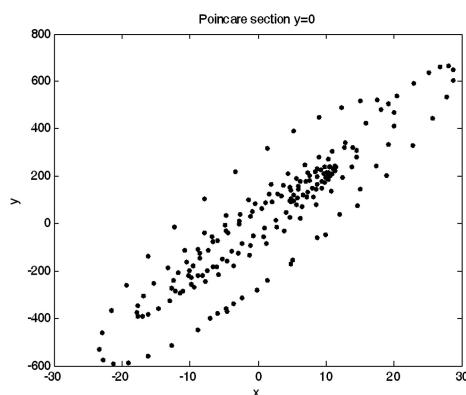
**定理 2:** 在任何初始条件下, 系统(11)和(12)是全局指数同步的, 当控制器选取如下形式,

$$\mu_3 = -ke_3, \mu_1 = \mu_2 = \mu_4 = 0 \quad (13)$$

参数的自适应律取

$$D^q k = \beta e_1^2 (\beta > 0) \quad (14)$$

**证明:** 设  $e_1 = y_1 - x_1, e_2 = y_2 - x_2, e_3 = y_3 - x_3, e_4 = y_4 - x_4$ , 则可得到如下误差动力学系统

图7 分数阶次  $q=0.7588$  的超混沌吸引子Fig.7 Hyperchaotic attractors when  $q=0.7588$ 图8 庞加莱映射( $q=0.7588$ )Fig.8 Poincare map ( $q=0.7588$ )

$$\left\{ \begin{array}{l} D^q e_1 = ae_2 - ax_2 - ae_1 - ax_1 + e_1 e_4 + x_1 e_4 + \\ x_4 e_1 + x_1 x_4 \\ D^q e_2 = x_1 x_3 + e_1 x_3 + e_3 x_1 + e_1 e_3 - x_2 x_4 - \\ e_2 x_4 - e_4 x_2 - e_2 e_4 \\ D^q e_3 = R - e_1 e_2 - x_1 e_2 - x_2 e_1 - x_1 x_2 - e_3 - x_3 + \\ e_4 + x_4 - k e_3 \\ D^q e_4 = b e_1 + b x_1 \end{array} \right. \quad (15)$$

令  $e_k = k - k_0$  (其中,  $k_0$  是  $k$  的估计), 则有  $D^q e_k = D^q k = \beta e_1^2$ , 所以

$$\begin{bmatrix} D^q e_1 \\ D^q e_2 \\ D^q e_3 \\ D^q e_4 \\ \frac{1}{\beta} D^q e_k \end{bmatrix} = \mathbf{A} [e_1 \ e_2 \ e_3 \ e_4 \ e_k]^T$$

其中,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -a+x_4 & a & 0 & y_1 & 0 \\ y_3 & -x_4 & x_1 & -y_2 & 0 \\ -x_2 & -y_1 & -1-k_0 & 1 & -e_3 \\ b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e_3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

假设  $\lambda$  为矩阵  $\mathbf{A}$  的任意特征值,  $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5)^T$  为对应的特征向量, 则有

$$\mathbf{A}\xi = \lambda\xi \quad (16)$$

则一定存在矩阵  $\mathbf{H}$ , 对(16)两侧同时共轭转置, 得到

$$\xi^H \mathbf{A}^T = \bar{\lambda} \xi^H \quad (17)$$

令等式(16)左乘  $\frac{1}{2} \xi^H$  加上等式(17)右乘  $\frac{1}{2} \xi$ ,

得出

$$\xi^H \left( \frac{1}{2} \mathbf{A} + \frac{1}{2} \mathbf{A}^T \right) \xi = \frac{1}{2} (\lambda + \bar{\lambda}) \xi^H \xi \quad (18)$$

由于混沌运动是有界的, 所以当  $t \geq 0$  时, 总是存在着正常数  $M$  且满足  $M \geq x_i(t)$  ( $i = 1, 2, 3$ ),  $\xi_i^* \xi_j + \xi_j^* \xi_i \leq 2 |\xi_i^*| |\xi_j| \leq |\xi_i^* \xi_j| + |\xi_j^* \xi_i|$ , 因此

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (\lambda + \bar{\lambda}) \xi^H \xi &= \xi^H \left( \frac{1}{2} \mathbf{A} + \frac{1}{2} \mathbf{A}^T \right) \xi \\ &= [\xi_1^*, \xi_2^*, \xi_3^*, \xi_4^*, \xi_5^*] \cdot \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} -a+x_4 & \frac{a+y_3}{2} & -\frac{x_2}{2} & \frac{b+y_1}{2} & 0 \\ \frac{a+y_3}{2} & -x_4 & \frac{x_1-y_1}{2} & \frac{-y_2}{2} & 0 \\ -\frac{x_2}{2} & \frac{x_1-y_1}{2} & -1-k_0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{b+y_1}{2} & \frac{-y_2}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \\ \xi_5 \end{bmatrix} = [\xi_1^*, \xi_2^*, \xi_3^*, \xi_4^*] \cdot$$

$$\begin{bmatrix} -a+x_4 & \frac{a+y_3}{2} & \frac{x_2}{2} & \frac{b+y_1}{2} \\ \frac{a+y_3}{2} & -x_4 & \frac{x_1-y_1}{2} & \frac{-y_2}{2} \\ \frac{x_2}{2} & \frac{x_1-y_1}{2} & -1-k_0 & \frac{1}{2} \\ \frac{b+y_1}{2} & \frac{-y_2}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \end{bmatrix}$$

$\leq [\xi_1^*, \xi_2^*, \xi_3^*, \xi_4^*] \cdot$

$$\begin{bmatrix} -a+M & \frac{a+M}{2} & \frac{M}{2} & \frac{b+M}{2} \\ \frac{a+M}{2} & -M & \frac{M}{2} & \frac{-M}{2} \\ \frac{M}{2} & \frac{M}{2} & -1-k_0 & \frac{1}{2} \\ \frac{b+M}{2} & \frac{-M}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \end{bmatrix}$$

令

$$P = \begin{bmatrix} -a+M & \frac{a+M}{2} & \frac{-M}{2} & \frac{b+M}{2} \\ \frac{a+M}{2} & -M & \frac{M}{2} & \frac{-M}{2} \\ \frac{-M}{2} & \frac{M}{2} & -1-k_0 & \frac{1}{2} \\ \frac{b+M}{2} & \frac{-M}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

则一定存在着  $k_0$  使矩阵  $P$  正定, 就有

$$\frac{1}{2}(\lambda + \bar{\lambda})\xi^H \xi$$

$$\leq [|\xi_1^*|, |\xi_2^*|, |\xi_3^*|, |\xi_4^*|] P \begin{bmatrix} |\xi_1| \\ |\xi_2| \\ |\xi_3| \\ |\xi_4| \end{bmatrix} \leq 0 \quad (19)$$

即矩阵  $A$  的任意特征值满足

$$|\arg(\lambda)| \geq \frac{\pi}{2} \geq \frac{q\pi}{2} \quad (0 < q < 1) \quad (20)$$

根据分维系统的稳定性理论, 误差系统(15)的所有平衡点是渐进稳定的, 因此,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|e(t)\| = 0 \quad (21)$$

驱动系统(10)和响应系统(11)实现了分数阶

同步, 如图9所示, 定理得证.

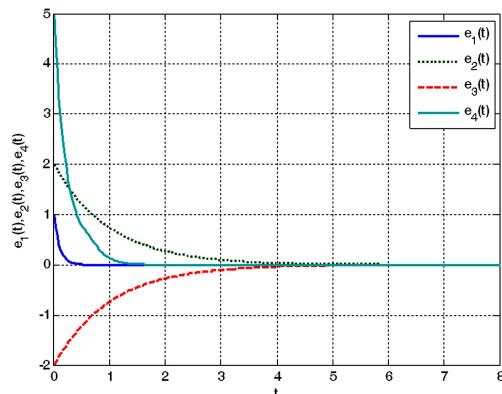


图9 分数阶次  $q=0.7588$  的误差曲线

Fig.9 Fractional-order error curve when  $q=0.7588$

## 5 结论

本文基于三维地磁系统, 构造出一个新的四维超混沌地磁系统, 得到了该系统的混沌吸引子. 基于Lyapunov稳定性理论, 设计合适的控制器, 讨论了该系统的全局指数同步以及不同情况下(如:时滞、分数阶)的同步控制问题. 通过理论证明和适当的参数以及初始条件进行数值仿真, 进一步证明了所提供方法的有效性.

## 参 考 文 献

- 刘秉正, 彭建华. 非线性动力学. 北京: 高等教育出版社, 2004 (Liu B Z, Peng J H. Nonlinear Dynamics. Beijing: Higher Education Publishing, 2004 (in Chinese))
- 陈关荣, 吕金虎. Lorenz系统族的动力学分析. 控制与同步. 北京: 科学出版社, 2003 (Chen G R, Lv J H. Dynamic Analysis of the Lorenz System Family. Control and Synchronization. Beijing: Science Press, 2003 (in Chinese))
- 廖晓昕, 徐炳吉, Yu Pei 等. Chen混沌系统全局指数吸引集和正向不变集的构造性证明及应用. 中国科学: 信息科学, 2015, 45(1): 129~144 (Liao X X, Xu B J, Yu P, et al. Constructive proof of globally exponentially attractive and positively invariant set of the chaotic Chen's system. Chinese Science: Information Science, 2015, 45(1): 129~144 (in Chinese))
- 宋运忠, 赵光宙, 齐冬莲. 混沌吕系统的约束控制. 控制理论与应用, 2007, 24(5): 795~798 (Song Y Z, Zhao G Z, Qi D L. Constraint control of the Chen-Lü system. Chinese Journal of Control Theory and Application, 2007, 24(5): 795~798 (in Chinese))

- Zhao G Z, Qi D L. Constrained control of chaotic Lv system. *Control Theory and Application*, 2007, 24(5): 795~798 (in Chinese))
- 5 武相军,王兴元. 基于非线性控制的超混沌 Chen 系统混沌同步. 物理学报, 2006, 55(12): 6261~6266 (Wu X J, Wang X Y. Chaos synchronization of the new hyperchaotic Chen system via nonlinear control. *Journal of Physics*, 2006, 55(12): 6261~6266 (in Chinese))
- 6 王华俊,宁娣. 超混沌吕系统的滞后投影同步与参数识别. 动力学与控制学报, 2011(3): 243~248 (Wang H J, Ning D. Projectively lag synchronization and unknown parameters identification of hyperchaotic Lü system. *Journal of Dynamics and Control*, 2011(3): 243~248 (in Chinese))
- 7 Sebastian Sudheer K, Sabir M. Adaptive modified function projective synchronization of multiple time-delayed chaotic Rossler system. *Physics Letters A*, 2011, 375(8): 1176~1178
- 8 王贺元,尹霞. 新超混沌系统的动力学行为及自适应控制与同步. 动力学与控制学报, 2017, 15(12): 335~341 (Wang H Y, Yin X. The dynamical behaviors of a new hyperchaotic system and its adaptive control and synchronization. *Journal of Dynamics and Control*, 2017, 15(12): 335~341 (in Chinese))
- 9 张若洵,田钢,栗莘等. 一类参数不确定混沌系统的自适应同步. 物理学报, 2008(4): 2073~2080 (Zhang R X, Tian G, Li P, et al. Adaptive Synchronization of a class of chaotic systems with uncertain parameters. *Journal of Physics*, 2008(4): 2073~2080 (in Chinese))
- 10 Wang X Y, Wang Y Q. Adaptive control for synchronization of a four-dimensional chaotic system via a single variable. *Nonlinear Dynamics*, 2011, 65(3): 311~316
- 11 彭海朋,李丽香,杨义先等. 一阶时滞混沌的参数辨识. 物理学报, 2007, 56(11): 6245~6249 (Peng H P, Li L X, Yang Y X, et al. Parameter identification of first order time-delay chaotic system. *Journal of Physics*, 2007, 56(11): 6245~6249 (in Chinese))
- 12 王明军,王兴元. 基于一阶时滞混沌系统参数辨识的保密通信方案. 物理学报, 2009, 58(3): 1467~1472 (Wang M J, Wang X Y. A secure communication scheme based on parameter identification of first order time-delay chaotic system. *Journal of Physics*, 2009, 58(3): 1467~1472 (in Chinese))
- 13 蔡娜,井元伟,张嗣瀛. 不同结构混沌系统的自适应同步和反同步. 物理学报, 2009(2): 802~813 (Cai N, Jing Y W, Zhang S Y. Adaptive synchronization and anti-synchronization of two different chaotic systems. *Journal of Physics*, 2009(2): 802~813 (in Chinese))
- 14 孟娟,王兴元. 基于非线性观测器的一类混沌系统的相同步. 物理学报, 2007, 56(9): 5142~5148 (Meng J, Wang X Y. Phase synchronization of chaotic systems based on nonlinear observers. *Journal of Physics*, 2007, 56(9): 5142~5148 (in Chinese))
- 15 马铁东,江伟波,浮洁. 基于比较系统方法的分数阶混沌系统脉冲同步控制. 物理学报, 2012(9): 39~44 (Ma T D, Jiang W B, Fu J. Impulsive synchronization of fractional order hyperchaotic systems based on comparison system. *Journal of Physics*, 2012(9): 39~44 (in Chinese))
- 16 潘光,魏静. 一种分数阶混沌系统同步的自适应滑模控制器设计. 物理学报, 2015(4): 45~51 (Pan G, Wei J. Design of an adaptive sliding mode controller for synchronization of fractional-order chaotic systems. *Journal of Physics*, 2015(4): 45~51 (in Chinese))
- 17 Chillingworth D R J, Holmes P J. Dynamical systems and models for reversals of the earth's magnetic field. *Mathematical Geology*, 1980, 12(1): 41~59
- 18 刘莹,王贺元,陈荟颖. 强迫布鲁塞尔振子动力学行为和全局指数同步的数值仿真. 动力学与控制学报, 2017, 15(5): 423~429 (Liu Y, Wang H Y, Chen H Y. Numerical simulation on dynamical behavior and global exponential synchronization of forced brusselator. *Journal of Dynamics and Control*, 2017, 15(5): 423~429 (in Chinese))
- 19 贾红艳,陈增强,薛薇. 分数阶 Lorenz 系统的分析及电路实现. 物理学报, 2013, 62(14): 14503 (Jia H Y, Chen Z Q, Xue W. Analysis and circuit implementation for the fractional-order Lorenz system. *Journal of Physics*, 2013, 62(14): 14503 (in Chinese))
- 20 朱呈祥,邹云. 分数阶控制研究综述. 控制与决策, 2009, 24(2): 161~169 (Zhu C X, Zou Y. Summary of research on fractional-order control. *Control and Decision*, 2009, 24(2): 161~169 (in Chinese))
- 21 周平,邝菲. 分数阶混沌系统与整数阶混沌系统之间的同步. 物理学报, 2010, 59(10): 6851~6858 (Zhou P, Kuang F. Synchronization between fractional-order chaotic system and chaotic system of integer orders. *Journal of Physics*, 2010, 59(10): 6851~6858 (in Chinese))

# SYNCHRONIZATION CONTROL OF HYPERCHAOTIC EARTH'S MAGNETIC FIELD SYSTEM<sup>\*</sup>

Wang Quanyu<sup>1†</sup> Wang Heyuan<sup>1,2</sup> Li Kuo<sup>1</sup>

(1. College of Sciences, Liaoning University of Technology, Jinzhou 121001, China)

(2. The College of Mathematics and Systematic Science, Shenyang Normal University, Shenyang 110034, China)

**Abstract** Based on the Lyapunov stability theory, a four-dimensional hyperchaotic earth's magnetic field system is constructed by adding state feedback controller into earth's magnetic field system. Its basic dynamical properties are studied. We discuss synchronization control of globally exponential, time-delay and fractional-order. Numerical simulations are presented to verify the effectiveness and the feasibility of the synchronization scheme.

**Key words** earth's magnetic field system, global exponential synchronization, time-delay, fractional-order, synchronization control

Received 28 March 2018, revised 19 April 2018.

\* The project supported by the National Natural Science Foundation of China(11572146,11526105).

† Corresponding author E-mail:342652382@qq.com