

一类时滞非线性振荡器的 Zero-Hopf 分支规范型计算*

王秘¹ 张春蕊^{1†} 王行建²

(1.东北林业大学 理学院, 哈尔滨 150040) (2.东北林业大学 信息与计算机工程学院, 哈尔滨 150040)

摘要 时滞反馈项在非线性振荡器中有着很重要的影响.为了深入研究时滞项在系统向量场中的作用,首先利用中心流形化简和规范型方法计算当系统向量场特征方程存在单零根和一对纯虚根、其他根有负实部时产生的 Zero-Hopf 分支并进行了分析研究;利用具体模型的数值模拟,阐明一类时滞非线性振荡器在时滞项变化时可以产生不同的类型的分支现象.对进一步研究不同系统模型产生何种分支现象有着重要的意义.

关键词 时滞微分方程, 规范型, Zero-Hopf 分支, 时滞杜芬振荡方程, 数值模拟

DOI: 10.6052/1672-6553-2018-038

引言

微分方程作为一种描述动力系统行为有效的数学工具,其大体上可以分为以下三类:常微分方程、偏微分方程和泛函微分方程.随着对常微分方程、偏微分方程研究的不断深入,人们发现,在现实生活中,有大量研究对象的运动规律既取决于它们当前的状态,又与历史的状态相关,所以需要引进参数或者对象来刻画过去的状态量,即时滞项,从而衍生了针对时滞微分方程的研究.

现在时滞微分方程的应用是十分广泛的,它作为数学模型在科学、工程、经济等领域都起着衔接数学理论与实际问题的重大作用,相关研究结果参见文献[1-4].时滞参数变化对系统产生怎样的分支现象的类型有着举足轻重的影响,时滞的出现结束了问题研究过程中不能充分考虑历史或者过去形态对现在状态的作用的局限性,也因为时滞微分方程的出现补充微分理论基础的空白领域,使之涉及的问题更加广阔,得到的结果更加准确.

文献[5]中张丽针对一类时滞动力系统的规范型计算进行的研究,并且结合数学软件 Maple 令规范型计算实现了程序化和自动化;文献[6]中杨纪华利用已有的具有普适参数的滞后型泛函微分方程的规范型方法对一个具有时滞反馈的 Van der pol 方程的规范型并给出了空间标准基的计算程序

等;文献[7]对一类时滞非线性振荡器的 triple-zero 规范型的实现进行了细致的阐述;文献[8]对 Van der pol 的振荡产生的 Zero-Hopf 分支性质进行了研究总结,基于研究的不断发展更新,可以看到分支规范型计算方法已经十分成熟,但是对于不同分支现象的产生条件还在不断的探索之中,所以受到文献[7,8]的启发,我们针对一类时滞非线性振荡器能否产生 Zero-Hopf 分支规范型计算进行了研究探索.

1 模型及分支理论基础

对于时滞微分方程的计算方法主要是中心流形和规范型,利用中心流形理论可以把具有时滞的微分方程在平衡点附近化为有限维不变流形上的微分方程.而规范型则是被广泛地应用于化简微分方程在其平衡点附近动力学性质的分析研究之中,即通过一系列的坐标尺度变换构造出原始微分方程的最简的拓扑同构的形式.

分支就是当参数通过分支值(临界值)时系统的拓扑类型发生变化,所以时滞项的改变通常被视为分支参数的变化,且对系统产生的分支类型起着很大的作用.对于一个二阶标量时滞微分方程形式可以有如下形式

$$\ddot{x}(t)+b\dot{x}(t)+ax(t)-(x(t)+\dot{x}(t))^2+(x(t)+\dot{x}(t))^3=\alpha x(t-\tau) \quad (1)$$

2017-12-03 收到第 1 稿,2018-02-08 收到修改稿.

* 中央高校基本科研业务费专项资金(2572017BB03)

† 通讯作者 E-mail: math@nefu.edu.cn

这里 a, b, α 都是实参数, 且 $\tau > 0$ 是时滞项, $F(0, 0) = \dot{F}(0, 0) = 0$. 在这类型的模型中已经包含了许多应用, 并且已经初见成果. 文献[7]是对此类模型的广义模型的化简计算的可实现问题的研究与讨论, 充分说明此类模型是十分值得研究的.

2 系统模型计算的实现

为了建立有效的计算和进行分支现象预测, 接下来将要针对研究的系统模型进行规范型计算.

2.1 规范型计算基础

近几年来, 利用规范型方法来处理时滞微分方程是十分常见的, 文献[9]中已经对滞后型泛函微分方程的规范型计算进行了详细的阐述并将相关定理提供证明, 基于前者的研究探索我们可以直接引用其结论来进行具体的计算.

首先, 可以将所研究的系统模型变换成一阶形式.

令 $u_1 = x, u_2 = \dot{x}$

$$\begin{aligned} \dot{u}_1(t) &= u_2(t) \\ \dot{u}_2(t) &= -au_1(t) + \alpha u_1(t - \tau) - bu_2(t) + \\ &\quad (u_1^2 + 2u_1u_2 + u_2^2 - u_1^3 - 3u_1^2u_2 - 3u_1u_2^2 - u_2^3) \end{aligned} \quad (2)$$

这里, a, b, α 都是实参数, 且 $\tau > 0$ 是时滞项, 非线性函数 F 是光滑且在原点函数值等于零的, 满足 $\dot{F}(0, 0) = 0$. 在实际应用中一般有 $a > 0$, 所以, 我们假设这个条件仍然成立.

对应(2)的特征方程为

$$\lambda^2 + b\lambda + a - \alpha e^{-\lambda\tau} = 0$$

则可知当 $\lambda = 0$, 即特征根等于 0 时, 有 $a = \alpha$; 当 $\lambda = i\omega$ 时, 则有

$$\begin{cases} -\omega^2 + a = \alpha \cos \omega\tau \\ b\omega = -\alpha \sin \omega\tau \end{cases} \quad (3)$$

则经过简单的化简得

$$\omega^2(\omega^2 - 2a + b^2) = 0 \quad (4)$$

当 $2a - b^2 > 0$ 时, $\omega_0 = \sqrt{2a - b^2}$; 再由(3)式可计算得到 $\cos \omega\tau = \frac{a - \omega^2}{a}$, 所以,

$$\tau_k = \frac{1}{\omega_0} \left\{ \arccos \frac{a - \omega_0^2}{a} + 2k\pi \right\}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

接下来验证横截条件: $\frac{d\lambda}{d\tau} \neq 0$, 得到 $ba \neq 0$ 限制

条件.

令 $t \rightarrow \frac{t}{\tau}$, 则式(2)可以变为

$$\begin{cases} \dot{u}_1 = \tau u_2 \\ \dot{u}_2 = -a\tau u_1 + \alpha\tau u_1(t-1) - b\tau u_2 + \\ \quad \tau(u_1^2 + 2u_1u_2 + u_2^2 - u_1^3 - 3u_1^2u_2 - 3u_1u_2^2 - u_2^3) \end{cases} \quad (5)$$

取 $\tau = \tau_0 + v_1, a = \alpha + v_2$, 其中, v_1, v_2 作为分支参数, 所以(5)式可以化为

$$\begin{cases} \dot{u}_1 = (\tau_0 + v_1)u_2 \\ \dot{u}_2 = -(\alpha + v_2)(\tau_0 + v_1)u_1 + \alpha(\tau_0 + v_1)u_1(t-1) - \\ \quad b(\tau_0 + v_1)u_2 + (\tau_0 + v_1)(u_1^2 + 2u_1u_2 + u_2^2 - u_1^3 - \\ \quad 3u_1^2u_2 - 3u_1u_2^2 - u_2^3) \end{cases} \quad (6)$$

则(6)式的线性部分为

$$\begin{cases} \dot{u}_1 = \tau_0 u_2 \\ \dot{u}_2 = -\alpha\tau_0 u_1 - b\tau_0 u_2 + \alpha\tau_0 u_1(t-1) \end{cases}, \quad \text{为了计算线性部分的特征向量, 令 } \boldsymbol{\eta}(\theta) = \mathbf{A}\boldsymbol{\delta}(\theta) + \mathbf{B}\boldsymbol{\delta}(\theta+1),$$

其中, $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & \tau_0 \\ -\alpha\tau_0 & -b\tau_0 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \alpha\tau_0 & 0 \end{pmatrix}$, 定义线性算子:

$$L\boldsymbol{\varphi} = \int_{-1}^0 d\boldsymbol{\eta}(\theta)\boldsymbol{\varphi}(\theta), \quad \forall \boldsymbol{\varphi} \in c = c([-1, 0], c^2)$$

令 $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$, 且 $F(\mathbf{X}_t, \mathbf{V}) = \begin{pmatrix} F^1 \\ F^2 \end{pmatrix}$, 其中, F^1, F^2 分别是(6)式展开后的非线性部分. 综上, (6)式可以化为: $\dot{\mathbf{X}}(t) = L\mathbf{X}_t + \mathbf{F}(\mathbf{X}_t, \mathbf{V})$

定义双线性型

$$\langle \boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\varphi} \rangle = \boldsymbol{\psi}(0)\boldsymbol{\varphi}(0) + \int_{-1}^0 \boldsymbol{\psi}(\xi + 1)\mathbf{B}\boldsymbol{\varphi}(\xi) d\xi$$

定义无穷小生成元

$$\mathbf{A}\boldsymbol{\varphi} = \dot{\boldsymbol{\varphi}} + \mathbf{X}_0[L\boldsymbol{\varphi} - \dot{\boldsymbol{\varphi}}(0)]$$

$$= \begin{cases} \dot{\boldsymbol{\varphi}} & -1 \leq \theta < 0 \\ \int_{-1}^0 d\boldsymbol{\eta}(t)\boldsymbol{\varphi}(t) & \theta = 0 \end{cases}$$

它的伴随是

$$\mathbf{A}^* \boldsymbol{\psi} = -\dot{\boldsymbol{\psi}} + \mathbf{X}_0[L^* \boldsymbol{\psi} - \dot{\boldsymbol{\psi}}(0)]$$

$$= \begin{cases} \dot{\boldsymbol{\psi}} & -1 \leq s < 0 \\ \int_{-1}^0 \boldsymbol{\psi}(-t) d\boldsymbol{\eta}(t) & \theta = 0 \end{cases}$$

接下来计算 \mathbf{A} 和 \mathbf{A}^* 的特征值对应的特征向量, 特征向量分别为 $i\omega, -i\omega, 0$, 首先设

$$\boldsymbol{\varphi}_1(\theta) = \begin{pmatrix} 1 \\ \rho_1 \end{pmatrix} e^{i\omega_0\tau\theta}, \quad \boldsymbol{\varphi}_2(\theta) = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{\psi}_1(s) = D_1(1, \rho_2) e^{i\omega_0\tau s}, \quad \boldsymbol{\psi}_2 = (\alpha_3, \alpha_4)$$

然后计算以下式子

$$\begin{aligned} (i\omega_0\tau_0\mathbf{I}-\mathbf{A}-\mathbf{B}e^{-i\omega_0\tau_0})\boldsymbol{\varphi}_1 &= 0 \\ (\mathbf{A}+\mathbf{B})\boldsymbol{\varphi}_2 &= 0 \\ (1,\rho_2)(-i\omega_0\tau_0\mathbf{I}-\mathbf{A}-\mathbf{B}e^{i\omega_0\tau_0}) &= 0 \\ (\alpha_3,\alpha_4)(\mathbf{A}+\mathbf{B}) &= 0 \end{aligned}$$

同时容易计算双线性型 $\langle \boldsymbol{\psi}_2, \boldsymbol{\varphi}_1 \rangle = 0, \langle \boldsymbol{\psi}_1, \boldsymbol{\varphi}_2 \rangle = 0$, 且由 $\langle \bar{\boldsymbol{\psi}}_1, \boldsymbol{\varphi}_1 \rangle = 1, \langle \boldsymbol{\psi}_2, \boldsymbol{\varphi}_2 \rangle = 1$ 可以得到 D_1, D_2 的具体值为 $D_1 = \frac{-i\omega_0 - b}{\alpha\tau_0 e^{-i\omega_0\tau_0} - b}, D_2 = \frac{1}{-\alpha\tau_0 - b}$.

引理: 存在以 $\boldsymbol{\Phi} = (\boldsymbol{\varphi}_1, \bar{\boldsymbol{\varphi}}_1, \boldsymbol{\varphi}_2)$ 和 $\boldsymbol{\Psi} = (\bar{\boldsymbol{\psi}}_1, \boldsymbol{\psi}_1, \boldsymbol{\psi}_2)$ 为基底构成中心空间 P 和他的对偶空间 P^* 分别使得 $\dot{\boldsymbol{\Phi}} = \boldsymbol{\Phi}\mathbf{J}, \dot{\boldsymbol{\Psi}} = -\mathbf{J}\boldsymbol{\Psi}$ 且 $\langle \boldsymbol{\Psi}, \boldsymbol{\Phi} \rangle = \mathbf{I}$, 其中,

$$\mathbf{J} = \text{diag}(i\omega_0\tau_0, -i\omega_0\tau_0, 0).$$

令 $U = \boldsymbol{\Phi}\mathbf{X} + \mathbf{Y}, \mathbf{X} \in C^3, \mathbf{Y} \in Q^1 = \{\varphi \in Q : \varphi = C\}$ 即:

$$\begin{aligned} u_1(\theta) &= e^{i\omega_0\tau_0\theta}x_1 + e^{-i\omega_0\tau_0\theta}x_2 + x_3 + y_1(\theta) \\ u_2(\theta) &= i\omega_0 e^{i\omega_0\tau_0\theta}x_1 - i\omega_0 e^{-i\omega_0\tau_0\theta}x_2 + y_2(\theta) \end{aligned}$$

$$\text{令 } \boldsymbol{\Psi}(0) = \begin{pmatrix} \psi_{11} & \psi_{12} \\ \psi_{21} & \psi_{22} \\ \psi_{31} & \psi_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{D}_1 & \bar{D}_1\rho_2 \\ D_1 & D_1\rho_2 \\ -D_2b & -D_2 \end{pmatrix},$$

则(6)式可以分解为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{X}} = \mathbf{J}\mathbf{X} + \boldsymbol{\Psi}(0)F(\boldsymbol{\Phi}\mathbf{X} + \mathbf{Y}, \mathbf{V}) \\ \dot{\mathbf{Y}} = A_{Q^1}\mathbf{Y} + (I - \pi)X_0F(\boldsymbol{\Phi}\mathbf{X} + \mathbf{Y}, \mathbf{V}) \end{cases} \quad (7)$$

即:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{X}} = \mathbf{J}\mathbf{X} + \frac{1}{2!}\mathbf{f}_2^1(x, y, v) + \frac{1}{3!}\mathbf{f}_3^1(x, y, v) + h.o.t. \\ \dot{\mathbf{Y}} = A_{Q^1}\mathbf{Y} + \frac{1}{2!}\mathbf{f}_2^2(x, y, v) + \frac{1}{3!}\mathbf{f}_3^2(x, y, v) + h.o.t. \end{cases}$$

这里, $\mathbf{f}_2^1 = \boldsymbol{\Psi}(0) \begin{pmatrix} F_2^1 \\ F_2^2 \end{pmatrix}, \mathbf{f}_2^2 = (I - \pi)X_0 \begin{pmatrix} F_2^1 \\ F_2^2 \end{pmatrix},$
 $\mathbf{f}_3^1 = \boldsymbol{\Psi}(0) \begin{pmatrix} F_3^1 \\ F_3^2 \end{pmatrix}, \mathbf{f}_3^2 = (I - \pi)X_0 \begin{pmatrix} F_3^1 \\ F_3^2 \end{pmatrix}$

F_2^1, F_3^1 是(6)式中第一个式子的非线性部分按关于 $u_1(t), u_2(t), u_1(t-1), u_2(t-1), v_1, v_2$ 的二次项和三次项区分开得到的. 同理, F_2^2, F_3^2 也就是(6)式中第二个式子的非线性部分按关于 $u_1(t), u_2(t), u_1(t-1), u_2(t-1), v_1, v_2$ 的二次项和三次项.

2.2 化简非线性项及规范型分析

接下来的主要是复杂的计算工作, 针对如何将非线性项映射到标准基上, 使其得到化简并可以根据拓扑等价的时滞微分方程规范型的分支性质和情况进行分析. 计算标准基和投影的方法和结论在文献[8]中的第二、三章节已经阐述详尽, 所以经

过计算我们可以得到柱坐标下的规范型

$$\begin{cases} \dot{r} = \alpha_1(v)r + \beta_{11}r\zeta + \beta_{30}r^3 + \beta_{12}r\zeta^2 \\ \dot{\zeta} = \alpha_2(v)\zeta + \gamma_{20}r^2 + \gamma_{02}\zeta^2 + \gamma_{21}r^2\zeta + \gamma_{03}\zeta^3 \\ \dot{\xi} = \eta_0 + \eta_{01}\zeta + \eta_{20}r^2 + \eta_{02}\zeta^2 \end{cases} \quad (8)$$

其中,

$$\begin{aligned} \alpha_1(v) &= \text{Re}[a_{11}]v_1, \beta_{11} = \text{Re}[a_{13}], \\ \beta_{30} &= \text{Re}[b_{11} + c_{11} + d_{11}], \beta_{12} = \text{Re}[b_{12} + c_{12} + d_{12}], \\ \alpha_2(v) &= a_{21}v_1 + a_{22}v_2, \gamma_{20} = a_{23}, \gamma_{02} = a_{24}, \\ \gamma_{21} &= b_{21} + c_{21} + d_{21}, \gamma_{03} = b_{22} + c_{22} + d_{22}. \end{aligned}$$

这里, $a_{11}, a_{13}, a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{24}, b_{11}, b_{12}, b_{21}, b_{22}, c_{11}, c_{12}, c_{21}, c_{22}, d_{11}, d_{12}, d_{21}, d_{22}$ 分别是计算:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\mathbf{g}_2^1(x, 0, v) &= \begin{pmatrix} (a_{11}v_1 + a_{12}v_2)x_1 + a_{13}x_1x_3 \\ (\bar{a}_{11}v_1 + \bar{a}_{12}v_2)x_2 + \bar{a}_{13}x_2x_3 \\ (a_{21}v_1 + a_{22}v_2)x_3 + a_{23}x_1x_2 + a_{24}x_3^2 \end{pmatrix} \\ \frac{1}{6}\mathbf{g}_3^1(x, 0, v) &= \frac{1}{6}\text{Proj}_{s_2}\mathbf{f}_3^1(x, 0, 0) + \\ &\quad \frac{1}{4}\text{Proj}_{s_2}[(D_x\mathbf{f}_2^1)(x, 0, 0)\mathbf{U}_2^1(x, 0) + \\ &\quad (D_y\mathbf{f}_2^1)(x, 0, 0)\mathbf{U}_2^2(x, 0)] + \\ &\quad O(|x||v|^2 + |x|^2|v|) \end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned} \frac{1}{6}\text{Proj}_{s_2}\mathbf{f}_3^1(x, 0, 0) &= \begin{pmatrix} b_{11}x_1^2x_2 + b_{12}x_1x_3^2 \\ \bar{b}_{11}x_1x_2^2 + \bar{b}_{12}x_2x_3^2 \\ b_{21}x_1x_2x_3 + b_{22}x_3^3 \end{pmatrix} \\ \frac{1}{4}\text{Proj}_{s_2}[(D_x\mathbf{f}_2^1)(x, 0, 0)\mathbf{U}_2^1(x, 0)] &= \begin{pmatrix} c_{11}x_1^2x_2 + c_{12}x_1x_3^2 \\ \bar{c}_{11}x_1x_2^2 + \bar{c}_{12}x_2x_3^2 \\ c_{21}x_1x_2x_3 + c_{22}x_3^3 \end{pmatrix} \\ \frac{1}{4}\text{Proj}_{s_2}[(D_y\mathbf{f}_2^1)(x, 0, 0)\mathbf{U}_2^2(x, 0)] &= \begin{pmatrix} d_{11}x_1^2x_2 + d_{12}x_1x_3^2 \\ \bar{d}_{11}x_1x_2^2 + \bar{d}_{12}x_2x_3^2 \\ d_{21}x_1x_2x_3 + d_{22}x_3^3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

在文献[10]已经对上述柱坐标下的规范型方程做了十分详细的分支分析工作, 且证明了规范型截断到二次项时, 方程只要满足 $\beta_{11}, \gamma_{20}, \gamma_{02} \neq 0$, 并且 $\gamma_{02} - \beta_{11} \neq 0$, 则系统在 $v=0$ 时在平凡平衡解处经历 Hopf-transcritical 分支现象. 经过验证发生条件满足, 所以系统方程(1)在分支参数 $v=0$ 时将会发生 Hopf-transcritical 分支.

进一步利用文献[10]中的分支分析结果, 将(8)式进行尺度变换并截断到二次项, 令 $-\sqrt{|b_1b_2|}r \rightarrow r, -b_2\zeta \rightarrow \zeta$, 则(8)式变为

$$\begin{cases} \dot{r} = \alpha_1(v)r + \varepsilon_1r\zeta \\ \dot{\zeta} = \alpha_2(v) + \varepsilon_2r^2 - \zeta^2 \end{cases} \quad (9)$$

其中, $\varepsilon_1 = -\frac{\beta_{11}}{\gamma_{02}}, \varepsilon_2 = -\frac{\gamma_{20}\gamma_{02}}{|\gamma_{20}\gamma_{02}|} = \pm 1$.

此时方程的轨道拓扑结构会出现四类情况:

Case 1 $\varepsilon_2 = 1, \varepsilon_1 > 0$; Case 2 $\varepsilon_2 = 1, \varepsilon_1 < 0$;

Case 3 $\varepsilon_2 = -1, \varepsilon_1 > 0$; Case 4 $\varepsilon_2 = -1, \varepsilon_1 < 0$.

其中三种情形 Case 1, Case 2, Case 4 分别如图 1:

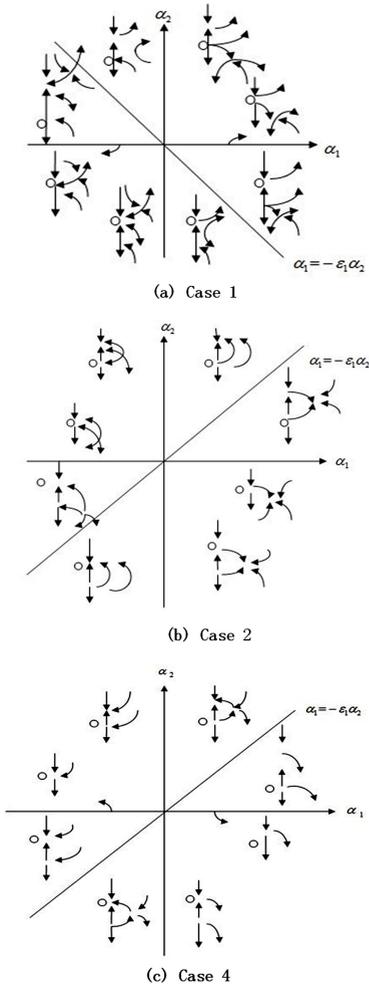


图 1

Fig. 1 Case 1, Case 2 and Case 4

由于 Case 3 分析时比较特殊,会出现两种情况,故必须对规范性截断到三次项部分再进行分析,具体过程及结果可以直接从文献[10]的叙述中得到,此处不再重复。

经过复杂繁琐的计算求证和对得出的规范型的柱坐标方程进行分支分析后,我们知道(1)式的时滞非线性振荡器方程会发生 Zero-Hopf 分支中的 Hopf-transcritical 分支。

3 时滞杜芬振荡方程

在文献[11, 12]中主要对时滞杜芬振荡方程

进行了分析与讨论,可以明显看出杜芬振荡方程 $\ddot{u}(t) + h\dot{u}(t) + \Omega^2 u(t) + ku^3(t) = qu(t - \tau)$ 是(1)式的一个具体的例子,所以利用 MATLAB 我们进行数值模拟,取 $h = 0.05, \Omega = 1, k = 1, q = 0.5$ 得到如图所示的 $u(t) - du(t)$ 所成的图像:

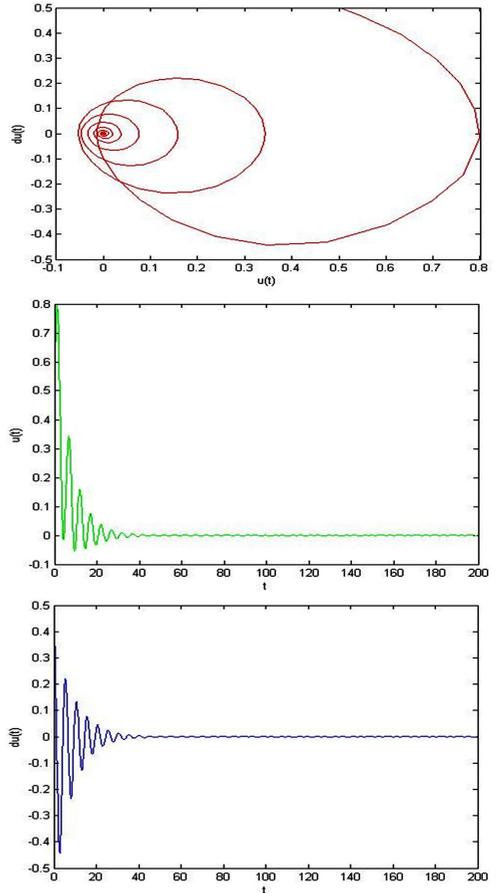


图 2 相图和周期解轨线

Fig. 2 Phase diagram and periodic solution

由上面的两个图象可明显看到随着时间 t 的变化,系统方程会由振荡逐渐趋于稳定,结合之前对(1)式的研究结论可知杜芬振荡方程会发生 Zero-Hopf 分支现象。

综上,我们可以发现在这类系统的应用中,分支参数的改变可以影响分支的性质,并且研究此类时滞微分方程是十分必要的,因为它包括了许多实际应用问题的模型,且计算出其规范型可以统一描述动力系统的分支性质,为以后的进一步研究奠定理论基础。

参 考 文 献

- 振分析. 动力学与控制学报, 2016,14(5):412~416 (Peng J, Li L X, Ma J J. Parametric resonance of piezoelectric beams with time-delayed feedback. *Journal of Dynamics and Control*, 2016,14(5):412~416 (in Chinese))
- 2 刘铭,徐晓峰,张春蕊.中立型时滞反馈扭转控制系统的稳定性分析. 动力学与控制学报, 2015,13(6):449~453 (Liu M, Xu X F, Zhang C R. Stability analysis of delayed torsional vibration system of neutral type. *Journal of Dynamics and Control*, 2015,13(6):449~453 (in Chinese))
- 3 Zhao H. Monotonicity, uniqueness, and stability of traveling waves in a nonlocal reaction-diffusion system with delay. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 2017,40(18):6702~6714
- 4 Wen G X, Chen C L P, Liu Y J, et al. Neural network-based adaptive leader-following consensus control for a class of nonlinear multiagent state-delay systems. *Ieee Transactions on Cybernetics*, 2017,47(8):2151~2160
- 5 张丽. 一类时滞动力系统的规范型计算及其应用[博士学位论文]. 南京:南京航空航天大学, 2012 (Zhang L. Normal forms for a type of delayed dynamic systems and their applications[Ph.D Thesis]. Nanjing:Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, 2012 (in Chinese))
- 6 杨纪华. 高余维时滞微分方程的规范型方法及符号计算[博士学位论文]. 哈尔滨:哈尔滨工业大学, 2008 (Yang J H. Normal form of high-codimensional differential equation with time delay and symbolic computation [Ph.D Thesis]. Harbin:Harbin Institute of Technology, 2008 (in Chinese))
- 7 Leblanc V G. Realizability of the normal form for the triple-zero nilpotency in a class of delayed nonlinear oscillators. *Journal of Differential Equations*, 2013,254(2):637~647
- 8 Wu X, Wang L. Zero-Hopf bifurcation for van der Pol's oscillator with delayed feedback. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2011,235(8):2586~2602
- 9 王玉杰. 几类具时滞动力系统的稳定性与分支问题研究[博士学位论文]. 哈尔滨:哈尔滨工业大学, 2013 (Wang Y J. Stability and bifurcation problems on several types of delayed dynamical systems[Ph.D Thesis]. Harbin:Harbin Institute of Technology, 2013 (in Chinese))
- 10 Jiang W, Wang H. Hopf-transcritical bifurcation in retarded functional differential equations. *Nonlinear Analysis Theory Methods & Applications*, 2010,73(11):3626~3640
- 11 Cui J, Liang J, Lin Z. Stability analysis for periodic solutions of the Van der Pol - Duffing forced oscillator. *Physica Scripta*, 2016,91(1):015201
- 12 Ghorbanian P, Ramakrishnan S, Whitman A, et al. A phenomenological model of EEG based on the dynamics of a stochastic Duffing-van der Pol oscillator network. *Bio-medical Signal Processing & Control*, 2015,15:1~10

NORMAL FORM COMPUTATION OF ZERO-HOPF BIFURCATION IN A CLASS OF DELAYED NONLINEAR OSCILLATORS*

Wang Mi¹ Zhang Chunrui^{1†} Wang Xingjian²

(1. College of Science, Northeast Forestry University, Harbin, 150040, China)

(2. College of Information and Computer Engineering, Northeast Forestry University, Harbin, 150040, China)

Abstract The effects of delayed feedback terms on nonlinear oscillators are very important. In order to study the effect of delayed terms on system vector fields, firstly, using center manifold reduction and normal form method, we compute and analyze that the system appears Zero-Hopf bifurcation when its characteristic equation has a simple zero root and a pair of purely imaginary roots and all other roots have negative real parts. Then, we clarify that a class of delayed nonlinear oscillators show different bifurcation when the delayed terms change via numerical simulation of specific examples. It's significant to investigate the other different systems further and what types of bifurcations may occur on systems.

Key words delay differential equations, normal forms, Zero-Hopf bifurcation, duffing oscillator equation with delayed feedback, numerical simulation

Received 3 December 2017, revised 8 February 2018.

* The project supported by the Fundamental Research Funds for the Central Universities(2572017BB03).

† Corresponding author E-mail: math@nefu.edu.cn