

# 一类分段线性神经元系统的动力学行为分析\*

商梦媛 李群宏<sup>†</sup> 徐现丽

(广西大学 数学与信息科学学院, 南宁 530004)

**摘要** 针对一类平面上三分段连续线性神经元模型,研究了边界平衡点的持续性分岔(persistence)、非光滑折分岔(non-smooth fold)的存在条件及一类跨边界周期解.最后,通过施加缓慢变化的周期外激励研究其对边界分岔和系统周期放电的影响.

**关键词** 分段线性系统, 边界平衡点分岔, 周期外激励, 周期放电

DOI: 10.6052/1672-6553-2018-062

## 引言

近年来,分段光滑线性动力学模型出现在许多领域,例如机器人控制、化学工业、神经系统<sup>[1]</sup>等.分段线性系统由于本身易于分析的特点常被用来模拟复杂的问题.目前已经有许多学者对分两段的线性系统进行研究并取得成果<sup>[2-11]</sup>.Simpson 等人<sup>[2]</sup>证明了一类平面光滑分段线性系统的类 Andronov-Hopf 分岔条件;Medrado 等人<sup>[3]</sup>基于平面上动力系统的罗尔定理的推广证明了平面分段线性系统极限环的唯一性;Biernond 等人<sup>[4]</sup>提出了找出平衡点分岔附近的所有极限集的方法.在两分段的线性系统的基础上,又有一些学者研究了三分段的线性系统的动力学特征<sup>[12-15]</sup>.戴栋等人<sup>[12]</sup>研究了一类具有两个边界的分段光滑系统中边界碰撞分岔现象及混沌;Llibre 等人<sup>[13]</sup>将证明光滑向量场的极限环存在唯一性的一些技巧推广到连续分段线性微分系统.Euzébio 等人<sup>[14]</sup>研究了退化平面分段线性微分系统的跳跃分岔;Coombes 通过分段线性平面神经元模型研究了带有缝隙连接的神经网络的稳定性等问题.

基于分段线性系统已有的方法和结论,为了提高非线性 Izhikevich 模型的计算效率,Soleimani<sup>[16,17]</sup>提出了三种分段线性逼近,并通过电路模拟实现,同时对三种分段系统进行分岔分析和时域误差评定.Ji 等人<sup>[5]</sup>针对 Soleimani 提出的两分段线性神经

元模型,探讨了周期刺激对神经元动力学行为的影响,并根据分岔分析研究簇放电动力学行为的演变.以上研究中,并没有考虑三分段的 Soleimani 模型的具体分岔条件和周期外激励对系统周期放电的影响.所以本文针对 Soleimani 提出的三分段线性神经元模型,首先对平衡点进行分析,就平衡点在两个切换面上的分岔类型进行讨论,分析边界平衡点的持续性分岔、非光滑折分岔的存在条件,并通过数值实验给出一类跨边界周期解的存在性及周期轨道半径的变化规律.最后讨论周期外激励振幅及频率对系统周期放电的周期、振幅和放电状态持续时间的影

## 1 数学模型

考虑文献[16]中提出的如下模型:

$$\begin{cases} \frac{dv}{dt} = k_1(|v+k_2| + |v-k_2|) - k_3 - u + I \\ \frac{du}{dt} = a(bv - u) \end{cases} \quad (1)$$

其中, $I$ 为外激励, $v$ 代表神经元的膜电位, $u$ 代表恢复变量,它代表钾离子电流的激活和钠离子电流的失活,对 $v$ 提供负反馈. $a$ 和 $b$ 是常数,描述神经元类型, $k_1, k_2, k_3$ 也是恒定值.由文献[4]可知, $a, b, k_1, k_2, k_3$ 均为正数.显然,向量场存在两个非光滑分界面 $\Sigma_1 = \{(v, u) | v = -k_2\}$ 和 $\Sigma_2 = \{(v, u) | v = k_2\}$ ,将相空间分为三个区域 $D_1 = \{(v, u) | v < -k_2\}$ ,

2018-03-02 收到第 1 稿,2018-04-26 收到修改稿.

\* 国家自然科学基金资助项目(11372077, 11602059, 11872154)

<sup>†</sup> 通讯作者 E-mail: liqh@gxu.edu.cn

$$D_2 = \{(v, u) \mid -k_2 < v < k_2\}, D_3 = \{(v, u) \mid v > k_2\}.$$

## 2 平衡点分析

首先,讨论各区域平衡点存在条件及分岔.

若  $I < k_3 - k_2(2k_1 + b)$ ,则在  $D_1$  内存在平衡点

$$E_1 = \left( \frac{I - k_3}{2k_1 + b}, \frac{b(I - k_3)}{2k_1 + b} \right). \text{ 根据分段光滑理论知: } E_1$$

的类型及稳定性由相应的特征方程决定,

$$\lambda^2 + (2k_1 + a)\lambda + 2k_1a + ab = 0$$

$$\text{解得 } \lambda_{1,2}^{(1)} = \frac{-(2k_1 + a) \pm \sqrt{(2k_1 + a)^2 - 4ab}}{2}, \text{ 从而当}$$

$k_1 > 0, a > 0$ ,两个特征值均有负实部,所以,  $E_1$  是渐近稳定的.

若  $k_3 - k_2(2k_1 + b) < I < k_3 - k_2(2k_1 - b)$ ,则在  $D_2$  内

$$\text{存在平衡点 } E_2 = \left( \frac{2k_1k_2 + I - k_3}{b}, 2k_1k_2 + I - k_3 \right). \text{ 此时 } E_2$$

的类型及稳定性由相应的特征方程决定,

$$\lambda^2 + a\lambda + ab = 0$$

$$\text{求解得 } \lambda_{1,2}^{(2)} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4ab}}{2}, \text{ 即当 } a > 0 \text{ 时, 两个特征}$$

值均有负实部,所以  $E_2$  是渐近稳定的.

若(1)  $2k_1 < b, I > k_3 - k_2(2k_1 - b)$ , (2)  $2k_1 > b, I < k_3 - k_2(2k_1 - b)$  其中之一成立,则在  $D_3$  内存在平衡点

$$E_3 = \left( \frac{k_3 - I}{2k_1 - b}, \frac{b(k_3 - I)}{2k_1 - b} \right).$$

若  $k_3 = I$  且  $2k_1 = b$ ,则平衡点在  $\{(v, u) \mid u = bv, v > k_2\}$  上有无穷多个,  $E_3$  的类型及稳定性由相应的特征方程决定,

$$\lambda^2 + (-2k_1 + a)\lambda - 2k_1a + ab = 0$$

$$\text{解得 } \lambda_{1,2}^{(3)} = \frac{(2k_1 - a) \pm \sqrt{(2k_1 - a)^2 - 4ab}}{2}.$$

在区域  $D_3$  内,可能发生丰富的动力学行为.当

$2k_1 = a, 2k_1 < b$  时,  $\lambda_{1,2}^{(3)} = \pm \theta i, \theta = \sqrt{a(b - 2k_1)}$ . 此时平衡点  $E_3$  可能发生 Hopf 分岔. 当  $2k_1 = b, 2k_1 > a, \lambda_1^{(3)} > 0, \lambda_2^{(3)} = 0$ , 当  $2k_1 = b, 2k_1 < a$  时  $\lambda_1^{(3)} = 0, \lambda_2^{(3)} < 0$ , 此时平衡点  $E_3$  可能发生折分岔.

由以上分析可知,由于各平衡点对应的雅克比矩阵的特征值不包含  $I$ ,所以系统平衡点的类型和稳定性不受  $I$  的影响,其变化主要依赖于参数  $a, b$  和  $k_1$ .

## 3 非光滑分岔

### 3.1 边界平衡点分岔

令  $H_1(v, u) = v + k_2, H_2(v, u) = v - k_2$ , 以  $I$  为参

数,考虑当平衡点穿越两个边界  $\Sigma_1$  和  $\Sigma_2$ , 当  $\Sigma_1 = \{(v, u) \mid H_1(v, u) = 0\}$  和  $\Sigma_2 = \{(v, u) \mid H_2(v, u) = 0\}$  时,是否会发生边界平衡点分岔并判断相应的分岔类型.

$$\text{记 } \mathbf{x} = \begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix}, \text{ 讨论 } \Sigma_1 \text{ 上的边界分岔.}$$

根据文献[18],存在光滑映射  $J_i(\mathbf{x}, I)$ , 使

$$F_{i+1}(\mathbf{x}, I) = F_i(\mathbf{x}, I) + J_i(\mathbf{x}, I)H_i(\mathbf{x}, I)$$

解得  $J_i(\mathbf{x}, I) = (2k_1, 0)^T$ .

对于  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1^* = (v_1^*, u_1^*)^T = (-k_2, -bk_2)^T, I = I_1^* = -k_2(2k_1 + b) + k_3$ , 或  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_2^* = (v_2^*, u_2^*)^T = (k_2, bk_2)^T, I = I_1^* = k_2(2k_1 + b) + k_3$  满足边界分岔条件:

$$(1) F_j(\mathbf{x}_i^*, I_i^*) = \mathbf{0};$$

$$(2) H_i(\mathbf{x}_i^*, I_i^*) = 0;$$

$$(3) F_{j,x}(\mathbf{x}_i^*, I_i^*) \text{ 可逆};$$

$$(4) H_{i,l}(\mathbf{x}_i^*, I_i^*) - H_{i,x}(\mathbf{x}_i^*, I_i^*) [F_{j,x}^{-1} F_{j,l}] (\mathbf{x}_i^*, I_i^*) \neq 0, i = 1, 2, j = i, i + 1.$$

所以,在  $\Sigma_i$  上会发生边界分岔. 定义如下符号:

$$N_1 = F_{1,x}(\mathbf{x}_1^*, I_1^*) = \begin{pmatrix} -2k_1 & -1 \\ ab & -a \end{pmatrix}$$

$$N_2 = F_{2,x}(\mathbf{x}_2^*, I_2^*) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ ab & -a \end{pmatrix}$$

$$M = F_{i,l}(\mathbf{x}_i^*, I_i^*) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$C^T = H_{i,x}(\mathbf{x}_i^*, I_i^*) = (1, 0)$$

$$D = H_{i,l}(\mathbf{x}_i^*, I_i^*) = \mathbf{0}$$

$$E = J_i = \begin{pmatrix} 2k_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

由于(1)  $\det(N_i) \neq 0$

$$(2) D - C^T N_i^{-1} M \neq 0$$

$$(3) 1 - C^T N_1^{-1} E = \frac{b}{b + 2k_1} > 0, 1 - C^T N_2^{-1} E = \frac{b - 2k_1}{b}$$

所以,根据文献[18],在  $\Sigma_1$  上发生边界平衡点的持续性分岔;当  $b - 2k_1 > 0$ ,  $\Sigma_2$  上发生边界平衡点的持续性分岔;当  $b - 2k_1 < 0$ ,  $\Sigma_2$  上发生边界平衡点的非光滑折分岔.

如图1,在其他参数确定的情况下,随着  $I$  的增大,平衡点数目将发生变化.由图可知,系统不可能同时存在三个平衡点.

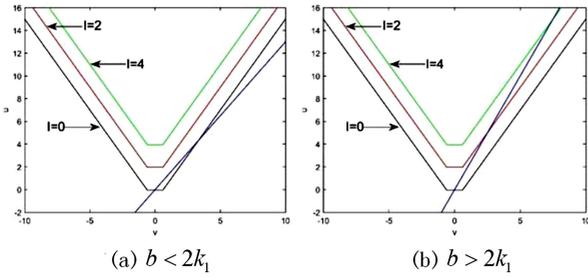


图 1 系统平衡点分布

Fig.1 Distribution of system equilibrium points

当  $b < 2k_1$  时,系统存在两个平衡点或没有平衡点,具体情况如下:(1)当  $I < k_3 - k_2(2k_1 + b)$  时,存在两个平衡点  $E_1$  和  $E_3$ ,并且  $E_1$  为渐近稳定的结点或焦点,  $E_3$  为鞍点;(2)随着  $I$  的增加,当  $k_3 - k_2(2k_1 + b) < I < k_3 - k_2(2k_1 - b)$  时,出现两个平衡点  $E_2$  和  $E_3$ ,并且  $E_2$  为渐近稳定的结点或焦点,  $E_3$  为鞍点;(3)  $I$  继续增加,当  $I > k_3 - k_2(2k_1 - b)$  时,系统没有平衡点。

当  $b > 2k_1$  时,系统有且只有一个平衡点.具体情况如下:(1)当  $I < k_3 - k_2(2k_1 + b)$  时,存在一个渐近稳定的平衡点  $E_1$ ;(2)当  $k_3 - k_2(2k_1 + b) < I < k_3 - k_2(2k_1 - b)$  时,  $E_1$  消失,出现  $E_2$ ,  $E_2$  渐近稳定;  $I$  继续增加,当  $I > k_3 - k_2(2k_1 - b)$  时,  $E_2$  消失,出现  $E_3$ 。

由上面的分析可知,  $I$  是影响系统拓扑结构的重要参数。

### 3.2 跨边界周期解的存在性

首先,取固定参数  $a = 1.25, b = 2, k_2 = 0.6, k_3 = 1$ , 取  $k_1 = 0.8$ . 对不同  $I$  进行数值仿真,围绕平衡点的周期轨道如图 2 所示。

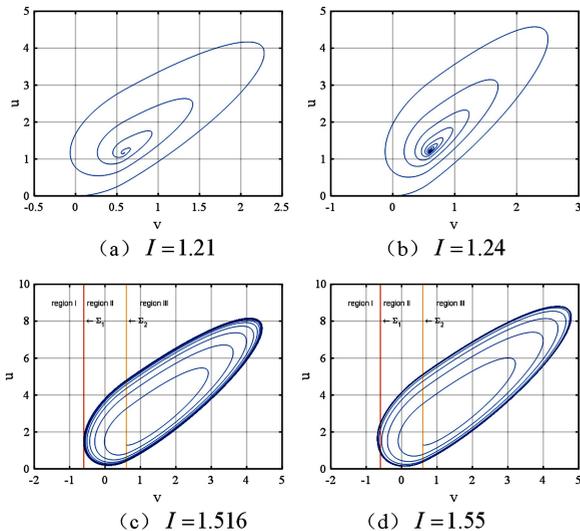


图 2 系统周期轨道

Fig.2 Phase diagrams of system periodic orbits

当  $I \leq 1.24$  时,系统没有周期轨道;当  $I > 1.24$  时,系统存在周期轨;在  $I = 1.516$  时,周期轨道与边界  $\Sigma_1$  相切,  $I$  继续增大,周期轨道穿越边界并且没有破裂.随着  $I$  的增加,周期轨道半径增加;再结合图 3 可知,在  $I \leq 1.24$  时,  $v$  的最大值与最小值重合,因此,系统的平衡状态为一个平衡点;在  $I > 1.24$  时,  $v$  的最大值与最小值不重合,因此,系统的平衡状态为周期轨道,并且轨道半径随着  $I$  的增加呈线性增长,在  $I > 1.516$  时,增长速度减慢但仍呈线性增长。

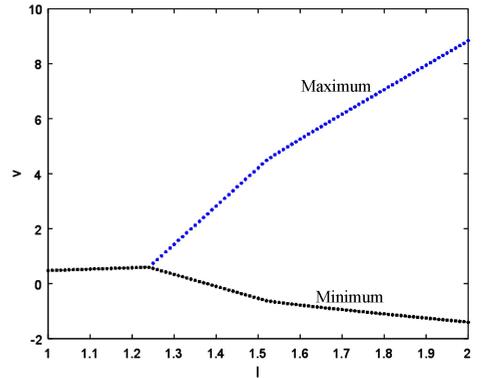


图 3 不同  $I$  值对应平衡状态下  $v$  的最大值(蓝色)和最小值(黑色)  
Fig.3 Maximum value (blue point) and minimum value (black dot) of  $v$  for different parameters  $I$  in the equilibrium state of the system

其次,取固定参数  $a = 1.25, b = 2, k_2 = 0.6, k_3 = 1$ ,  $k_1 = 0.9$ . 对不同  $I$  进行数值仿真,围绕平衡点的周期轨道如图 4 所示。

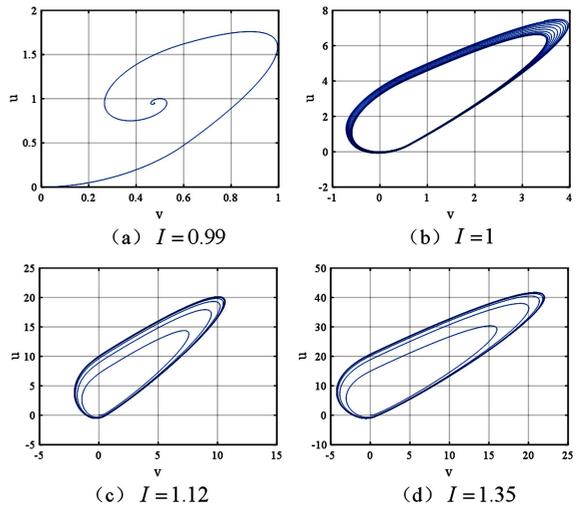


图 4 系统周期轨道

Fig.4 Phase diagrams of system periodic orbits

当  $I = 0.99$  时,系统无周期轨;当  $I = 1$  时,系统存在周期轨;当  $I = 1.12$  时,系统存在周期轨,且随

着  $I$  的增加,周期轨道半径增加;根据图 5 可知,在  $I < 1$  时,  $v$  的最大值与最小值重合,因此系统的平衡状态为一个平衡点;在  $I > 1$  时,  $v$  的最大值与最小值不重合,因此系统的平衡状态为周期轨道,轨道半径随着  $I$  的增加呈线性增长。

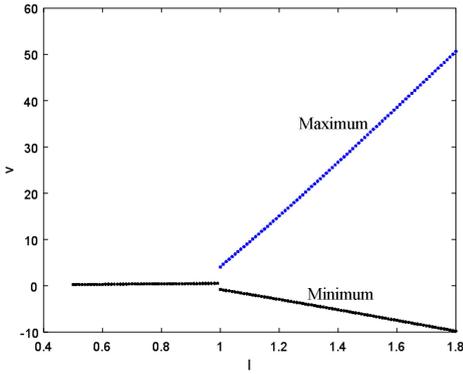


图 5 不同  $I$  值对应平衡状态下  $v$  的最大值(蓝点)和最小值(黑点)  
Fig.5 Maximum value (blue point) and minimum value (black dot) of  $v$  for different parameter values  $I$  in the equilibrium state of the system

### 4 周期外激励对系统周期放电的影响

与非周期性刺激相比,周期性刺激对大脑皮层信息处理具有较大影响.因此,令外激励  $I_0 = I \cos(\omega t)$ ,其中,  $I$  为激励振幅,  $\omega$  为激励频率,此时系统可写为

$$\begin{cases} \frac{dv}{dt} = k_1(|v+k_2| + |v-k_2|) - k_3 - u + I \cos(\omega t) \\ \frac{du}{dt} = a(bv - u) \end{cases} \quad (2)$$

当  $\omega = 0$  时,  $I = I_0$ ,系统(1)和系统(2)相同.由上述分析,取参数  $a = 1.25, b = 2, k_2 = 0.6, k_3 = 1, k_1 = 0.8, I = I_0 = 1.1, \omega = 0$  系统(1)无周期运动.此时,令  $\omega \neq 0$ ,即令外激励是周期的,得到图 6 的结果。

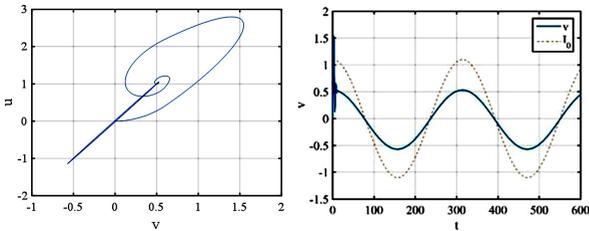


图 6  $\omega = 0.02$  时周期外激励作用于非周期运动时系统(2)相图和时间历程图  
Fig.6 Phase diagram and time series of the system (2) for periodic stimuli acting on a non-periodic motion when  $\omega = 0.02$

对系统原本的非周期运动加入周期外激励之后,系统出现简单的周期行为,且周期频率等于  $\omega$ 。

考虑周期外激励对系统周期放电的影响.仍取参数  $a = 1.25, b = 2, k_2 = 0.6, k_3 = 1, k_1 = 0.8$ .取  $\omega = 0.04$ ,得到图 7 的结果。

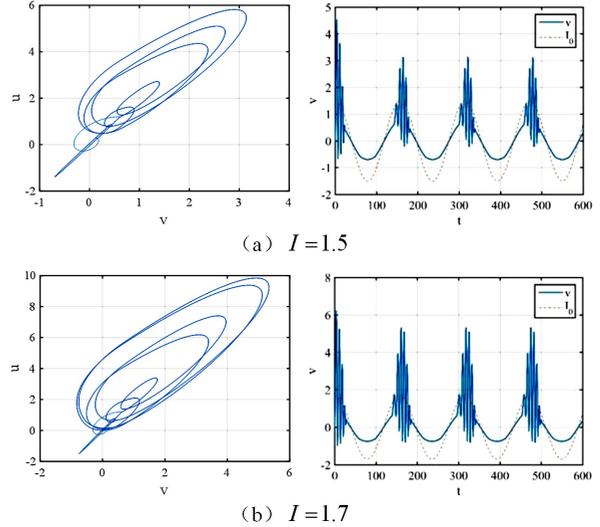


图 7 系统(2)的周期放电相图和时间历程图  
Fig.7 Periodic bursting phase diagram and time series of the system (2)

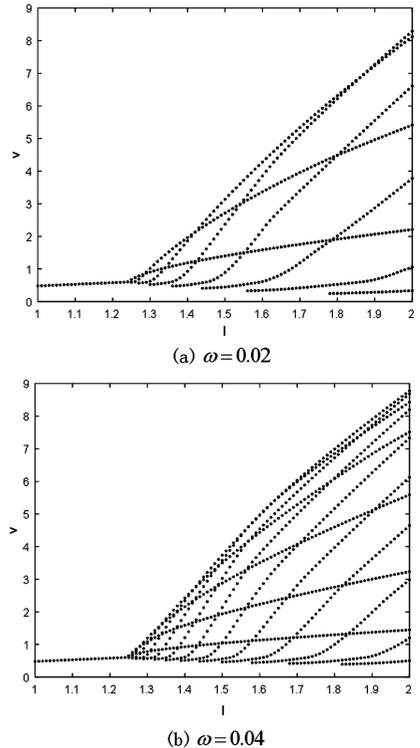


图 8 不同  $\omega$  下以  $I_0$  为参数的系统簇放电分岔图  
Fig.8 Bifurcation diagrams with  $I_0$  as a bifurcation parameter for different values  $\omega$

由图 8 可知,随着  $I$  的增加,系统保持更长时间

间的放电状态,且振幅增大,单位周期内放电次数增加.系统的放电周期与 $\omega$ 相一致.分别取 $\omega=0.02$ 和 $\omega=0.04$ ,以 $I$ 为分岔参数做出分岔图(图8).

放电行为的临界值为 $I=1.24$ ,正是 $\Sigma_2$ 附近出现周期轨道的分岔点.所以系统(2)的簇放电现象基于系统(1)的周期行为.当 $I>1.24$ 时,系统(1)产生周期轨道,在周期外激励影响下,系统发生簇放电,并且随着 $I$ 的增加一个周期内放电次数增加, $\omega$ 越小,放电次数增加越快,振幅越大.

## 5 结论

首先,研究了模拟电路实现的三分段线性神经元模型,讨论了平衡点在两个切换面上的分岔条件.其次,发现在边界 $\Sigma_2$ 上可以发生边界平衡点的持续性分岔、非光滑折分岔和一种跨边界的稳定周期解,分析了参数 $I$ 对系统周期振幅的影响,发现在周期轨道跨越边界前后,随着 $I$ 的增加,周期振幅分别呈线性增加.最后,数值仿真说明对于三分段的线性动力系统,周期外激励振幅及频率对系统周期放电的周期、振幅和放电状态持续时间具有明显影响.

## 参 考 文 献

- 贾祥宇,吴禹. 动力学与生命科学的交叉研究进展综述. 动力学与控制学报, 2017, 15(3): 279~288 (Ja X Y, Wu Y. An overview on progress of interdisciplinary studies of dynamics and life sciences. *Journal of Dynamics and Control*, 2017, 15(3): 279~288 (in Chinese))
- Simpson D J W, Meiss J D. Andronov-Hopf bifurcations in planar, piecewise-smooth, continuous flows. *Physics Letters A*, 2007, 371(3): 213~220
- Medrado J C, Torregrosa J. Uniqueness of limit cycles for sewing planar piecewise linear systems. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2015, 431(1): 529~544
- Biemond J J B, van de Wouw N, Nijmeijer H. Nonsmooth bifurcations of equilibria in planar continuous systems. *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*, 2010, 4(3): 451~474
- Ji Y, Tang W, Hua T, et al. Dynamics Analysis of Neuron Bursting under the Modulation of Periodic Stimulation. *Mathematical Problems in Engineering*, 2016, 2016: 1965790
- Cardin P T, Torregrosa J. Limit cycles in planar piecewise linear differential systems with nonregular separation line. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 2016, 337: 67~82
- Buzzi C, Pessoa C, Torregrosa J. Piecewise linear perturbations of a linear center. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, 2013, 33(9): 3915~3936
- Tonnellier A, Gerstner W. Piecewise linear differential equations and integrate-and-fire neurons: Insights from two-dimensional membrane models. *Physical Review E*, 2003, 67(2): 021908
- Tonnellier A. The McKean's caricature of the Fitzhugh-Nagumo model I. The space-clamped system. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 2003, 63(2): 459~484
- Chen H, Li D, Xie J, et al. Limit cycles in planar continuous piecewise linear systems. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2017, 47: 438~454
- 徐斌,唐云,杨凤红等. 分段线性连续系统中的同宿分岔. 动力学与控制学报, 2013, 11(1): 31~35 (Xu B, Tang Y, Yang F H, et al. Homoclinic bifurcations in piecewise-linear systems. *Journal of Dynamics and Control*, 2013, 11(1): 31~35 (in Chinese))
- 戴栋,马西奎,李小峰. 一类具有两个边界的分段光滑系统中边界碰撞分岔现象及混沌. 物理学报, 2003, 52(11): 2729~2736 (Dai D, Ma X K, Li X F. Border collision bifurcations and chaos in a class of piecewise smooth systems with two boundaries. *Acta Physica Sinica*, 2003, 52(11): 2729~2736 (in Chinese))
- Llibre J, Ordóñez M, Ponce E. On the existence and uniqueness of limit cycles in planar continuous piecewise linear systems without symmetry. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 2013, 14(5): 2002~2012
- Euzébio R, Pazim R, Ponce E. Jump bifurcations in some degenerate planar piecewise linear differential systems with three zones. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 2016, 325: 74~85
- Coombes S. Neuronal Networks with Gap Junctions: A Study of Piecewise Linear Planar Neuron Models. *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems*, 2008, 7(3): 1101~1129
- Soleimani H, Ahmadi A, Bavandpour M. Biologically inspired spiking neurons: piecewise linear models and digital implementation. In: *IEEE Transactions on Circuits & Systems I Regular Papers*, 2012, 59(12): 2991~3004
- Soleimani H, Ahmadi A, Bavandpour M, et al. A gener-

alized analog implementation of piecewise linear neuron models using CCH building blocks. *Neural Networks*, 2014, 51(3):26~38

wise-smooth dynamical systems. London: Springer, 2008  
19 Kuznetsov Y A. Elements of applied bifurcation theory. New York: Springer, 1998

18 di Bernardo M, Budd C J, Champneys A R, et al. Piece-

## DYNAMIC BEHAVIOR ANALYSIS OF A CLASS OF PIECEWISE LINEAR NEURON SYSTEMS\*

Shang Mengyuan   Li Qunhong<sup>†</sup>   Xu Xianli

(College of Mathematics and Information Science, Guangxi University, Nanning 530004, China)

**Abstract** A three-piecewise linear continuous neuronal model is discussed in this paper. The existence conditions for persistence bifurcation and non-smooth fold bifurcation in the boundary equilibrium point are theoretically analyzed. In addition, periodic solutions across the double switching boundaries can be observed by numerical simulation. Finally, the effect of slowly varying periodic external stimulation on the boundary bifurcation and the periodic bursting of the system is explored.

**Key words** piecewise linear system, boundary equilibrium bifurcation, periodic stimulation, periodic bursting