

二维离散抛物映射的分支*

陈苏 袁少良[†] 周慧

(江西宜春学院 数学与计算机科学学院, 宜春 336000)

摘要 本文研究一个二维离散抛物映射的动力学行为.首先,引用文献[1]中关于映射不动点的存在性和稳定性的结果;映射有三个不动点,及当参数 b 变化时,每个不动点稳定性的充分条件;接着,把 b 作为分支参数,利用中心流形定理和分支理论,分别导出 Fold 分支、Flip 分支、Hopf 分支存在的充分条件;最后通过数值模拟,验证 Fold 分支、Flip 分支、Hopf 分支存在条件的理论结果,同时,也发现映射存在复杂的对称性破缺分支.

关键词 二维离散抛物映射, Fold 分支, Flip 分支, Hopf 分支, 对称性破缺分支

DOI: 10.6052/1672-6553-2018-055

引言

近几十年来,许多学者都致力于连续和离散两类动力系统的研究,针对它们的动力学行为,例如:持久性、连续性、稳定性、周期解的存在性、分支和混沌等都已经取得了很好的成果^[1-11],其中,分支问题,尤其是离散的动力系统分支问题,是动力系统理论研究的一个重要内容,不仅具有重大的科学意义,而且在物理学、化学、天体力学、非线性振动学、生物学和金融经济等许多领域都有广泛的应用.

本文主要是对二维离散抛物映射的分支现象进行研究.文献[1]表明了该映射是由两个一维离散映射做非线性耦合而成,并对它的不动点及其稳定性做了详尽的分析,同时得出该离散映射具有动力学特性调节和动态幅度调节的两个功能不同的控制参数,并对 Hopf 分支、分支模式共存、锁频和周期振荡快慢效应等非线性物理现象进行了数值仿真模拟,但是缺少了对它的分支现象的理论分析.而本文则主要是对映射的 Fold 分支、Flip 分支和 Hopf 分支进行理论分析,同时通过数值模拟验证 Fold 分支、Flip 分支和 Hopf 分支存在的理论结果,同时发现了它的对称性破缺分支现象.所以,本文的研究是有意义的.事实上,实际中许多反映物理学现象的动力映射,二维映射比一维映射具有

更加复杂的动力学现象.本文中耦合的二维映射展现出了比原有一维映射更丰富的动力学性质.

具体来说,本文研究的二维离散抛物映射如下:

$$\begin{cases} x_{n+1} = bx_n(1-y_n) \\ y_{n+1} = ax_n^2 \end{cases}$$

式中,下标 n 表示与系统离散时间相对应的迭代步骤,两个控制参数 a, b 是正实数.

本文主要由以下几部分组成.首先,对二维离散抛物映射的不动点的存在性及稳定性进行了简单的描述;然后,利用中心流形定理和分支理论,分别导出了 Fold 分支、Flip 分支和 Hopf 分支存在的充分条件;最后,通过数值模拟,验证了 Fold 分支、Flip 分支和 Hopf 分支存在条件的理论结果并且观察到了映射存在复杂的对称性破缺分支现象.

1 映射模型及不动点

1.1 数学模型

典型的 logistic 映射和平方映射均是一维离散抛物映射,由它们作耦合,可得到一个简单的二维离散抛物映射,其方程表达如下

$$\begin{cases} x_{n+1} = bx_n(1-y_n) \\ y_{n+1} = ax_n^2 \end{cases} \quad (1)$$

式中,下标 n 表示与系统离散时间相对应的迭代步

2017-04-11 收到第 1 稿,2018-05-14 收到修改稿.

* 江西省教育厅科学技术研究项目(GJJ170890),国家自然科学基金资助项目(11361067)

[†] 通讯作者 E-mail: 13640840@qq.com

骤,两个控制参数 a, b 是正实数.

1.2 不动点的存在性和稳定性

在文献[1]中,对二维离散抛物映射的不动点及其稳定性做了详尽的推理和演算,本论文归纳如下:

设映射(1)的不动点 $P=(x_0, y_0)$ 满足如下方程

$$\begin{cases} bx_0(1-y_0)-x_0=0 \\ ax_0^2-y_0=0 \end{cases} \quad (2)$$

① 当 $b=1, a \neq 0$ 时,(2)式只有零解,即映射(1)只有一个不动点 $P_1=(0,0)$;

② 当 $b \neq 1, a=0$ 时,(2)式只有零解,即映射(1)有一个不动点 $P_2=(0,0)$;

③ 当 $b \neq 1$ 且 $b \neq 0, a \neq 0$ 时,(2)式有两个解,即映射(1)有两个不动点,分别为

$$P_3 = \left(\sqrt{\frac{b-1}{ab}}, 1 - \frac{1}{b} \right) \text{ 与 } P_4 = \left(-\sqrt{\frac{b-1}{ab}}, 1 - \frac{1}{b} \right)$$

映射(1)在不动点 $P=(x_0, y_0)$ 处的 Jacobi 矩阵为

$$I_p = \begin{bmatrix} b(1-y_0) & -bx \\ 2ax_0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3)$$

其特征方程为

$$\lambda^2 - b(1-y_0) + 2abx_0^2 = 0 \quad (4)$$

对于不动点 P_1 和 P_2 ,有特征值 $\lambda_1=0$ 和 $\lambda_2=b$.

① 当 $0 < b < 1$ 时,两个特征值满足 $|\lambda_{1,2}| < 1$,这时不动点 $P_1=(0,0)$ 是稳定的;

② 当 $b > 1$ 时, $|\lambda_1| < 1$ 且 $|\lambda_2| > 1$,这时原点不动点 $P_2=(0,0)$ 是不稳定的.

对于非零不动点 P_3 和 P_4 ,其特征方程有相同的形式,(4)式可化为

$$\lambda^2 - \lambda + 2abx_0^2 = 0 \quad (5)$$

式(5)有两个特征根:

$$\lambda_1 = 0.5 + 0.5\sqrt{1-8(b-1)}$$

$$\lambda_2 = 0.5 - 0.5\sqrt{1-8(b-1)}$$

上式可分为两种情况进行分析:

① 当 $0 < b < 1.5$ 时,上式的两个特征值满足 $|\lambda_{1,2}| < 1$.这时两个非零不动点 P_3 和 P_4 是稳定的;

② 当 $b > 1.5$ 时,上式的两个特征值为一对共轭复数,且满足 $|\lambda_1| = |\lambda_2| = \sqrt{2(b-1)} > 1$,这时两个非零不动点 P_3 和 P_4 是不稳定的.

2 分支

本节以 b 为参数,分别给出 Fold 分支^[4]、Flip 分支^[4] 和 Hopf 分支^[4] 存在的充分条件,且此二维离散抛物映射存在复杂的对称性破缺分支.

映射(1)在不动点 $P(x_0, y_0)$ 处的线性化映射的特征方程为:

$$h(\lambda) = \lambda^2 - b_0(1-y_0)\lambda + 2ab_0x_0^2 = 0 \quad (6)$$

2.1 Fold 分支

如果

$$2ax_0^2 - y_0 \neq 1 \text{ 且 } b_0 = \frac{1}{1-2ax_0^2 - y_0} \quad (7)$$

那么,映射在不动点 $P(x_0, y_0)$ 处的特征值为: $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = b_0(1-y_0) - 1$.

对于 Fold 分支产生的条件,要求 $|\lambda_2| \neq 1$,从而导致 $|\lambda_2| = |b_0(1-y_0) - 1| \neq 1$,即

$$y_0 \neq \frac{b_0 - 2}{b_0} \text{ 且 } y_0 \neq 1 \quad (8)$$

设 $u = x - x_0, v = y - y_0, \bar{b} = b - b_0$.把不动点 $P(x_0, y_0)$ 平移到原点,同时把参数 \bar{b} 当作一个新的独立变量,映射(1)变为

$$\begin{pmatrix} u \\ \bar{b} \\ v \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} (b_0 - b_0 y_0)u + (x_0 - x_0 y_0)\bar{b} - b_0 x_0 v + \\ \bar{b}u(1-y_0) - x_0 \bar{b}v - b_0 uv \\ \bar{b} \\ 2ax_0 u + au^2 \end{pmatrix} \quad (9)$$

如果 $2ax_0 \neq 0$ 且 $x_0 - x_0 y_0 \neq 0$,那么可构建一个可逆矩阵

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1-2ax_0}{x_0-x_0y_0} & 0 \\ 2ax_0 & -2ax_0 & 1 \end{pmatrix}$$

其中, $2ab_0x_0^2 = b_0 - b_0y_0 - 1, b_0x_0 = 1$

且作变换

$$\begin{pmatrix} u \\ \bar{b} \\ v \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} X \\ \mu \\ Y \end{pmatrix}$$

那么映射(9)变为

$$\begin{pmatrix} X \\ \mu \\ Y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & b_0(1-y_0) - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ \mu \\ Y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F(X, \mu, Y) \\ 0 \\ G(X, \mu, Y) \end{pmatrix} \quad (10)$$

其中:

$$F(X, \mu, Y) = (1 - y_0)\bar{b}u - x_0\bar{b}v - b_0uv$$

$$G(X, \mu, Y) = a\mu^2$$

$$u = X + \frac{b_0 - b_0y_0 - 1}{2ax_0}Y$$

$$\bar{b} = \frac{1 - 2ax_0}{x_0 - x_0y_0}\mu$$

$$v = 2ax_0X - 2ax_0\mu + Y$$

接下来利用中心流形定理^[4]来确定不动点 (0, 0) 在 $\mu = 0$ 处的动力学性质.

对于充分小的 X 和 Y , (10) 存在一个中心流形:

$$W^c(0) = \{ (X, \mu, Y) \in R^3 \mid Y = h(X, \mu), \\ h(0, 0) = 0, Dh(0, 0) = 0 \}.$$

设中心流形的形式为

$$h(X, \mu) = m_1X^2 + m_2X\mu + m_3\mu^2 + o(3)$$

其中, $o(3)$ 表示所有次数高于 2 的余项和, 那么, 中心流形要满足

$$N(h(X, \mu)) = h(X + \mu + F(X, \mu, Y), \mu) - \\ [b_0(1 - y_0) - 1]Y - G(X, \mu, Y) = 0$$

从而严格限制在中心流形的映射为

$$F^*: X \rightarrow X + \mu - 2aX^2 + \frac{4a^2x_0^3 - 2ax_0^2 - y_0 + 1}{x_0 - x_0y_0}X\mu + \\ \frac{(1 - 2ax_0)2ax_0}{1 - y_0}\mu^2 + o((|X| + |\mu|)^3)$$

由于:

$$F^*(0, 0) = 0$$

$$\frac{\partial F^*}{\partial X}(0, 0) = 1 - 4aX + \frac{4a^2x_0^3 - 2ax_0^2 - y_0 + 1}{x_0 - x_0y_0}\mu = 1$$

$$\frac{\partial F^*}{\partial \mu}(0, 0) = 1 + \frac{4a^2x_0^3 - 2ax_0^2 - y_0 + 1}{x_0 - x_0y_0}X + \\ \frac{4ax_0(1 - 2ax_0)}{1 - y_0}\mu = 1$$

$$\frac{\partial^2 F^*}{\partial X^2}(0, 0) = -4a \neq 0$$

所以, 不动点 $(X, \mu) = (0, 0)$ 是映射 (10) 的 Fold 分支点.

综合以上分析, 可得:

结论 1: 如果条件 $2ax_0^2 - y_0 \neq 1, a \neq 0$, (7) 和 (8) 都满足, 那么, 映射 (1) 在不动点 $P(x(b_0), y(b_0))$ 处产生 Fold 分支. 当 $b > b_0 (b < b_0)$ 两个新的

不动点产生; 当 $b = b_0$, 在 $P(x(b_0), y(b_0))$ 重合.

2.2 Flip 分支

如果

$$2ax_0^2 - y_0 \neq 1 \text{ 且 } b_0 = \frac{1}{y_0 - 2ax_0^2 - 1} \quad (11)$$

那么, 映射在不动点 $P(x_0, y_0)$ 处的特征值为 $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = b_0(1 - y_0) + 1$.

对于 Flip 分支产生的条件, 要求 $|\lambda_2| \neq 1$, 从而导致 $|\lambda_2| = |b_0(1 - y_0) + 1| \neq 1$, 即

$$y_0 \neq \frac{b_0 + 2}{b_0} \text{ 且 } y_0 \neq 1 \quad (12)$$

设 $u = x - x_0, v = y - y_0, \bar{b} = b - b_0$, 把不动点 $P(x_0, y_0)$ 平移到原点, 同时把参数 \bar{b} 当作一个新的独立变量, 映射 (1) 变为

$$\begin{pmatrix} u \\ \bar{b} \\ v \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} (b_0 - b_0y_0)u + (x_0 - x_0y_0)\bar{b} - b_0x_0v + \\ \bar{b}u(1 - y_0) - x_0\bar{b}v - b_0uv \\ \bar{b} \\ 2ax_0u + a\mu^2 \end{pmatrix} \quad (13)$$

如果 $x_0 - x_0y_0 \neq 0$, 那么, 可构建一个可逆矩阵

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & b_0x_0 \\ 0 & -\frac{2b_0}{x_0} & 0 \\ -2ax_0 & 2ax_0 & -1 \end{pmatrix}$$

其中, $-2ab_0x_0^2 = b_0 - b_0y_0 + 1, b_0x_0 = 1$.

且作变换

$$\begin{pmatrix} u \\ \bar{b} \\ v \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} X \\ \mu \\ Y \end{pmatrix}$$

那么, 映射 (9) 变为

$$\begin{pmatrix} X \\ \mu \\ Y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & b_0(1 - y_0) + 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ \mu \\ Y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F(X, \mu, Y) \\ 0 \\ G(X, \mu, Y) \end{pmatrix} \quad (14)$$

其中,

$$F(X, \mu, Y) = (1 - y_0)\bar{b}u - x_0\bar{b}v - b_0uv$$

$$G(X, \mu, Y) = a\mu^2$$

$$u = X + \mu + b_0x_0Y$$

$$\bar{b} = -\frac{2b_0}{x_0}\mu$$

$$v = -2ax_0X + 2ax_0\mu - Y$$

接下来利用中心流形定理^[4]来确定不动点 $(0,0)$ 在 $\mu=0$ 处的动力学性质。

对于充分小的 X 和 Y , (10) 存在一个中心流形 $\{W^c(0) = \{(X, \mu, Y) \in R^3 \mid Y=h(X, \mu), h(0,0)=0, Dh(0,0)=0\}$ 。

设中心流形的形式为

$$\{h(X, \mu) = m_1 X^2 + m_2 X\mu + m_3 \mu^2 + o(3) \quad (15)$$

其中, $o(3)$ 表示所有次数高于 2 的余项和, 那么, 中心流形要满足

$$\begin{aligned} N(h(X, \mu)) &= h(-X+F(X, \mu, Y), \mu) - \\ &\quad [b_0(1-y_0)+1]Y-G(X, \mu, Y) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (16)$$

把(15)代入(16), 那么(16)式中相同的项的系数和为 0, 由此得到:

$$m_1 = -\frac{a}{b_0(1-y_0)}$$

$$m_2 = \frac{2a}{b_0(1-y_0)}$$

$$m_3 = -\frac{a}{b_0(1-y_0)}$$

从而严格限制在中心流形的映射为:

$$\begin{aligned} F^* : X \rightarrow & -X - \frac{a}{b_0(1-y_0)}X^2 + \frac{2a}{b_0(1-y_0)}X\mu - \\ & \frac{a}{b_0(1-y_0)}\mu^2 + I_1 X^3 + I_2 X^2\mu + I_3 X\mu^2 + \\ & I_4 \mu^3 + o((|X|+|\mu|)^4) \end{aligned} \quad (17)$$

其中,

$$I_1 = -\left[4ab_0x_0m_1 + \frac{2a^2x_0}{b_0(1-y_0)^2}\right]$$

$$I_2 = \frac{4b_0(1-y_0)m_1}{x_0} - \frac{6a^2x_0}{b_0(1-y_0)^2} +$$

$$2ab_0x_0(4m_1+m_2)$$

$$I_3 = \frac{2b_0(1-y_0)(2m_1-m_2)}{x_0} - \frac{6a^2x_0}{b_0(1-y_0)^2} -$$

$$4ab_0x_0(m_1+m_2)$$

$$I_4 = 2ab_0x_0m_2 - \frac{2b_0(1-y_0)m_2}{x_0} - \frac{2a^2x_0}{b_0(1-y_0)^2}$$

那么, 要想(16)映射产生 Flip 分支, 要求满足:

$$\beta_1 = \left(\frac{\partial F^*}{\partial \mu} \frac{\partial^2 F^*}{\partial X^2} + 2 \frac{\partial^2 F^*}{\partial X \partial \mu} \right) \Bigg|_{(0,0)} \neq 0$$

$$\beta_2 = \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 F^*}{\partial X^2} \right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{\partial^3 F^*}{\partial X^3} \right) \right) \Bigg|_{(0,0)} \neq 0$$

由于

$$\frac{\partial F^*}{\partial \mu}(0,0) = 0$$

$$\frac{\partial^2 F^*}{\partial X \partial \mu}(0,0) = \frac{2a}{b_0(1-y_0)}$$

$$\frac{\partial^2 F^*}{\partial X^2}(0,0) = -\frac{2a}{b_0(1-y_0)}$$

$$\frac{\partial^3 F^*}{\partial X^3}(0,0) = -6 \left[4ab_0x_0m_1 + \frac{2a^2x_0}{b_0(1-y_0)^2} \right]$$

显然,

$$\beta_1 = \left(\frac{\partial F^*}{\partial \mu} \frac{\partial^2 F^*}{\partial X^2} + 2 \frac{\partial^2 F^*}{\partial X \partial \mu} \right) \Bigg|_{(0,0)} = \frac{4a}{b_0(1-y_0)} \neq 0$$

$$\begin{aligned} \beta_2 &= \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 F^*}{\partial X^2} \right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{\partial^3 F^*}{\partial X^3} \right) \right) \Bigg|_{(0,0)} \\ &= \frac{1}{2} \left[-\frac{2a}{b_0(1-y_0)} \right]^2 - 2 \left[4ab_0x_0m_1 + \frac{2a^2x_0}{b_0(1-y_0)^2} \right] \\ &\neq 0 \end{aligned}$$

所以, 不动点 $(X, \mu) = (0,0)$ 是映射(14)的 Flip 分支点。

综合以上分析, 可得:

结论 2: 如果条件 $2ax_0^2 - y_0 \neq 1$, (11)(12) 都满足, 那么映射(1)在不动点 $P(x(b_0), y(b_0))$ 处产生 Flip 分支. 而且, 若 $\beta_2 > 0$ ($\beta_2 < 0$), 那么从不动点分支出来的周期-2 点是稳定的(不稳定的)。

2.3 Hopf 分支

通过 Hopf^[4] 分支定理, 导出映射(1)的 Hopf 分支的存在条件, 特征方程(4)的特征值为:

$$\lambda_{1,2} = \frac{b_0(1-y_0) \pm \sqrt{b_0^2(1-y_0)^2 - 8ab_0x_0^2}}{2} \quad (18)$$

当 $b_0^2(1-y_0)^2 < 8ab_0x_0^2$ 时, $\lambda_{1,2}$ 是一对共轭复根。

如果 $a \neq 0, x_0 \neq 0$, 设

$$b_0 = \frac{1}{2ax_0^2} \quad (19)$$

那么, 就有 $2ab_0x_0^2 = 1$ 。

作变换 $u = x - x_0, v = y - y_0$, 把不动点 $Z(x_0, y_0)$ 移到原点. 映射(1)变成

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} (b_0 - b_0y_0)u - b_0x_0v - b_0uw \\ 2ax_0u + au^2 \end{pmatrix} \quad (20)$$

当 $b = b_0$, 在不动点 $P(0,0)$ 处, 映射(20)的线性化映射的特征值的模等于 1 的一对共轭复数为:

$$\lambda, \bar{\lambda} = \frac{b_0(1-y_0)}{2} \pm \frac{i\sqrt{b_0^2(1-y_0)^2 - 8ab_0x_0^2}}{2}$$

$$= \alpha \pm i\gamma$$

在式(18)和(19)条件下,有

$$|\lambda| = \sqrt{\frac{b_0^2(1-y_0)^2}{4} + \frac{8ab_0x_0^2 - b_0^2(1-y_0)^2}{4}}$$

$$= \sqrt{2ab_0x_0^2}$$

$$k = \frac{d|\lambda(b)|}{db} \Big|_{b=b_0} = \frac{1}{2}(2ab_0x_0^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2ax_0^2$$

$$= ax_0^2 \neq 0$$

另外,如果 $-b_0(1-y_0) \neq 0, 1$,可得

$$y_0 \neq 1, y_0 \neq \frac{b_0+1}{b_0} \tag{21}$$

则有 $\lambda_n(b_0) \neq 1, n=1, 2, 3, 4$.

$$\text{设 } T = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ -\frac{\gamma^2}{b_0x_0} & \frac{\alpha\gamma}{b_0x_0} \end{pmatrix},$$

其中, $b_0 - b_0y_0 = \alpha, \alpha^2 + \gamma^2 = 1, b_0x_0 \neq 0$, 且做变换

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \text{ 则映射(20)变为}$$

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \alpha & -\gamma \\ \gamma & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F(X, Y) \\ G(X, Y) \end{pmatrix} \tag{22}$$

这里,

$$F(X, Y) = -b_0(\alpha X + \gamma Y) \left(\frac{-\gamma^2}{b_0x_0} X + \frac{\alpha\gamma}{b_0x_0} Y \right)$$

$$G(X, Y) = a(\alpha X + \gamma Y)^2$$

注意到(22)是中心流形上的表达式,则文献

[4]所定义的系数 l 可表示为

$$l = -\text{Re} \left[\frac{(1-\lambda)\bar{\lambda}^2}{1-\lambda} \xi_{11}\xi_{20} \right] - \frac{1}{2} |\xi_{11}|^2 - |\xi_{02}|^2 + \text{Re}(\bar{\lambda}\xi_{21})$$

其中,

$$\xi_{20} = \frac{1}{8} [F_{XX} - F_{YY} + 2G_{XY} + i(G_{XX} - G_{YY} - 2F_{XY})]$$

$$\xi_{11} = \frac{1}{4} [F_{XX} + F_{YY} + i(G_{XX} + G_{YY})]$$

$$\xi_{02} = \frac{1}{8} [F_{XX} - F_{YY} + 2G_{XY} + i(G_{XX} - G_{YY} - 2F_{XY})]$$

$$\xi_{21} = \frac{1}{16} [F_{XX} + F_{YY} + G_{XX} + G_{YY} + i(G_{XX} + G_{YY} - F_{XY} - F_{YY})]$$

因此,经过一些复杂的计算得到

$$l = -\frac{1}{32} [M(F_{XX}^2 - F_{YY}^2 + 2F_{XX}G_{XY} + F_{YY}G_{XY} - G_{XX}^2 + G_{YY}^2 + 2F_{XY}G_{XX} + 2F_{XY}G_{YY}) + N(F_{XX}G_{XX} - F_{YY}G_{YY} + G_{XX}G_{YY} - F_{XX}F_{YY} - F_{XY}F_{YY} + G_{XY}^2)] - \frac{1}{8} (F_{XX}^2 + 2F_{XX}F_{YY} + F_{YY}^2 + G_{XX}^2 + 2G_{XX}G_{YY} + 2G_{YY}^2) + \frac{1}{8} (F_{XX}^2 + F_{YY}^2 + 4G_{XY}^2 - 2F_{XX}F_{YY} + 4F_{XX}G_{XY} - 4F_{YY}G_{XY} + G_{XX}^2 + G_{YY}^2 + 4F_{XY}^2 - 2G_{XX}G_{YY} - 4G_{XX}F_{XY} + 4G_{YY}F_{XY}) \tag{23}$$

这里,

$$\alpha = \frac{b_0(1-y_0)}{2}$$

$$\gamma = \frac{\sqrt{b_0^2(1-y_0)^2 - 8ab_0x_0^2}}{2}$$

$$M = \frac{(1-2\alpha)(\alpha^2 - \gamma^2) - 4\alpha\gamma^2}{2}$$

$$N = \frac{\alpha\gamma^2(1-2\alpha) + (\alpha^2 - \gamma^2)\gamma^2}{1-\alpha}$$

$$l = \frac{[(1-2\alpha)(\alpha^2 - \gamma^2)\gamma - 2\alpha\gamma(1-2\alpha)(1-\alpha)] - [2(\alpha^2 - \gamma^2)(1-\alpha)\gamma - 4\alpha\gamma^3]}{2(1-\alpha)}$$

$$F_{XX} = \frac{2\alpha\gamma^2}{x_0}$$

$$F_{XY} = \frac{\alpha^2\gamma}{x_0} - \frac{\gamma^3}{x_0}$$

$$F_{YY} = -\frac{2\alpha\gamma^2}{x_0}$$

$$G_{XX} = 2a\alpha^2$$

$$G_{XY} = 2a\alpha\gamma$$

根据上面分析,可得:

结论 3: 如果 $a \neq 0, x_0 \neq 0, b_0^2(1-y_0)^2 < 8ab_0x_0^2$, 式(19)和(21)成立,且式(23)的 $l \neq 0$, 映射(1)在不动点 $P(x(b_0), y(b_0))$ 经历 Hopf 分支. 并且,若 $l < 0 (l > 0)$ 且 $k = \frac{d|\lambda(b)|}{db} \Big|_{b=b_0} = ax_0^2 > 0$, 当 $b > b_0 (b < b_0)$ 一个吸引的(排斥的)不变从不动点分支出来.

3 数值模拟

本节对二维离散抛物映射的分支进行数值模拟^[5], 考虑不动点的分支并且把参数 b 当作是分支

的参数.

图1是 $b \in (1, 1.045)$ 且 $a=1$ 分支图, 初始值为 $(x, y) = (0, 0.1)$. 当参数 $b_0 = 1$ 时, 在点 $(0, 0)$ 处产生了 Fold 分支, 并标记为“SN”. 图1验证了结论1的正确性.

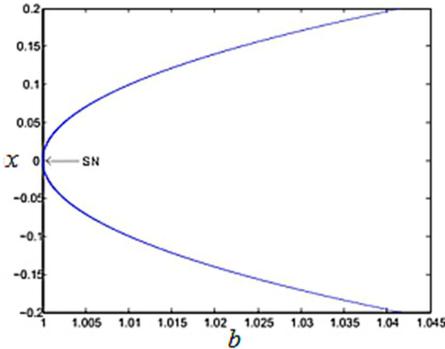


图1 $b \in (1, 1.045)$ 且 $a=1$ 的分支图

Fig.1 Bifurcation diagram when $b \in (1, 1.045)$ and $a=1$

图2是 $b \in (1.6868, 1.6878)$ 且 $a=1$ 分支图, 初始值为 $(x, y) = (0, 0.1)$. 当参数 $b_0 = 1.68725$ 时, 在点 $(0.408, 0.639)$ 产生了 Flip 分支, 并标记“DP”, 又 $\beta_1 = -3.1299$, $\beta_2 = -3.389 < 0$, 所以从不动点分支出来的周期-2点是不稳定的. 图2验证了结论2的正确性.

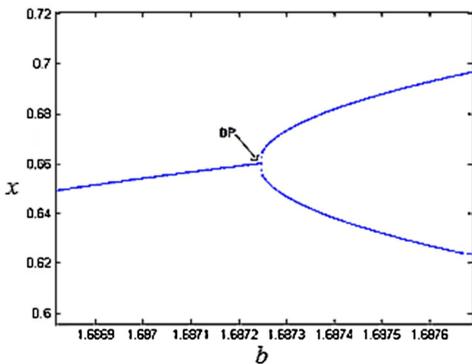


图2 $b \in (1.6868, 1.6878)$ 且 $a=1$ 的分支图

Fig.2 Bifurcation diagram when $b \in (1.6868, 1.6878)$ and $a=1$

图3是 $b \in (0.5, 2)$ 且 $a=1$ 的分支图, 初始值为 $(x, y) = (0, 0.01)$. 当参数 $b_0 = 1.51$ 时, 在点 $(0.57544, 0.33112)$ 产生了 Hopf 分支.

图4是 $b \in (0.5, 2)$ 且 $a=1$ 的分支图, 初始值为 $(x, y) = (0, -0.01)$. 当参数 $b_0 = 1.51$ 时, 在点 $(-0.57544, 0.33112)$ 处也产生了 Hopf 分支.

以上 Hopf 都一并标记“HB”. 经过计算, 有 $k=0.33112 > 0$ 和 $l=9.8584 > 0$, 则当 $b < 1.51$, 它是从

不动点处分出来的一个扩张的不变环闭曲线, 且根据对称性破缺分支条件^[11]可知, 二维离散映射在点 $(0.57544, 0.33112)$ 和点 $(-0.57544, 0.33112)$ 处发生了对称性破缺分支.

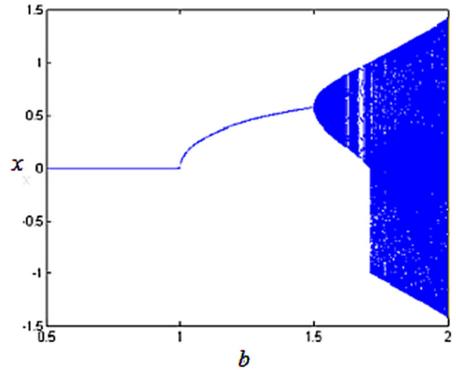


图3 初值为 $(x, y) = (0, 0.1)$ 的分支图

Fig.3 Bifurcation diagram when the initial value $(x, y) = (0, 0.01)$

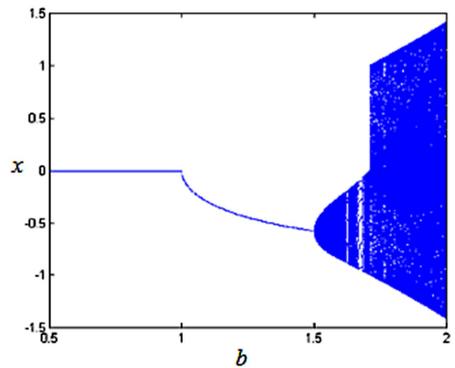


图4 初值为 $(x, y) = (0, -0.1)$ 的分支图

Fig.4 Bifurcation diagram when the initial value $(x, y) = (0, -0.01)$

4 结论

由两个一维抛物线离散映射耦合而成一个新的二维离散抛物映射, 具有十分丰富的动力学行为. 本论文主要分析的是此类二维离散抛物映射的 Fold 分支、Flip 分支和 Hopf 分支, 并得到了产生这些分支的充分条件, 且此二维离散抛物映射存在复杂的对称性破缺分支. 然而, 关于这个二维离散抛物映射还具有其它动力学性质, 例如: 倍周期分支到混沌等, 我们后续将继续深入研究.

参 考 文 献

- 孟继德, 包伯成, 徐强. 二维离散抛物映射的动力学研究. 物理学报, 2011, 60(1), 1~4 (Meng J D, Bao B C,

- Xu Q. Dynamics of two-dimensional parabolic discrete map. *Acta Physica Sinica*, 2011, 60(1): 1~4 (in Chinese))
- 2 王晶囡, 吕静, 李想. 一类金融系统的分岔分析与混沌. *动力学与控制学报*, 2016, 14(6): 508~512 (Wang J N, Lv J, Li X. Bifurcation and chaos of a financial system. *Journal of Dynamics and Control*, 2016, 14(6): 508~512 (in Chinese))
- 3 陈志强, 王进良, 李由. 二维离散 Duffing-Holmes 系统的分支与混沌研究. *动力学与控制学报*, 2017, 15(4): 324~329 (Chen Z Q, Wang J L, Li Y. Analysis on bifurcation and chaos of two-dimensional discrete duffing-holmes system. *Journal of Dynamics and Control*, 2017, 15(4): 324~329 (in Chinese))
- 4 Wiggins S. Introduction to applied nonlinear dynamical systems and chaos. Berlin: Springer-Verlag, 1990
- 5 Guckenheimer J, Holmes P. Nonlinear oscillations, dynamical systems and bifurcations of vector fields. New York: Springer-Verlag, 1983
- 6 Nusse H E, Yorke J A. Dynamics: numerical explorations. New York: Springer, 1997
- 7 Agiza H N, Elabbssy E M, EL-Metwally H, et al. Chaotic dynamics of a discrete prey-predator model with Holling type II. *Nonlinear Analysis-Real World Applications*, 2009, 10(1): 116~129
- 8 Cartwright J H E. Nonlinear stiffness, Lyapunov exponents, and attractor dimension. *Physics Letters A*, 1999, 264(4): 298~302
- 9 Yuan S L, Jing Z J. Bifurcations of periodic solutions and Chaos in Josephson system with parametric excitation. *Acta Mathematicae Applicatae Sinica (English Series)*, 2015, 31(2): 335~368
- 10 Chen X W, Yuan S L, Jing Z J. Bifurcation and chaos of a discrete-time mathematical model for tissue inflammation. *Journal of Dynamics and Differential Equations*, 2016, 28(1): 281~299
- 11 张惠, 褚衍东, 丁旺才等. 一类三次方对称离散混沌系统的分岔控制. *物理学报*, 2013, 62(4): 1~7 (Zhang H, Chu Y D, Ding W C, et al. Bifurcation control of a cubic symmetry discrete chaotic system. *Acta Physica Sinica*, 2013, 62(4): 1~7 (in Chinese))

BIFURCATION OF A 2-D DISCRETE PARABOLIC MAP^{*}

Cheng Su Yuan Shaoliang[†] Zhou Hui

(College of Mathematics and Computer Sciences, Yichun University, Yichun 336000, China)

Abstract In this paper, the dynamical behaviors of a two-dimensional discrete parabolic map are investigated in detail. Firstly, the existence and stability of fixed point of the map are cited as presented in [3] that it has three fixed points and the sufficient conditions of their stability are obtained, respectively, when the parameter b changes. Secondly, sufficient conditions are derived for the existence of Fold bifurcation, Flip bifurcation and Hopf bifurcation by using the center manifold theorem and the bifurcation theory. Finally, using numerical simulation, we verify the existence of the Fold bifurcation, the Flip bifurcation and the Hopf bifurcation of the map. Meanwhile, the complex symmetry breaking bifurcation phenomenon of the map is observed.

Key words two-dimensional parabolic map, Fold bifurcation, Flip bifurcation, Hopf bifurcation, symmetry breaking bifurcation

Received 11 April 2017, revised 14 May 2018.

^{*} The project supported by the Science and Technology Research Project of Jiangxi Provincial Education Department (GJJ170890) and the National Natural Science Foundation of China (11361067).

[†] Corresponding author E-mail: 13640840@qq.com