

不可压缩流中二元机翼运动的 Hopf 分岔*

周碧柳 徐慧东[†] 魏延 韩志军

(太原理工大学 力学学院, 太原 030024)

摘要 机翼的颤振是一种典型的自激振动,它是由气动力、弹性力和惯性力的相互作用引起的一种气动弹性现象.本文研究了具有结构非线性刚度恢复力的机翼颤振的 Hopf 分岔问题.首先,利用连续时间的 Hopf 分岔显式临界准则分析了机翼颤振 Hopf 分岔的存在性,推导了第一李雅普诺夫系数的通项公式,为判定机翼 Hopf 分岔的稳定性提供了依据.其次,分析了机翼颤振退化的余维二 Hopf 分岔的存在性条件,得到了满足条件的双参数分岔区域.然后,推导了第二李雅普诺夫系数的通项公式并结合中心流形降阶原理和同构变换进一步分析了余维二 Hopf 分岔的稳定性以及其局部开折问题.最后,通过推导第三李雅普诺夫系数分析了余维三 Hopf 分岔中心的稳定性.

关键词 退化 Hopf 分岔, Lyapunov 系数, 极限环, 机翼

DOI: 10.6052/1672-6553-2018-042

引言

机翼的颤振是由气动力、弹性力和惯性力的相互作用引起的一种自激振动现象.作为一种典型的自激系统,机翼通过从气流中吸收能量,持续发生稳定或不稳定的振动,相应的产生良性颤振或不良颤振,其中的不良颤振可能会引起灾难性的后果.因此,对机翼的气动弹性行为的分析及预判显得十分重要.当飞行速度低于音速时,大部分研究主要考虑由结构的非线性弹性力引起的机翼颤振行为.早在 19 世纪 50 年代 Woolston^[1] 和 Shen^[2] 等人就研究了这种具有结构非线性机翼的颤振行为. Lee^[3,4] 和 Liu^[5] 等人从理论和数值两方面进一步对具有结构非线性机翼的颤振行为做了深入的研究. O'Neil 等人^[6] 从实验角度调查了极限环振荡的颤振边界问题并得到了与数值模拟一致的满意结果.

随着分岔理论的不断深入,对结构非线性机翼运动的研究有了新的视角.从本质上来说,机翼颤振所产生的极限环主要来源于 Hopf 分岔.许多学者对机翼颤振的 Hopf 分岔问题做出了不少有价值的研究成果. Zhao 等人^[7,8] 建立了二元机翼颤振的

动力学方程,为进一步的分岔研究提供了良好的开端. Zhang^[9] 等人研究了机翼系统的局部分岔行为,提出了降低颤振幅值和避免不稳定极限环运动的措施. Anton 等人^[10] 建议了一种基于随机范式的新方法研究了参数不确定性对机翼系统 Hopf 分岔的影响. Wu 等人^[11] 通过数值计算方法讨论了机翼系统极限环颤振的复杂分岔行为. Wu 等人^[12] 通过 Gegenbauer 多项式逼近法研究了不可压缩流中参数不确定性对二元机翼颤振特性的影响. Price^[13] 和 Singh^[14] 采用描述函数法分别调查了系统在时域和频域上的颤振特性. Ding 等人^[15] 研究了结构系数对机翼颤振 Hopf 分岔拓扑结构的影响,他们发现在适当的参数下系统能发生亚临界的 Hopf 分岔和超临界的 Hopf 分岔. Chen 等人^[16] 通过改进等效的线性化方法研究了带有非线性阻尼机翼系统的颤振行为. Cui 等人^[17] 提出了一种基于精细积分法的数值算法研究了带有间隙机翼系统的非线性气动弹性响应问题. Yang 等人^[18] 研究了不同马赫数下带有间隙的气动弹性机翼的极限环振荡行为. 以上研究都没有涉及到二元机翼颤振的退化 Hopf 分岔问题.

本文研究了二元机翼颤振的余维一、余维二、

2017-12-15 收到第 1 稿,2018-01-11 收到修改稿.

* 国家杰出青年科学基金资助项目(11225212),国家自然科学基金资助项目(11372101)

[†] 通讯作者 E-mail: xhd0931@126.com

余维三 Hopf 分岔以及相应的局部动力学行为. 首先, 基于二元机翼颤振的动力学方程研究了系统的 Hopf 分岔的存在性, 并通过推导第一 Lyapunov 系数分析了分岔解的稳定性. 然后, 通过推导第二 Lyapunov 系数的表达式并使用中心流形-方式方法研究了二元机翼的余维二退化 Hopf 分岔. 最后, 通过推导第三 Lyapunov 系数并结合数值计算方法研究了余维三 Hopf 分岔的稳定性.

1 数学模型和动力学方程

本文考虑具有结构非线性刚度恢复力的两自由度机翼系统, 其动力学方程为^[7,19]

$$\begin{cases} \ddot{h} + 0.25\alpha + 0.5\dot{h} + 0.2h + 0.1V\alpha = 0 \\ 0.25\ddot{h} + 0.5\ddot{\alpha} + 0.1\dot{\alpha} + k_\alpha(\alpha) - 0.04V\alpha = 0 \end{cases} \quad (1)$$

其中, h 表示机翼尖端上下沉浮高度, α 表示机翼俯仰角, V 表示广义气流速度, k_α 表示扭转结构弹性力, k_α 具有如下表达式

$$k_\alpha(\alpha) = k_0 + k_1\alpha + k_2\alpha^2 + k_3\alpha^3 + k_4\alpha^4 + o(\alpha^4) \quad (2)$$

令 $\mathbf{X} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T = (h, \dot{h}, \alpha, \dot{\alpha})^T$, 可得运动方程的标准形式为

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{f}(\mathbf{X}, \zeta) = \mathbf{A}\mathbf{X} + \boldsymbol{\psi}(\mathbf{X}) \quad (3)$$

其中, ζ 代表一个或多个系统参数, 线性化矩阵 \mathbf{A} 和非线性项 $\boldsymbol{\psi}(\mathbf{X})$ 分别如下:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -0.23 & -0.57 & -0.14V + 0.58k_0 & 0.057 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0.11 & 0.27 & 0.15V - 2.3k_0 & -0.23 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{\psi}(\mathbf{X}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.57(k_1x_3^2 + k_2x_3^3 + k_3x_3^4 + k_4x_3^5) \\ 0 \\ -2.29(k_1x_3^2 + k_2x_3^3 + k_3x_3^4 + k_4x_3^5) \end{pmatrix} \quad (4)$$

2 二元机翼的 Hopf 分岔

2.1 Hopf 分岔的存在性

由于系统(3)是一个四维的系统, 相应的雅可比矩阵的特征值虽然具有解析表达式, 但形式很复杂, 若使用传统的 Hopf 分岔临界准则通过检验特征值是否满足分岔的临界条件来分析 Hopf 分岔的存在性不太方便. 这里, 采用不直接依赖于特征值计算的 Hopf 分岔的显式临界准则来分析 Hopf 分岔的存在性.

系统(3)有一个平衡点 $\mathbf{X}^* = (0, 0, 0, 0)$, 在平衡点 \mathbf{X}^* 处的线性化矩阵 \mathbf{A} 对应的特征多项式为

$$p(\lambda, \zeta) = \lambda^4 + p_1(\zeta)\lambda^3 + p_2(\zeta)\lambda^2 + p_3(\zeta)\lambda + p_4(\zeta) \quad (5)$$

其中, ζ 代表系统参数 V 和 k_0 中的任意一个. 特征多项式系数 $p_i(\zeta)$ ($i=1, \dots, 4$) 如下:

$$\begin{aligned} p_1(\zeta) &= 0.8 \\ p_2(\zeta) &= -0.15V + 2.29k_0 + 0.34 \\ p_3(\zeta) &= -0.04V + 1.14k_0 + 0.04 \\ p_4(\zeta) &= -0.02V + 0.46k_0 \end{aligned} \quad (6)$$

引理 1^[20] 系统(3)在 $\zeta = \zeta_0$ 会发生 Hopf 分岔, 当且仅当满足下列条件:

$$\begin{aligned} h_1(\zeta_0) &= 0.003V^2 - 0.115Vk_0 - 0.002V + 0.784k_0^2 + 0.010 = 0 \\ h_2(\zeta_0) &= -0.073V + 0.686k_0 + 0.229 > 0 \\ h_3(\zeta_0) &= -0.018V + 0.457k_0 > 0 \\ h_4(\zeta_0) &= -0.115V + 1.567k_0 \neq 0 \\ h_5(\zeta_0) &= 0.007V - 0.115k_0 - 0.002 \neq 0 \end{aligned} \quad (7)$$

在引理 1 中, 条件 $h_1(\zeta_0) = 0$ 保证了线性化矩阵 \mathbf{A} 恰好有一对共轭的复根位于虚轴上; 条件 $h_i(\zeta_0) > 0$ ($i=2, 3$) 保证了除这对共轭的纯虚根以外的特征值全部位于虚轴的左半平面; 条件 $h_i(\zeta_0) \neq 0$ ($i=4, 5$) 确保了这对共轭的复根随参数的变化穿越虚轴的速度不等于零. 由此可见, 引理 1 中的条件(7)保证了线性化矩阵 \mathbf{A} 具有一对纯虚根且这对纯虚根在参数扰动下穿越虚轴的速度不为零, 其它另外两个根具有负实部.

基于条件(7), 可得到如图 1 所示的 Hopf 分岔图.

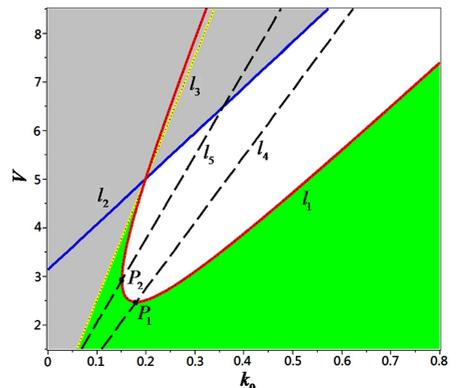


图 1 系统(3)的 Hopf 分岔图

Fig.1 Hopf bifurcation diagram of the system (3)

在图 1 中, 绿色区域代表平衡点 p_0 的稳定区

域,该区域由不等式条件 $h_i(\zeta_0) > 0 (i=2,3)$ 以及 $h_1(\zeta_0) > 0$ 得到;白色区域表示潜在的分岔参数域,该区域由不等式条件 $h_i(\zeta_0) > 0 (i=2,3)$ 以及 $h_1(\zeta_0) < 0$ 得到;而在灰色区域, $h_i(\zeta_0) (i=2,3)$ 中至少有一个不等式条件失效;红色曲线 l_1 由等式 $h_1(\zeta_0) = 0$ 得到,它表示 Hopf 分岔临界曲线;尽管灰色区域中的红色曲线能保证矩阵 A 具有一对共轭的纯虚数特征值,但不能保证其他特征值全部具有负实部;黑色虚线 l_4 和 l_5 由等式 $h_i(\zeta_0) = 0 (i=4,5)$ 得到,它表示这对复共轭特征值穿越虚轴的速度为零,即横截条件失败.因此,分岔参数的选择应该避开 l_4 与 l_1 的交点 P_1 以及 l_5 和 l_1 的交点 P_2 .

2.2 Hopf 分岔的方向和分岔极限环的稳定性

在 2.1 节中保证系统(3)能产生 Hopf 分岔的基础上,分岔后出现的分岔极限环的稳定性取决于系统(3)的非线性项.本文使用投影法^[21]通过推导第一李雅普诺夫系数来分析分岔解的稳定性.对于系统(3),通过坐标变换将分岔点 ζ_0 和平衡点 X^* 平移到零点,平移后的变量仍然使用 X ,参数变为 $\varepsilon = \zeta - \zeta_0$,于是,系统(3)变换成

$$\dot{X} = \tilde{f}(X, \varepsilon) \quad (8)$$

将变换后的系统(8)在 $X=0$ 处级数展开,有

$$\begin{aligned} \dot{X} = \tilde{f}(X, \varepsilon) = & AX + \frac{1}{2}B(X, X) + \\ & \frac{1}{6}C(X, X, X) + \frac{1}{24}D(X, X, X, X) + \\ & \frac{1}{120}E(X, X, X, X, X) + O(\|X\|^6) \end{aligned} \quad (9)$$

式(9)中 A 为系统(8)在平衡点和分岔点处的雅克比矩阵,即 $A = D_X \tilde{f}(0, 0)$, A 有一对复共轭特征值 $\lambda_{1,2}(\varepsilon)$ 满足 $\lambda_{1,2}(0) = \pm i\omega_0$ 和 $d\text{Re}(\lambda_{1,2}(\varepsilon))/d\varepsilon|_{\varepsilon=0} \neq 0$,其余特征值 $\lambda_{3,4}(\varepsilon)$ 满足 $\text{Re}(\lambda_{3,4}(0)) < 0$.

设 q 是 A 对应特征值 $\lambda_1(0) = i\omega_0$ 的复特征向量, p 是伴随矩阵 A^T 对应特征值 $\lambda_2(0) = -i\omega_0$ 的复特征向量,有下面的关系式

$$Aq = i\omega_0 q, \quad A^T p = -i\omega_0 p \quad (10)$$

其中, p 和 q 满足标准化形式 $\langle p, q \rangle = \sum_{i=1}^4 \bar{p}_i q_i = 1$.

式(9)中的高阶项具有如下的一般形式:

$$B_i(x, y) = \sum_{j,k=1}^4 \frac{\partial^2 F_i(\zeta)}{\partial \zeta_j \partial \zeta_k} \Big|_{\zeta=0} x_j y_k$$

$$\begin{aligned} C_i(x, y, z) &= \sum_{j,k,l=1}^4 \frac{\partial^3 F_i(\zeta)}{\partial \zeta_j \partial \zeta_k \partial \zeta_l} \Big|_{\zeta=0} x_j y_k z_l \\ D_i(x, y, z, u) &= \sum_{j,k,l,r=1}^4 \frac{\partial^4 F_i(\zeta)}{\partial \zeta_j \partial \zeta_k \partial \zeta_l \partial \zeta_r} \Big|_{\zeta=0} x_j y_k z_l u_r \\ E_i(x, y, z, u, v) &= \sum_{j,k,l,r,p=1}^4 \frac{\partial^5 F_i(\zeta)}{\partial \zeta_j \partial \zeta_k \partial \zeta_l \partial \zeta_r \partial \zeta_p} \Big|_{\zeta=0} x_j y_k z_l u_r v_p \end{aligned} \quad (11)$$

下面来推导第一李雅普诺夫系数,其表达式定义为^[21]

$$L_1 = \frac{1}{2} \text{Re} G_{21} \quad (12)$$

其中, $G_{21} = \langle p, H_{21} \rangle$,

$$H_{21} = C(q, q, \bar{q}) + B(\bar{q}, h_{20}) + 2B(q, h_{11}),$$

$$h_{20} = (2i\omega_0 I - A)^{-1} B(q, q),$$

$$h_{11} = -A^{-1} B(q, \bar{q}).$$

由表达式(12)可知第一李雅普诺夫系数的推导仅需要(9)式中的高阶项 $B(X, X)$ 和 $C(X, X, X)$, 后面的高阶项 $D(X, X, X, X)$ 和 $E(X, X, X, X, X)$ 在研究退化的余维二和余维三 Hopf 分岔会用到.

通过推导求得符合条件(10)的特征向量 q 和 p 的表达式如下:

$$\begin{aligned} q &= \begin{pmatrix} \frac{1}{s} & \frac{i\omega_0}{s} & \frac{0.57i\omega_0 + 0.23 - \omega_0^2}{(-0.14V + 0.58k_0 + 0.057i\omega_0)s} \\ & \frac{i\omega_0(0.57i\omega_0 + 0.23 - \omega_0^2)}{(-0.14V + 0.58k_0 + 0.057i\omega_0)s} \\ & & 1 \end{pmatrix}^T \\ p &= \begin{pmatrix} \frac{0.01i(0.1i + 11\omega_0)}{0.27i\omega_0 - 0.11} & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \frac{0.34i\omega_0 - 0.047 + 0.8\omega_0^2 - i\omega_0^3}{0.27i\omega_0 - 0.11} & & \\ & & & \frac{0.57i\omega_0 - 0.23 + \omega_0^2}{0.27i\omega_0 - 0.11} & \end{pmatrix}^T \end{aligned} \quad (13)$$

其中,

$$\omega_0 = \sqrt{0.029V + 0.066 + 0.79\sqrt{0.001V^2 + 0.011V - 0.035}}$$

$$k_0 = 0.065V + 0.007 + 0.6\sqrt{0.001V^2 + 0.011V - 0.035}$$

$$\begin{aligned} s = & [2i\omega_0^5 + 2.5\omega_0^4 - 1.8i\omega_0^3 + (0.038V - 0.16k_0 - \\ & 0.69)\omega_0^2 + (0.15i - 0.03iV + 0.13ik_0)\omega_0 - \\ & 0.00014V + 0.00058k_0 + 0.011] / [(-0.14V + \\ & 0.58k_0 + 0.057i\omega_0)(0.27i\omega_0 + 0.11)] \end{aligned}$$

由表达式(4)中的非线性项 $\psi(X)$ 和表达式(11),推导得到

$$B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1.14k_1\xi_3\eta_3 \\ 0 \\ -4.57k_1\xi_3\eta_3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 \\ 3.43k_2\xi_3\eta_3\rho_3 \\ 0 \\ -13.71k_2\xi_3\eta_3\rho_3 \end{pmatrix} \quad (14)$$

(14) 式中的 k_1 和 k_2 是参数, ξ_3, η_3 和 ρ_3 是变量.

利用表达式 (13) 和 (14), 可求得 h_{11} 和 h_{20} 如下:

$$h_{11} = \begin{pmatrix} \frac{0.2k_1s_3s_4(2.4V-k_0)}{s_6s_5s^2} \\ 0 \\ \frac{0.98k_1s_3s_4}{s_6s_5s^2} \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$h_{20} = \begin{pmatrix} \frac{0.2(22\omega_0^2-2.4V+k_0)k_1s_1}{s_2} \\ \frac{i(-8.8\omega_0^2+0.97V-0.2k_0)\omega_0k_1s_1}{s_2} \\ \frac{(4.5i\omega_0+0.98-18\omega_0^2)k_1s_1}{s_2} \\ \frac{(9.8\omega_0-1.9i+37i\omega_0^2)\omega_0k_1s_1}{s_2} \end{pmatrix} \quad (15)$$

其中,

$$s_1 = 0.053 + \omega_0^4 - 1.1i\omega_0^3 - 0.78\omega_0^2 + 0.26i\omega_0,$$

$$s_2 = 0.04s^2(-16\omega_0^4 + 6.4i\omega_0^3 - 0.6\omega_0^2V + 9.2\omega_0^2k_0 + 1.4\omega_0^2 + 0.096i\omega_0V - 2.2i\omega_0k_0 - 0.098i\omega_0 + 0.019V - 0.47k_0) (-0.7V + 2.9k_0 + 0.285i\omega_0)^2,$$

$$s_3 = 0.57i\omega_0 + 0.23 - \omega_0^2,$$

$$s_4 = \frac{-0.57i\omega_0 + 0.23 - \omega_0^2}{-0.14V + 0.58k_0 - 0.057i\omega_0},$$

$$s_5 = -0.14V + 0.58k_0 - 0.057i\omega_0,$$

$$s_6 = 0.019V - 0.47k_0$$

于是, 由 (13), (14) 和 (15), 求得:

$$H_{21} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3.4k_2s_3^2s_4}{s_5^2s^3} + \frac{1.1k_1^2s_4s_7s_1}{ss_2} + \frac{2.2k_1^2s_3^2s_4}{s_5^2s^3s_6} \\ 0 \\ \frac{14k_2s_3^2s_4}{s_5^2s^3} + \frac{4.6k_1^2s_4s_7s_1}{ss_2} + \frac{9k_1^2s_3^2s_4}{s_5^2s^3s_6} \end{pmatrix} \quad (16)$$

其中, $s_7 = 4.5i\omega_0 + 0.98 - 18\omega_0^2, s_i (i = 1 \cdots 6)$ 如上式所示.

这样, 系统 (3) Hopf 分岔后解的稳定性可以由下面的引理 2 来确定.

引理 2^[21] 系统 (3) 的雅克比矩阵 $D_x f(X^*, \zeta)$ 在分岔点 $\zeta = \zeta_0$ 处有一对纯虚根 $\lambda_{1,2}(\zeta_0) = \pm i\omega_0$, 而其它特征值的实部 $\text{Re}(\lambda_{3,4}(\zeta_0)) < 0$, 那么在 $\zeta = \zeta_0$ 处, 当 $L_1(V, k_1, k_2) < 0$ (或 $L_1(V, k_1, k_2) > 0$), 从 X^* 分岔出稳定的 (不稳定的) 极限环. 其中, 第一李雅普诺夫系数 $L_1(V, k_1, k_2)$ 具有下面的表达式:

$$L_1(V, k_1, k_2) = \frac{1}{2} \text{Re}[-s_4(4.5ik_1^2s_3^2s_2\omega_0 - 4.6k_1^2s_7s_1s_5^2s_2s_6\omega_0^2 + 0.98k_1^2s_7s_1s_5^2s_2s_6 + 7.1ik_2s_3^2s_2s_6\omega_0 - 14k_2s_3^2s_2s_6\omega_0^2 + 2.3ik_1s_7s_1s_5^2s_2s_6\omega_0 - 9k_1^2s_3^2s_2\omega_0^2 + 2.8k_2s_3^2s_2s_6 + 1.9k_1^2s_3^2s_2) / (s_5^2s_3^2s_2s_6(0.27i\omega_0 + 0.11))] \quad (17)$$

使用表达式 (17) 可以得到一个三维曲面的第一李雅普诺夫系数图, 如图 2 所示.

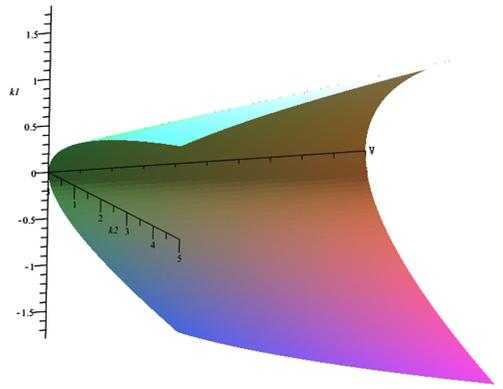


图 2 系统 (3) 的第一李雅普诺夫系数图

Fig.2 The first Lyapunov coefficient diagram of the system (3)

从图 2 可以看出, 曲面的内侧对应于 $L_1 < 0$, 曲面外侧对应于 $L_1 > 0$. 若选择曲面内侧的参数, 那么发生 Hopf 分岔后会产生一个稳定的极限环.

作为一个算例, 选取曲面内侧的一组参数 $V = 4, k_1 = 0.1, k_2 = 0.5$, 通过选择 ζ_0 附近合适的参数 ζ , 得到系统 (3) 的一个稳定的极限环, 如图 3 所示.

3 二元机翼的退化 Hopf 分岔

第二节研究了系统 (3) 的非退化的 Hopf 分岔. 这一节将通过推导第二李雅普诺夫系数和第三李雅普诺夫系数的表达式进一步来研究高余维情况

下的退化 Hopf 分岔.

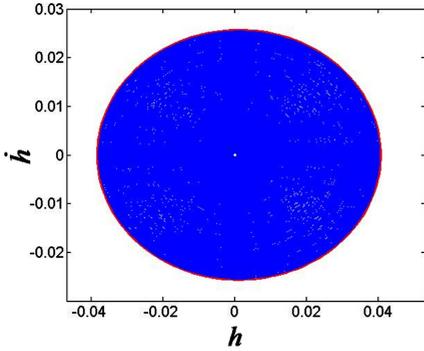


图3 在 $k_0=0.415$ 处系统(3)产生的一个稳定的极限环(外面的红色曲线)

Fig.3 A stable limit circle of system (3) at $k_0=0.415$

3.1 二元机翼的余维二 Hopf 分岔

在满足引理 1 中条件(7)的情况下,余维二 Hopf 分岔意味着第一李雅普诺夫系数表达式(17)退化为零.因此,退化的余维二 Hopf 分岔的存在性条件还要求 $L_1(V, k_1, k_2) = 0$.

在 2.2 节中,图 2 中的曲面意味着第一李雅普诺夫系数 $L_1(V, k_1, k_2)$ 等于零,将这个曲面投影到由 V 和 k_2 张成的平面,得到曲线 η (见图 4),这意味着曲线 η 上面的点满足 $L_1(V, k_2) = 0$.曲线 η 上面的点 G 是第二李雅普诺夫系数的表达式在 V 和 k_2 张成的平面上的投影与曲线 η 的交点,这样 G 点也满足第二李雅普诺夫系数等于零,这意味着点 G 是一个余维三 Hopf 分岔点.将在下一小节进一步分析退化的余维三 Hopf 分岔.

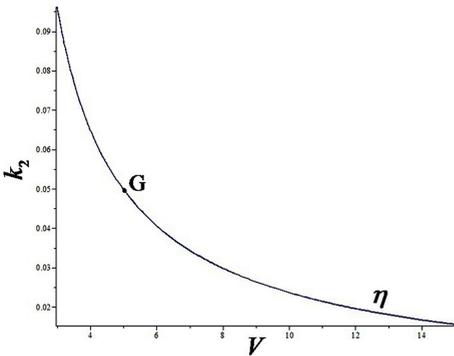


图4 系统(3)的退化 Hopf 分岔图

Fig.4 Degenerate Hopf bifurcation diagram of the system (3)

为了研究余维二 Hopf 分岔的稳定性,需要推导第二李雅普诺夫系数 L_2 的表达式,其表达式定义为^[21]

$$L_2 = \frac{1}{12} \text{Re} G_{32} \quad (18)$$

其中,

$$G_{32} = \langle p, H_{32} \rangle \quad (19)$$

$$\begin{aligned} H_{32} = & 6B(h_{11}, h_{21}) + B(\bar{h}_{20}, h_{30}) + 3B(\bar{h}_{21}, h_{20}) + \\ & 3B(q, h_{22}) + 2B(\bar{q}, h_{31}) + 6C(q, h_{11}, h_{11}) + \\ & 3C(q, \bar{h}_{20}, h_{20}) + 3C(q, q, \bar{h}_{21}) + 6C(q, \bar{q}, h_{21}) + \\ & 6C(\bar{q}, h_{20}, h_{11}) + C(\bar{q}, \bar{q}, h_{30}) + D(q, q, q, \bar{h}_{20}) + \\ & 6D(q, q, \bar{q}, h_{11}) + 3D(q, \bar{q}, \bar{q}, h_{20}) + \\ & E(q, q, q, \bar{q}, \bar{q}) \end{aligned} \quad (20)$$

其中,

$$\begin{aligned} h_{21} = & \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^4 r_{1k}(-G_{21}q_k + H_{21k}) \\ \sum_{k=1}^4 r_{2k}(-G_{21}q_k + H_{21k}) \\ \sum_{k=1}^4 r_{3k}(-G_{21}q_k + H_{21k}) \\ \sum_{k=1}^4 r_{4k}(-G_{21}q_k + H_{21k}) \end{pmatrix} \\ h_{30} = & \begin{pmatrix} u_{12}(2.7q_3 h_{20_3} + 3.4k_2 q_3^3) + u_{14}(-11q_3 h_{20_3} - 14k_2 q_3^3) \\ u_{22}(2.7q_3 h_{20_3} + 3.4k_2 q_3^3) + u_{24}(-11q_3 h_{20_3} - 14k_2 q_3^3) \\ u_{32}(2.7q_3 h_{20_3} + 3.4k_2 q_3^3) + u_{34}(-11q_3 h_{20_3} - 14k_2 q_3^3) \\ u_{42}(2.7q_3 h_{20_3} + 3.4k_2 q_3^3) + u_{44}(-11q_3 h_{20_3} - 14k_2 q_3^3) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h_{22} = & -A^{-1} [D(q, q, \bar{q}, \bar{q}) + 4C(q, \bar{q}, h_{11}) + \\ & C(\bar{q}, \bar{q}, h_{20}) + C(q, q, \bar{h}_{20}) + \\ & 2B(h_{11}, h_{11}) + 2B(q, \bar{h}_{21}) + \\ & 2B(\bar{q}, h_{21}) + B(\bar{h}_{20}, h_{20})] \\ h_{31} = & (2i\omega_0 I_4 - A)^{-1} [3B(q, h_{21}) + B(\bar{q}, h_{30}) + \\ & 3B(h_{20}, h_{11}) + 3C(q, q, h_{11}) + \\ & 3C(q, \bar{q}, h_{20}) + D(q, q, q, \bar{q}) - 3G_{21}h_{20}] \end{aligned}$$

由表达式(4)中的非线性项 $\psi(X)$ 和表达式(11),推导得到

$$D = \begin{pmatrix} 0 \\ 13.71k_3 \xi_3 \eta_3 \rho_3 \theta_3 \\ 0 \\ -54.86k_3 \xi_3 \eta_3 \rho_3 \theta_3 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 0 \\ 68.57k_4 \xi_3 \eta_3 \rho_3 \theta_3 \varepsilon_3 \\ 0 \\ -274.28k_4 \xi_3 \eta_3 \rho_3 \theta_3 \varepsilon_3 \end{pmatrix} \quad (21)$$

其中, k_3 和 k_4 是参数, $\xi_3, \eta_3, \rho_3, \theta_3$ 和 ε_3 是变量.

利用表达式(13), (16), (20)和(21),通过推

导可得

$$\mathbf{H}_{32} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5.4h_{11_3}h_{21_3} + 0.9\bar{h}_{20_3}h_{30_3} + 2.7\bar{h}_{21_3}h_{20_3} \\ + 2.7q_3h_{22_3} + 1.8\bar{q}_3h_{31_3} + 20k_2q_3h_{11_3}^2 \\ + 10k_2q_3^2\bar{h}_{21_3} + 20k_2q_3\bar{q}_3h_{21_3} \\ + 20k_2\bar{q}_3h_{20_3}h_{11_3} + 3.4k_2\bar{q}_3^2h_{30_3} \\ + 11q_3^3\bar{h}_{20_3} + 66q_3^2\bar{q}_3h_{11_3} \\ + 33q_3\bar{q}_3^2h_{20_3} + 32q_3^3\bar{q}_3^2 \\ 0 \\ -84k_2\bar{q}_3h_{20_3}h_{11_3} - 22h_{11_3}h_{21_3} - 3.6\bar{h}_{20_3}h_{30_3} \\ -11\bar{h}_{21_3}h_{20_3} - 11q_3h_{22_3} - 7.2\bar{q}_3h_{31_3} - 84k_2q_3h_{11_3}^2 \\ -42k_2q_3\bar{h}_{20_3}h_{20_3} - 42k_2q_3^2\bar{h}_{21_3} - 84k_2q_3\bar{q}_3h_{21_3} \\ -14k_2\bar{q}_3^2h_{30_3} - 43q_3^3\bar{h}_{20_3} - 260q_3^2\bar{q}_3h_{11_3} \\ -130q_3\bar{q}_3^2h_{20_3} - 130q_3^3\bar{q}_3^2 \end{pmatrix} \quad (22)$$

其中, h_{ij_k} 是 h_{ij} 第 k 个元素, q_i 是 q 第 i 个元素.

系统 (3) 退化余维二 Hopf 分岔的局部开折可由下面的引理 3 来确定.

引理 3^[22] 对于系统 (3), 在第一李雅普诺夫系数退化为零的情况下, 第二李雅普诺夫系数具有下面的表达式:

$$L_2 = \frac{1}{12} \text{Re} [(5.4h_{11_3}h_{21_3} + 0.9\bar{h}_{20_3}h_{30_3} + 2.7\bar{h}_{21_3}h_{20_3} + 2.7q_3h_{22_3} + 1.8\bar{q}_3h_{31_3} + 20k_2q_3h_{11_3}^2 + 10k_2q_3^2\bar{h}_{21_3} + 20k_2q_3\bar{q}_3h_{21_3} + 20k_2\bar{q}_3h_{20_3}h_{11_3} + 3.4k_2\bar{q}_3^2h_{30_3} + 11q_3^3\bar{h}_{20_3} + 66q_3^2\bar{q}_3h_{11_3} + 33q_3\bar{q}_3^2h_{20_3} + 32q_3^3\bar{q}_3^2) \bar{p}_2 + (-84k_2\bar{q}_3h_{20_3}h_{11_3} - 22h_{11_3}h_{21_3} - 3.6\bar{h}_{20_3}h_{30_3} - 11\bar{h}_{21_3}h_{20_3} - 11q_3h_{22_3} - 7.2\bar{q}_3h_{31_3} - 84k_2q_3h_{11_3}^2 - 42k_2q_3\bar{h}_{20_3}h_{20_3} - 42k_2q_3^2\bar{h}_{21_3} - 84k_2q_3\bar{q}_3h_{21_3} - 14k_2\bar{q}_3^2h_{30_3} - 43q_3^3\bar{h}_{20_3} - 260q_3^2\bar{q}_3h_{11_3} - 130q_3\bar{q}_3^2h_{20_3} - 130q_3^3\bar{q}_3^2) \bar{p}_4] \quad (23)$$

那么, 退化余维二 Hopf 分岔的局部开折类型可由表达式 (23) 的符号来确定.

对于图 4 上的曲线 η , 上面的 G 点将其分为上下两段, 上面一段意味着第二李雅普诺夫系数 $L_2 > 0$, 下面一段意味着第二李雅普诺夫系数 $L_2 < 0$. 不同

符号的 L_2 对应不同的局部开折.

3.2 二元机翼的余维三 Hopf 分岔

所谓余维三 Hopf 分岔点, 即第一和第二李雅普诺夫系数同时退化消失. 为了方便研究, 将第一和第二李雅普诺夫系数投影到由 k_1 和 k_2 所张成的平面 ($V=4$), 如图 5 所示.

在图 5 中, 红色曲线 r_1 表示第一李雅普诺夫系数 $L_1=0$, 蓝色曲线 r_2 表示第二李雅普诺夫系数 $L_2=0$, 曲线 r_1 和 r_2 的交点 Q 是一个余维三 Hopf 分岔点. 运用数值计算方法, 可算出点 Q 点的坐标为 $Q=(k_1^*, k_2^*)=(0.138401, 0.049878)$.

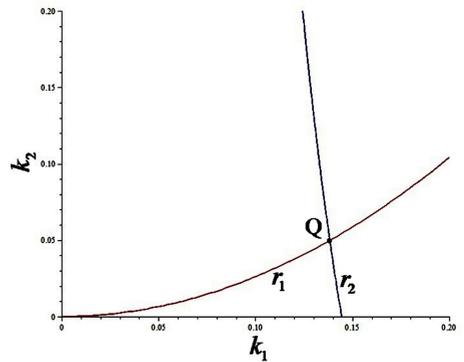


图 5 系统 (3) 的退化余维三 Hopf 分岔点

Fig.5 Degenerate co-dimension three Hopf bifurcation point of the system (3)

为研究余维三 Hopf 点的稳定性, 采取数值方法来计算第三李雅普诺夫系数. 选取参数 $k_3=0.8$, $k_4=0.5$, 数值计算 Q 点处相对应量的表达式如下:

$$p = \begin{bmatrix} 0.307692 - 0.168530i \\ 1 \\ -1.282051 - 1.123533i \\ 0.923077 - 1.966184i \end{bmatrix}$$

$$q = \begin{bmatrix} -0.013516 - 0.189887i \\ -0.138674 - 0.009871i \\ -0.201388 - 0.159164i \\ 0.116237 - 0.147073i \end{bmatrix}, \quad h_{11} = \begin{bmatrix} 0.136789 \\ 0 \\ -0.054715 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$h_{20} = \begin{bmatrix} 0.00012902 - 0.00037575i \\ 0.00054881 + 0.00018845i \\ 0.00074880 + 0.02462016i \\ -0.03596004 + 0.00109370i \end{bmatrix}$$

$$h_{21} = \begin{bmatrix} 0.00129007 - 0.00369419i \\ 0.00174689 + 0.00101583i \\ 0.00009730 - 0.00013946i \\ -0.00068796 + 0.00108440i \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{h}_{30} &= \begin{bmatrix} -0.00062685+0.00048806i \\ -0.00106928-0.00137335i \\ 0.00335551-0.00418819i \\ 0.00917586+0.00735156i \end{bmatrix} \\
 \mathbf{h}_{31} &= \begin{bmatrix} -0.00004816+0.0001608i \\ -0.00024054-0.00007229i \\ -0.0003962-0.00276200i \\ 0.00440598-0.00059007i \end{bmatrix} \\
 \mathbf{h}_{22} &= \begin{bmatrix} 0.01151990 \\ 0 \\ -0.00460796 \\ 0 \end{bmatrix} \\
 \mathbf{h}_{40} &= \begin{bmatrix} 0.00472440-0.00084592i \\ 0.00247109+0.01380086i \\ -0.02334763+0.00854067i \\ -0.02494890-0.06820279i \end{bmatrix} \\
 \mathbf{h}_{32} &= \begin{bmatrix} 0.01126534-0.03226314i \\ 0.01525660+0.00887100i \\ 0.00084974-0.00121799i \\ -0.00600786+0.00947075i \end{bmatrix} \\
 \mathbf{h}_{41} &= \begin{bmatrix} -0.00291692+0.00175628i \\ -0.00383380-0.00637172i \\ 0.01647053-0.01619820i \\ 0.03536198+0.03598379i \end{bmatrix} \\
 \mathbf{h}_{42} &= \begin{bmatrix} -0.00028251+0.00100975i \\ -0.00147484-0.00041263i \\ -0.00573693-0.06475513i \\ 0.09458093-0.00837932i \end{bmatrix} \\
 \mathbf{h}_{33} &= \begin{bmatrix} -0.33527690-0.00310429i \\ 0 \\ 0.13411076+0.00124172i \\ 0 \end{bmatrix} \\
 \mathbf{h}_{43} &= \begin{bmatrix} 0 \\ -0.02180536-0.01411150i \\ 0 \\ 0.08722145+0.05644600i \end{bmatrix} \quad (24)
 \end{aligned}$$

根据第三李雅普诺夫系数 L_3 的定义^[21],

$$L_3 = \frac{1}{144} \operatorname{Re} G_{43} = \frac{1}{12} \operatorname{Re} \langle \mathbf{p}, \mathbf{H}_{43} \rangle \quad (25)$$

由表达式(24)中的 \mathbf{p} 和 \mathbf{H}_{43} 以及表达式(25), 求得 $L_3 = -0.000363$, 由 $L_3 < 0$, 可知余维三 Hopf 是稳定的.

4 结论

本文研究了二元结构非线性机翼余维一, 余维二和余维三的 Hopf 分岔及其稳定性. 基于不直接依赖特征值特性的显式 Hopf 分岔临界准则给出了 Hopf 分岔的存在性条件. 推导获得了第一李雅普诺夫系数的表达式, 基于此表达式分析了余维一 Hopf 分岔的稳定性. 基于第一李雅普诺夫系数退化的条件, 得到了退化的余维二 Hopf 分岔的双参数分岔区域. 推导获得了第二李雅普诺夫系数的表达式, 基于此表达式并运用中心流形降阶原理和同构变换分析了余维二 Hopf 分岔的稳定性. 通过数值计算第三李雅普诺夫系数分析了余维三 Hopf 分岔及其稳定性.

参 考 文 献

- 1 Woolston D S, Runyan H L. An investigation of effects of certain types of structural nonlinearities on wing and control surface flutter. *Journal Aeronautical Sciences*, 1957, 24(1): 57~63
- 2 Shen S F. An approximate analysis of nonlinear flutter problems. *Journal Aeronautical Sciences*, 1959, 26(1): 25~32
- 3 Lee B H K, LeBlanc P. Flutter analysis of a two-dimensional airfoil with cubic nonlinear restoring force. NAE-AN-36, Canada; National Research Council, 1986
- 4 Lee B H K, Jiang L Y, Wong Y S J. Flutter of an airfoil with a cubic restoring force. *Journal of Fluids and Structures*, 1999, 13(1): 75~101
- 5 Liu L, Wong Y S, Lee B H K. Application of the centre manifold theory in nonlinear aeroelasticity. *Journal of Sound and Vibration*, 2000, 234(4): 641~659
- 6 Neil T O, Stragnac T W. Aeroelastic response of a rigid wing supported by nonlinear springs. *Journal of Aircraft*, 1998, 35: 616~622
- 7 Yang Z C, Zhao L C. Analysis of limit cycle flutter of an airfoil in incompressible flow. *Journal of Sound and Vibration*, 1988, 123(1): 1~13
- 8 Zhao L C, Yang Z C. Chaotic motions of an airfoil with nonlinear stiffness in incompressible flow. *Journal of Sound and Vibration*, 1990, 138(2): 245~254
- 9 Zhang Q C, Liu H Y, Ren A D. The study of limit cycle flutter for airfoil with nonlinearity. *Acta Aerodynamica Sinica*, 2004, 22(3): 332~336
- 10 Anton C, Deng J, Wong Y S. Hopf bifurcation analysis of an aeroelastic model using stochastic normal form. *Journal*

- of Sound and Vibration*, 2012, 331(16):3866~3886
- 11 Wu Z Q, Zhang J W. Complicated bifurcations in limit-cycle flutter of two-dimensional airfoil. *Engineering Mechanics*, 2008, 25:52~55
 - 12 Wu C, Zhang H, Fang T. Flutter analysis of an airfoil with bounded random parameters in incompressible flow via Gegenbauer polynomial approximation. *Aerospace Science and Technology*, 2007, 11(7):518~526
 - 13 Price S J, Lee B H K. An analysis of the post-instability behaviour of a two-dimensional airfoil with a structural nonlinearity. *Journal of Aircraft*, 1994, 31:1395~1401
 - 14 Singh S N, Brenner M. Limit cycle oscillation and orbital stability in aeroelastic systems with torsional nonlinearity. *Nonlinear Dynamics*, 2003, 31(4):435~450
 - 15 Ding Q, Wang D L. Study on airfoil flutter with cubic structural and aerodynamical nonlinearity. *Journal of Dynamics and Control*, 2004, 2:19~23
 - 16 Chen F X, Liu J K, Chen Y M. Flutter analysis of an airfoil with nonlinear damping using equivalent linearization. *Chinese Journal of Aeronautics*, 2014, 27(1):59~64
 - 17 Cui C C, Liu J K, Chen Y M. Simulating nonlinear aeroelastic responses of an airfoil with freeplay based on precise integration method. *Communications in Nonlinear Science & Numerical Simulation*, 2015, 22(1-3):933~942
 - 18 Yang Z, He S, Gu Y. Transonic limit cycle oscillation behavior of an aeroelastic airfoil with free-play. *Journal of Fluids & Structures*, 2016, 66:1~18
 - 19 Ko J, Strganacy T W, Kurdilaz A J. Nonlinear, adaptive control of an aeroelastic system via geometric methods. In: 39th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference and Exhibit (AIAA), Long Beach, CA, 1998
 - 20 Liu W M. Criterion of Hopf bifurcation without using eigenvalues. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 1994, 182(1):250~255
 - 21 Sotomayor J, Mello L F, Braga D D C. Hopf bifurcations in a Watt governor with a spring. *Journal of Nonlinear Mathematical Physics*, 2008, 15:288~299
 - 22 Kuznetsov Y A. Elements of applied bifurcation theory. New York: Springer-Verlag, 1998

HOPF BIFURCATIONS OF TWO-DIMENSIONAL AIRFOIL MOTION IN INCOMPRESSIBLE FLOW*

Zhou Biliu Xu Huidong[†] Wei Yan Han Zhijun

(College of Mechanics, Taiyuan University of Technology, Taiyuan 030024, China)

Abstract The flutter of an airfoil is a typical self-excited vibration phenomenon caused by the interaction of aerodynamic, structural, and inertial forces. Hopf bifurcations of a two dimensional airfoil with structural nonlinear stiffness restoring force are studied in this paper. Firstly, the existence of non-degenerate co-dimension one Hopf bifurcation in the two dimensional airfoil is studied by an explicit criterion of Hopf bifurcation of continuous-time dynamical systems. The first Lyapunov coefficient is derived to analyze the stability of the created limit circle after bifurcation. Secondly, the existence conditions of degenerate co-dimension two Hopf bifurcations are analyzed to obtain a two-parameter bifurcation region. Then, the second Lyapunov coefficient is derived to analyze the stability of co-dimension two Hopf bifurcations and local unfolding near co-dimension two bifurcation points with the centre manifold theory and automorphism transformation. Finally, the third Lyapunov coefficient is derived to analyze the stability of co-dimension three Hopf bifurcations by using numerical simulation method.

Key words degenerate Hopf bifurcations, Lyapunov coefficient, limit cycle, airfoil

Received 15 December 2017, revised 11 January 2018.

* The project supported by the National Science Fund for Distinguished Young Scholars of China(11225212) and the National Natural Science Foundation of China(11372101).

[†] Corresponding author E-mail: xhd0931@126.com