

含有分数阶 PID 控制器的随机动力系统可靠性分析*

李伟^{1†} 张美婷¹ 赵俊锋² 黄冬梅¹

(1.西安电子科技大学 数学与统计学院, 西安 710071) (2.西北工业大学 理学院应用数学系, 西安 710072)

摘要 随着粘弹性材料在工程结构中的广泛应用,刻画工程结构中粘弹性材料遗传特性和长记忆性的分数阶微积分成为研究的热点,特别是具有分数阶微积分特点的 PID 控制器更是从理论上和应用上受到关注.本文研究高斯白噪声激励下含有分数阶 PID 控制器的随机结构动力系统的可靠性问题.利用慢变过程的特征以及广义积分的性质,对分数阶 PID 控制器在数学上进行了近似处理,之后应用能量包络随机平均法确定了可靠性函数满足的后向 Kolmogorov 方程以及首次穿越时间统计矩满足的广义 Pontryagin 方程.结果表明:在分数阶控制器中,较小的分数阶 α 和较大的分数阶 β 均可以得到较为理想的可靠性结果,并且这些均与蒙特卡洛仿真结果一致,验证了方法的有效性和正确性.

关键词 分数阶 PID 控制器, 随机平均法, 可靠性函数, 随机动力系统, 噪声激励

DOI: 10.6052/1672-6553-2018-039

引言

随着分数阶微积分在数学领域的蓬勃发展,其应用逐渐受到关注,并已经成功应用于科学、工程、材料等多个领域.例如在材料科学中分数阶微积分可以更好地刻画粘弹性材料的本构关系^[1]以及体现既有粘性又有弹性的高分子材料的遗传特性^[2];在生物医学中模拟药物控释系统中的扩散过程^[3];在环境力学中刻画渗流、污染物在地层中的迁移等^[4].不仅如此,分数阶微积分的理论与应用发展还开辟了一个新的领域——分数阶 PID 控制.最早的分数阶控制这一概念可追溯到 1960 年,日本学者 Manabe 在 Tustin 一篇多目标位置控制的文章基础上提出了分数阶控制这一观点,但因理论和计算的局限性,这一概念在很长一段时间内都未取得实质性进展.1981 年,法国学者 Oustaloup^[5]从分数阶鲁棒性角度提出了 CRONE 控制原理,并应用于诸多实际问题中,证明了 CRONE 控制器比传统的 PID 控制更具有优势,是有效的分数阶控制方法之一.之后,1999 年学者 Podlubny^[6]提出了分数阶 PID 控制器的概念,一般格式简记为 $P^{\beta}D^{\alpha}$,是对整

数阶 PID 控制的推广,由于引入了分数阶次的积分、微分,即增加了 2 个可调节的参数,其控制器参数的调整范围变大,使其控制器的设计更加灵活,控制性能更加优良.另外,考虑到现实的许多系统是属于分数阶而非整数阶的,因此引入分数阶 PID 控制方法,探讨分数阶 PID 的控制性能,具有重要的理论意义与实际应用价值.

分数阶 PID 控制器的出现是一个里程碑,使得研究者的视角从对分数阶控制的理论研究逐渐转移到应用研究.在 Podlubny 分数阶 PID 控制器的理念启发下,众多学者先后在分数阶 PID 的算法、参数设定以及工程应用方面取得了长足的进步.其中主要的工作包括:文献[7]在网络控制系统中借助分数阶 PID 控制器解决了时滞和数据缺失问题;文献[8]利用分数阶 PID 控制器实现了六自由度飞行物的飞行轨迹控制问题;文献[9]在自动调节电压系统中采用分数阶 PID 控制实现绝对误差以及绝对稳态误差最小化;这些研究工作主要集中在确定性的网络系统或其他工程、工业系统中.涉及随机情形的目前只有文献[10]进行了此方面的工作,陈^[10]采用分数阶 PID 控制器,研究了有界噪声

2017-11-13 收到第 1 稿,2017-12-22 收到修改稿.

* 国家自然科学基金资助项目(11302157),陕西省自然科学基金资助项目(2015JM1028),高校基本科研业务项目(JB160706),中塞科技合作项目(3-19)

† 通讯作者 E-mail:liweilw@mail.xidian.edu.cn

激励下一个随机动力系统发生跳跃时的随机分岔现象,成功将确定性系统中的分数阶 PID 控制方法推广到随机激励的系统中,是一项具有开创性的工作。

另一方面,可靠性分析一直是噪声激励下随机动力系统研究的焦点问题之一。在实践中,当系统在随机激励作用下不稳定时,系统响应将在较大范围内做随机运动,因此,需要知道系统状态停留在相空间中某一区域的概率或统计特性。对结构系统而言,系统状态停留在安全域内的概率就是可靠性,系统状态首次穿越安全域就意味着损坏,系统状态首次穿越安全域边界的时间就是寿命。显然,研究随机动力系统的首次穿越以及采取有效的控制手段对系统进行控制,对了解结构系统的疲劳损伤、延长结构系统寿命具有重大的理论与实际意义。

首次穿越控制的目标是提高系统的可靠性性能,避免首次穿越的发生或延长首次穿越的时间^[11]。在适当的控制力作用下,通过选择性能指标以及控制参数,实现系统可靠性概率最大、首次穿越发生概率最小或延长平均首次穿越时间。在已有的研究中,首次穿越控制在理论上主要采用 Bellman 动态规划原理与 Pontryagin 极大值原理。2002 年,朱^[12]利用动态规划原理,对一类拟不可积哈密顿系统进行了研究,实现了可靠性概率最大化;基于 Bang-Bang 有界控制器, Yurchenko 和李^[13,14]等人对一类高斯白噪声激励下的随机动力系统进行了首次穿越的最优反馈控制,得到了首次穿越概率的最小化;刘,李和冯^[15-19]则利用时滞系统的无界遍历控制器的特点,讨论了经济周期模型以及随机动力系统的首次穿越概率最小化。总之,在目前的首次穿越控制研究中,其控制器还未涉及分数阶 PID 控制器这种形式。因此,本文主要工作是将确定性工业系统中开始兴起的分数阶 PID 控制器引入到噪声激励的工程结构动力系统中,讨论系统响应发生首次穿越的可能性以及分数阶的控制参数在控制首次穿越概率方面的影响和作用。

1 控制方程

考虑高斯白噪声激励下的含有分数阶 PID 控制器的单自由度动力系统,其数学方程可表示为

$$\ddot{x} + \beta_0 \dot{x} + \omega_0^2 x = \varepsilon [k_1 x + k_2 I^\beta x(t) + k_3 D^\alpha x(t)] +$$

$$\sqrt{\varepsilon} [W_1(t) + x W_2(t)] \quad (1)$$

式中, $x: x(t)$ 表示广义位移, $\dot{x}: \dot{x}(t)$ 表示广义速度, 两者皆是时间 t 的快变量, ε 是正的小参数, $\beta_0, \omega_0, k_1, k_2, k_3$ 均为参数且与 ε 同阶。 $W_1(t)$ 和 $W_2(t)$ 是均值为零, 相关函数为

$R_w(\tau) = E[W_k(t)W_l(t+\tau)] = 2D_{kl}\delta(\tau)$, $k, l = 1, 2$ 的高斯白噪声。这里 $\delta(\tau)$ 是 Dirac Delta 函数, D_{kl} 是常数。函数 $k_1 x + k_2 I^\beta x + k_3 D^\alpha x$ 表示由线性比例、分数阶积分算子、分数阶微分算子三部分组成的分数阶 PID 控制器, 其中, $I^\beta x(t)$ 和 $D^\alpha x(t)$ 是 Caputo 定义下的分数阶积分和分数阶微分, 定义为

$$I^\beta x(t) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t \frac{x(t-\tau)}{\tau^{1-\beta}} d\tau, \quad 0 < \beta < 1 \quad (2)$$

$$D^\alpha x(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{x(t-\tau)}{\tau^\alpha} d\tau, \quad 0 < \alpha < 1 \quad (3)$$

当激励强度 D_{kl} 与阻尼系数 β_0 皆为 ε 量级时, 系统响应是拟周期的, 因此可引入广义 Van der Pol 变换, 令

$$\begin{aligned} x(t) &= a(t) \cos\varphi(t) \\ \dot{x}(t) &= -a(t)\omega_0 \sin\varphi(t) \\ \varphi(t) &= \omega_0 t + \theta(t) \end{aligned} \quad (4)$$

其中, $a(t)$ 是系统响应的振幅过程, $\theta(t)$ 是系统响应的相位过程, 两者均是时间 t 的慢变过程。借助于上面的变化, 复杂的分数阶 PID 控制器可以近似转换为较为简单的函数复合。在此之前, 对控制器积分和微分中的时滞项进行泰勒近似, 即

$$\begin{aligned} x(t-\tau) &\approx a(t) \cos(\varphi - \omega_0 \tau) \\ &= a(t) \cos\varphi \cos\omega_0 \tau + a(t) \sin\varphi \sin\omega_0 \tau \end{aligned}$$

$\dot{x}(t-\tau) \approx -a\omega_0 \sin\varphi(t) \cos\omega_0 \tau + a\omega_0 \cos\varphi(t) \sin\omega_0 \tau$ 利用振幅过程和相位过程慢变的特点, 结合下面两个广义积分形式

$$\int_0^t \frac{\sin\omega\tau}{\tau^q} d\tau = \omega^{q-1} \left[\Gamma(1-q) \cos \frac{\pi q}{2} - \frac{\cos\omega t}{(\omega t)^q} + o(\omega t)^{-q} \right] \quad (5)$$

$$\int_0^t \frac{\cos\omega\tau}{\tau^q} d\tau = \omega^{q-1} \left[\Gamma(1-q) \sin \frac{\pi q}{2} + \frac{\sin\omega t}{(\omega t)^q} + o(\omega t)^{-q} \right]$$

则分数阶 PID 控制器可以近似表示为

$$k_1 x + k_2 I^\beta x(t) + k_3 D^\alpha x(t) \quad (6)$$

$$\approx \left[k_1 + k_2 \omega_0^{-\beta} \sin \frac{\pi(1-\beta)}{2} + k_3 \omega_0^\alpha \cos \frac{\pi\alpha}{2} \right] a \cos \varphi - \left[k_3 \omega_0^{\alpha-1} \sin \frac{\pi\alpha}{2} - k_2 \omega_0^{-\beta-1} \cos \frac{\pi(1-\beta)}{2} \right] a \omega_0 \sin \varphi + o(\omega_0 t)^{\max(\alpha+1, 1-\beta)} \quad (7)$$

因此,系统(1)可近似表示为

$$\ddot{x} + \left(\beta_0 - \varepsilon k_3 \omega_0^{\alpha-1} \sin \frac{\pi\alpha}{2} + \varepsilon k_2 \omega_0^{-\beta-1} \times \cos \frac{\pi(1-\beta)}{2} \right) \dot{x} + (\omega_0^2 - \varepsilon k_1 - \varepsilon k_2 \omega_0^{-\beta} \times \sin \frac{\pi(1-\beta)}{2} - \varepsilon k_3 \omega_0^\alpha \cos \frac{\pi\alpha}{2}) x \quad (8)$$

$$= \sqrt{\varepsilon} [W_1(t) + x W_2(t)] + o(\omega_0 t)^{\max(\alpha+1, 1-\beta)}$$

基于变换式(4),可解得慢变量振幅过程 $a(t)$

和相位过程 $\theta(t)$ 满足如下微分关系

$$\dot{a} = \frac{x\dot{x}}{a} + \frac{\dot{x}\dot{x}}{a\omega_0} \quad (9)$$

$$\dot{\theta} = \frac{\dot{a} \cos \varphi}{a \sin \varphi} \quad (10)$$

将(4)式以及方程(1)代入(9)式,则振幅过程 $a(t)$ 满足的微分方程为

$$\dot{a} = -a \omega_0 \sin \varphi \cos \varphi - \sqrt{\varepsilon} \frac{\sin \varphi}{\omega_0} [W_1(t) + x W_2(t)] - \frac{\sin \varphi}{\omega_0} \left\{ \beta_0 a \omega_0 \sin \varphi - \omega_0^2 a \cos \varphi + \left[k_1 + k_2 \omega_0^{-\beta} \sin \frac{\pi(1-\beta)}{2} + k_3 \omega_0^\alpha \cos \frac{\pi\alpha}{2} \right] \times (a \cos \varphi) + \left[k_3 \omega_0^{\alpha-1} \sin \frac{\pi\alpha}{2} - k_2 \omega_0^{-\beta-1} \times \cos \frac{\pi(1-\beta)}{2} \right] (-a \omega_0 \sin \varphi) \right\} \quad (11)$$

以及相位过程 $\theta(t)$ 满足的微分方程为

$$\dot{\theta} = -\omega \cos^2 \varphi - \sqrt{\varepsilon} \frac{\cos \varphi}{a \omega} [W_1(t) + x W_2(t)] -$$

$$\frac{\cos \varphi}{a \omega_0} \left\{ \beta_0 a \omega_0 \sin \varphi - \omega_0^2 a \cos \varphi + \left[k_1 + k_2 \omega_0^{-\beta} \sin \frac{\pi(1-\beta)}{2} + k_3 \omega_0^\alpha \cos \frac{\pi\alpha}{2} \right] \times (a \cos \varphi) + \left[k_3 \omega_0^{\alpha-1} \sin \frac{\pi\alpha}{2} - k_2 \omega_0^{-\beta-1} \times \right.$$

$$\left. \cos \frac{\pi(1-\beta)}{2} \right\} \quad (12)$$

记:

$$f_{11} = -a \omega_0 \sin \varphi \cos \varphi$$

$$g_{11} = -\frac{\sqrt{\varepsilon} \sin \varphi}{\omega_0}, \quad g_{12} = -\frac{\sqrt{\varepsilon} \sin \varphi}{\omega_0} a \cos \varphi \quad (13)$$

$$g_{21} = -\frac{\cos \varphi}{a \omega_0}, \quad g_{22} = -\frac{\cos \varphi}{\omega_0} \cos \varphi$$

$$f_{12} = -\frac{\sin \varphi}{\omega_0} \left\{ \beta_0 a \omega_0 \sin \varphi - \omega_0^2 a \cos \varphi + [k_1 + k_2 \omega_0^{-\beta} \sin \frac{\pi(1-\beta)}{2} + k_3 \omega_0^\alpha \cos \frac{\pi\alpha}{2}] \times (a \cos \varphi) + [k_3 \omega_0^{\alpha-1} \sin \frac{\pi\alpha}{2} - k_2 \omega_0^{-\beta-1} \times \cos \frac{\pi(1-\beta)}{2}] (-a \omega_0 \sin \varphi) \right\} \quad (14)$$

随机平均法可以看作确定性平均法或 KBM 平均原理在随机系统中的应用,是一种求解随机微分方程的近似方法.这种近似方法一方面可以降低系统的维数,另一方面可使原来复杂的系统在一定条件下近似为低维的扩散过程,同时保持原系统的基本动力学特征不变.Khasminskii 平均原理^[20]表明,当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时,在 ε^{-1} 量级的时间区间上,慢变过程 $a(t)$ 弱收敛于以下一维扩散 Markov 过程

$$da = m(a) dt + \sigma(a) dB(t) \quad (15)$$

其中, $B(t)$ 是标准 Wiener 过程, $m(a)$ 与 $\sigma^2(a)$ 分别是漂移与扩散系数.假设系统响应在整个相平面内是遍历的,则这两个函数可通过随机平均法获得,平均公式为:

$$m(a) = \langle f_{11} + f_{12} + \int_{-\infty}^0 \left(\frac{\partial g_{1k}}{\partial a} \Big|_{t+\tau} g_{1l} \Big|_{t+\tau} + \frac{\partial g_{1k}}{\partial \varphi} \Big|_{t+\tau} g_{2l} \Big|_{t+\tau} \right) R_{kl}(\tau) d\tau \rangle_t, k, l = 1, 2$$

$$\sigma^2(a) = \langle \int_{-\infty}^{\infty} (g_{1k} \Big|_{t+\tau} g_{1l} \Big|_{t+\tau}) R_{kl}(\tau) d\tau \rangle_t \quad (16)$$

这里, $\langle f \rangle_t = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \langle f \rangle dt$.

完成平均后,即可得漂移与扩散的最后表达式.注意到,当激励强度 D_{kl} 与阻尼系数 β_0 皆为 ε 量级时,系统响应是拟周期的,令 $H(t)$ 是系统的总能量,在物理上,若振动一周内,随机激励输入的能量

与阻尼耗散的能量相比之差同系统本身能量相比较小,则可视为拟 Hamilton 系统,此时 $H(t)$ 是时间的慢变量,由系统动能和势能两部分组成,满足

$$H(t) = \frac{1}{2} \dot{x}^2 + U(x) \quad (17)$$

其中,

$$U(x) = \frac{1}{2} \left(\omega_0^2 - \varepsilon k_1 - \varepsilon k_2 \omega_0^{-\beta} \sin \frac{\pi(1-\beta)}{2} - \varepsilon k_3 \omega_0^\alpha \cos \frac{\pi\alpha}{2} \right) x^2$$

为系统的势能.已经证明 $H(t) = U(a)$, 故基于微分方程(11),由随机微分变换公式,可得能量函数 $H(t)$ 满足的随机微分方程为

$$dH = m(H) dt + \sigma(H) dB(t) \quad (18)$$

其中,

$$m(H) = [\varepsilon n_1(a, \alpha, \beta) - \beta_0] H + D_{11} \varepsilon + 2D_{22} \varepsilon H \quad (19)$$

$$\sigma^2(H) = \sqrt{2D_{11}} \varepsilon H + \frac{D_2 \varepsilon H^2}{\omega_0^2} \quad (20)$$

2 首次穿越的公式

假设系统在状态空间中的安全域为一开域 $D = [0, \Gamma)$, 其中 Γ 是 D 的平滑右边界值. $H(t)$ 为方程(18)所示的一维扩散过程,在有限时间区间 $(0, t]$ 内此过程停留在安全域内,一旦在某一时刻越过边界,则发生首次穿越.我们的目的是确定系统响应首次越出安全域边界 Γ 的时间概率分布情况,为此引入条件可靠性函数,可用下面的转移概率率进行描述

$$R(t|H_0) = P\{H(\tau) \in D, \tau \in (0, t) | H(0) = H_0 \in D\} \quad (21)$$

它表示过程初始时刻位于 D 内,而在 $(0, t]$ 时间内,一直保持在 D 内的概率.为导出可靠性函数满足的方程,需引入条件转移概率密度 $p(H, t|H_0)$, 表示在 $(0, t]$ 内样本函数在安全域内的转移概率密度.已经证明^[11],条件可靠性函数满足的 Backward Kolmogorov (BK) 方程为

$$\frac{\partial R}{\partial t} - m(H_0) \frac{\partial R}{\partial H_0} - \frac{1}{2} \sigma^2(H_0) \frac{\partial^2 R}{\partial H_0^2} = 0, H_0 \in D \quad (22)$$

其中, $m(H_0)$ 和 $\sigma^2(H_0)$ 满足漂移与扩散函数方程(19)和(20),BK 方程的相应的初始条件为

$$R(0|H_0) = 1, H_0 \in D \quad (23)$$

表示初始时刻系统的响应一定是在安全域的.对应的边界条件为

$$R(t|H_0) = 0, H_0 = \Gamma \quad (24)$$

$$0 < R(t|H_0) \leq 1, H_0 = 0 \quad (25)$$

其含义为系统响应若保持在安全域内运动,可靠性概率是个有限值,一旦越出边界,可靠性值则降为 0.显然条件可靠性函数为条件转移概率密度在安全域上的积分,即

$$R(t|H_0) = \int_D p(H, t|H_0) dH \quad (26)$$

衡量系统可靠性的另一个常用指标是首次穿越时间.假设系统首次穿越安全域边界的时间为 T_f , 则首次穿越时间满足的条件概率密度 $p(T_f|H_0)$ 为

$$p(T_f|H_0) = - \left. \frac{\partial R(t|H_0)}{\partial t} \right|_{t=T_f} \quad (27)$$

可以证明^[11]:首次穿越时间的各阶统计矩 $u_{k+1}(H_0) = E(T_f^{k+1})$ 满足下面的 Generalized Pontryagin-in (GP) 方程

$$m(H_0) \frac{du_{k+1}}{dH_0} + \frac{1}{2} \sigma^2(H_0) \frac{d^2 u_{k+1}}{dH_0^2} = -(k+1) u_k, \quad k=0, 1, 2, \dots \quad (28)$$

特别地,工程力学中最受关注的平均首次穿越时间只需令 $k=0, u_0=1$, 相应的两个边界条件分别为

$$u_{k+1}(H_0) = 0, H_0 = D \quad (29)$$

$$u_{k+1}(H_0) = \text{有限}, H_0 = 0 \quad (30)$$

因此,对随机动力系统(1)的首次穿越的研究以及控制转化为对两个确定型偏微分方程的求解问题.鉴于漂移函数与扩散函数均为非线性函数,一般来说很难求解,需借助数值方法给出其数值解.

3 数值结果

本文将采用无条件稳定的隐式 Crank-Nikolson 有限差分法对可靠性函数进行求解.其中,各参数取值分别为: $\alpha = 0.1, \beta = 0.05, \beta_0 = 0.1, \varepsilon = 0.5, \omega_0 = 0.3, k_1 = 3, k_2 = 1.5, k_3 = 0.5, D_{11} = 0.2, D_{22} = 0.4, H_f = 3$.图 1 给出了能量函数在四种不同初始条件下的变化情况,可以看出,由于噪声的影响,能量函数随时间变化有很大的随机性,首次穿越可能发生如图(a), (b), (d) 也可能不会发生,如图(c)所示,且首次发生的时间也跟初始条件和噪声有关.

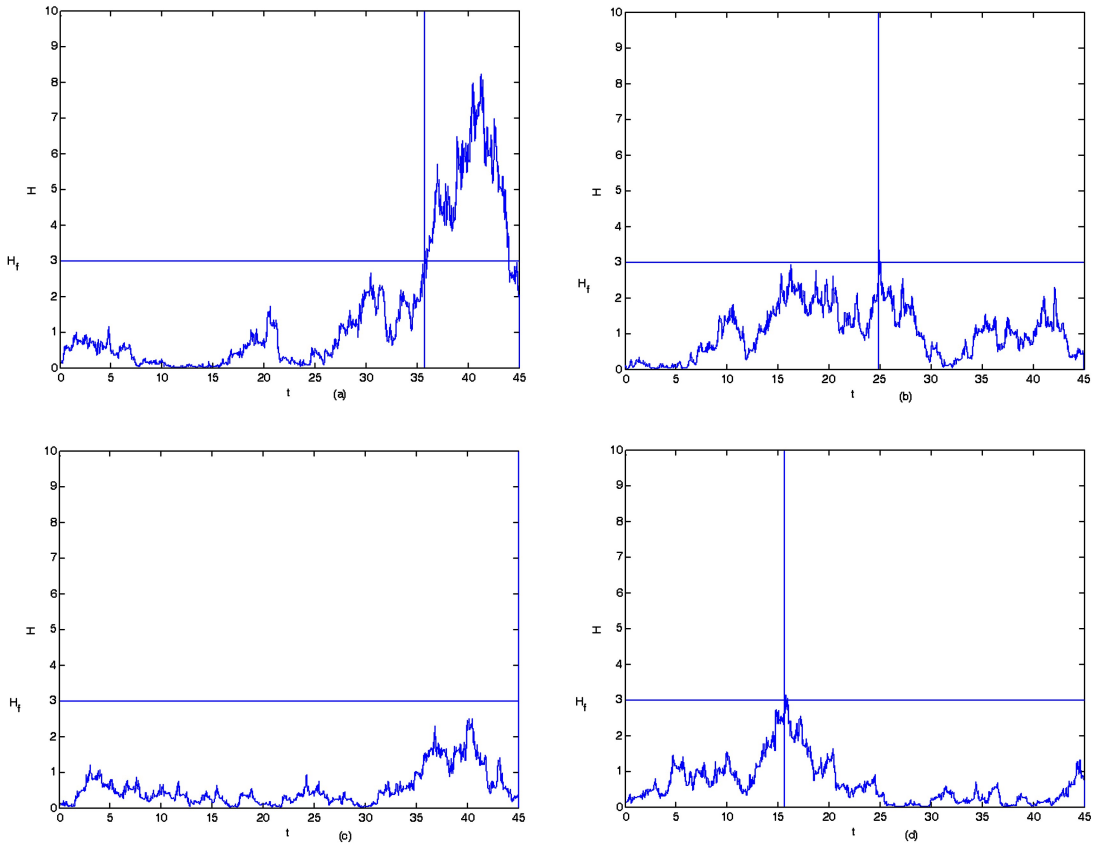


图 1 不同初始条件下能量函数随时间的变化曲线

Fig.1 Time history curve of energy function under different initial conditions

(a) $x(0) = 0, \dot{x}(0) = \sqrt{0.02}$, (b) $x(0) = 0, \dot{x}(0) = -\sqrt{0.02}$, (c) $x(0) = 0.0554, \dot{x}(0) = 0$, (d) $x(0) = -0.0554, \dot{x}(0) = 0$

为此,图 2 统计了初始能量分别为 0.8、1.5、2.1 条件下该线性振子可靠性函数随时间的变化情况.实线为差分法得到的数值解,■◆+等则均是在同组参数条件下使用蒙特卡洛方法对原系统仿真的结果.

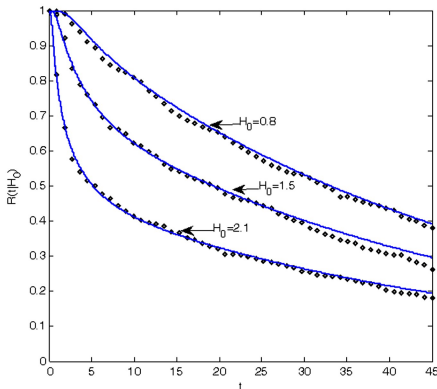


图 2 随时间变化的条件可靠性函数

Fig.2 Time history of condition reliability function

思想得到了随机激励样本,在求解微分方程时,又分别对分数阶导数和分数阶积分采用拉盖尔积分方式进行了处理.可以看出,两种结果基本吻合.并且可靠性函数随着时间的增加在单调的减少,特别是初始能量越大,即越靠近安全域的右边界,留在安全域内的可能性越小,发生首次穿越的概率也就越大.

图 3 给出了振子在振动过程中首次穿越时间服从的条件概率分布.通过求解 GP 方程,图 4 显示了首次穿越时间均值随初始能量函数值的变化情况,其含义与图 2 保持一致,均反映了越靠近安全域的右边界,发生首次穿越的平均时间越短.

取定 $H_0 = 1.5$,图 5 检验了分数阶导数的阶 α 对可靠性结果的影响.可以看出,阶 α 值越大,可靠性概率越小,下降越快,说明较小的分数阶 α 有益于提高系统的可靠性.图 6 在相同初始能量函数下检验了分数阶积分的阶 β 对可靠性结果的影响.与导数阶 α 正好相反,较大的分数阶 β 反倒可以得到较为理想的可靠性概率.

在进行蒙特卡洛模拟仿真时,首先依据大样本

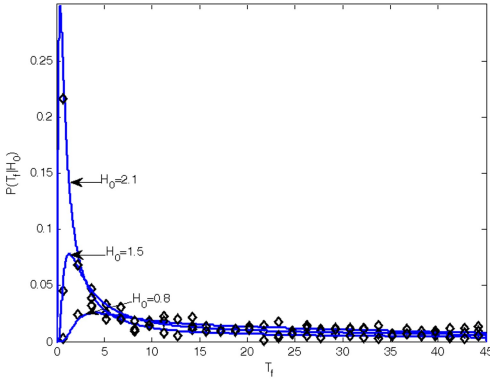


图3 首次穿越时间的概率密度

Fig.3 Probability density of first passage time

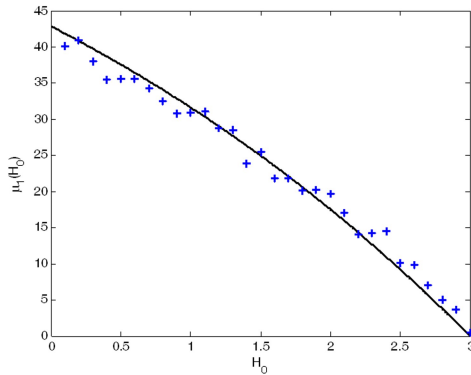


图4 平均首次穿越时间

Fig.4 Mean value of first passage time

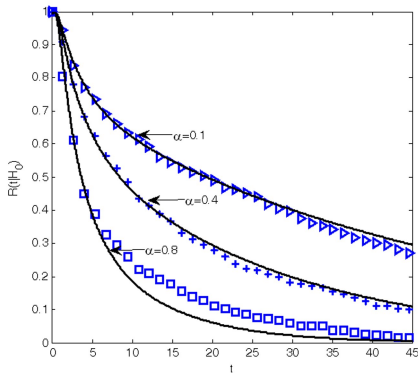


图5 分数阶导数的阶 α 对条件可靠性函数的影响, 其中 $H_0 = 1.5$

Fig.5 Influence of fractional order α on conditional reliability functions, where $H_0 = 1.5$

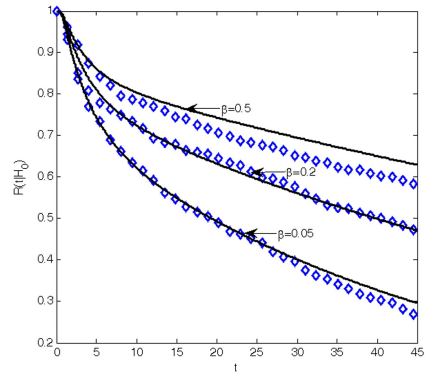


图6 分数阶积分的阶 β 对可靠性函数的影响, 其中 $H_0 = 1.5$, 其他参数同图1

Fig.6 Influence of fractional order β on conditional reliability functions, where $H_0 = 1.5$

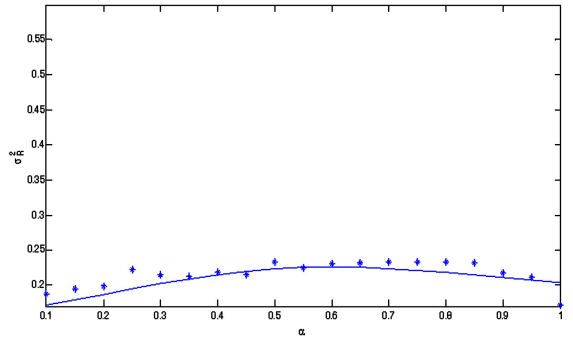


图7 分数阶PID控制器中的参数 α 取不同值时可靠性函数的方差

Fig.7 Variance of reliabilityfunction with different α values in fractional order PID controller

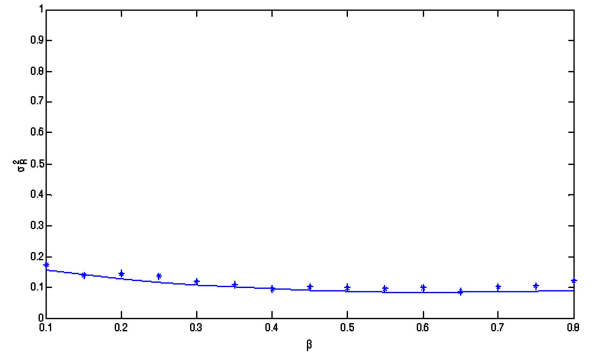


图8 分数阶PID控制器中的参数 β 取不同值时可靠性函数的方差

Fig.8 Variance of reliability function with different β values in fractional order PID controller

不仅如此,图7和图8进一步检验了分数阶PID控制中的重要参数 α 和 β 取值对可靠性函数波动的影响情况.可以看出,参数 α 取值较小即不超过0.2时可靠性函数的波动较小,而参数 β 在0.6附近能得到较小的波动率.

4 结论

本文主要研究了含有分数阶PID控制器的一类随机动力系统的可靠性问题.首先,分数阶PID控制器近似转化为一些周期函数的叠加,在此基础

上,采用能量包络随机平均法,得到了能量函数满足的扩散微分方程,进而确定了条件可靠性函数满足的后向 BK 方程以及首次穿越时间统计矩满足的 GP 方程.通过数值求解两个方程,发现可靠性函数是时间的单调递减函数,平均首次穿越随初始能量值的增大而减小,在分数阶控制器中,较小的分数阶导数的阶 α 和较大的分数阶积分的阶 β 均可以得到较为理想的可靠性结果.所有的数值结果与从原系统出发的蒙特卡洛模拟结果基本吻合,检验了所用方法的有效性.

参 考 文 献

- 1 Scott Blair G W. The role of psychophysics in rheology. *Journal of Colloid and Interface Science*, 1947,2:21~32
- 2 蔡峨. 黏弹性力学基础. 北京:北京航空航天大学出版社, 1989 (Cai E. Viscoelastic foundation. Beijing:Beihang University press, 1989 (in Chinese))
- 3 Chen W, Holm S. Fractional Laplacian time-space models for linear and nonlinear lossy media exhibiting arbitrary frequency dependency. *The Journal of the Acoustic Society of America*, 2004,115(4):1424~1430
- 4 钱家欢,殷宗泽. 土工原理与计算. 北京:中国水利水电出版社, 1996 (Qian J H, Yin Z Z. Geotextile principle and calculation. Beijing: China Water Conservancy and Hydropower Press, 1996 (in Chinese))
- 5 Moze M, Sabatier J, Oustaloup A. LMI characterization of fractional systems stability. In: advances in fractional calculus. Machado:Springer, 2007:419~434
- 6 Podlubny I. Fractional order system and controllers. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1999,4:208
- 7 Wang L, Guo W. Application of fractional order PID control in networked control system. *Journal of Nan Jing University of Information Science and Technology*, 2009(4):309~303
- 8 Aboeela M A S, Ahmed M F, Dorrah H T. Design of aerospace control systems using fractional PID controller. *Journal of Advanced Research*, 2012,3(3):225~232
- 9 Zeng G Q, Chen J, Dai Y X, et al. Design of fractional order PID controller for automatic regular voltage system based on multi-objective extremal optimization. *Neurocomputing*, 2015,160:173~184
- 10 Chen L C, Zhao T L, Li W, et al. Bifurcation control of bounded noise excited Duffing oscillator by a weakly fractional-order PID feedback controller. *Nonlinear Dynamics*, 2016,83(1-2):529~539
- 11 朱位秋. 非线性随机动力学与控制-哈密尔顿理论框架. 北京:科学出版社, 2003 (Zhu W Q. Nonlinear stochastic dynamics and control-Hamilton theoretical framework. Beijing:Science Press, 2003 (in Chinese))
- 12 Zhu W Q, Huang Z L, Deng M L. Feedback minimization of first passage failure of quasi non-integrable Hamiltonian systems. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2002,37:1057~1071
- 13 Yurchenko D. Stability, control and reliability of a ship crane payload motion. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 2014,38:173~179
- 14 Li X P, Huan R H, Wei D M. Feedback minimization of the first-passage failure of a hysteretic system under random excitations. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 2010,25(2):245~248
- 15 Liu Z H, Zhu W Q. First passage failure of quasi-integrable Hamiltonian systems under time-delayed feedback control. *Journal of Sound and Vibration*, 2008,315(1-2):301~317
- 16 Li W, Xu W, Xu Y, et al. First-passage and its control in a macroeconomic model. *Far East Journal of Applied Mathematics*, 2007,28(1):1~16
- 17 Li W, Xu W, Zhao J F, et al. Stochastic optimal control of first passage failure for coupled Duffing-van der Pol system under Gaussian white noise excitations. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2005,25(5):1221~1228
- 18 Li JR, Feng C S. First passage failure of a business cycle model under time-delayed feedback control and wide-band random excitation. *Physica A*, 2010,389:5557~5562
- 19 Feng C S, Wu Y J, Zhu W Q. First passage failure of strong non-linear oscillators with time-delayed feedback control under combined harmonic and wide-band noise excitations. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2009,44:269~275
- 20 Khasminskii R Z. On the averaging principle for stochastic differential Ito equation. *Kibernetika*, 1968,4:260~268

RELIABILITY ANALYSIS OF STOCHASTIC DYNAMICAL SYSTEMS WITH FRACTIONAL ORDER PID CONTROLLER*

Li Wei^{1†} Zhang Meiting¹ Zhao Junfeng² Huang Dongmei¹

(1.School of Mathematics and Statistics, Xidian University, Xi'an 710071, China)

(2.Department of Applied Mathematics, School of Natural and Applied Sciences, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China)

Abstract With the widely application of viscoelastic material in engineering structures, fractional calculus that characterizes its feature of hereditary and long-run memory associating with stochastic engineering systems becomes the hot issue. Specially, fractional PID controller is more attractive in theory and application. In this paper, fractional order PID (FOPID) control on reliability of stochastic dynamical systems subjected to Gaussian white-noise excitation is investigated. FOPID controller is mathematically approximated based on the characteristics of slow-varying process and the properties of generalized integral. After that, stochastic averaging method of energy envelope is applied to determine Backward Kolmogorov (BK) equation associated with conditional reliability function and Generalized Pontryagin (GP) equation associated with statistical moments of first-passage time. The numerical results illustrate that both the smaller fractional order α and greater fractional value β in PID controller can obtain better reliable results, besides, these results are in very agreement with the simulations from Monte-Carlo method, which verifies the correction and efficiency of our proposed methods.

Key words fractional order PID controller, stochastic averaging method, reliability function, random dynamical system, noise excitation

Received 13 November 2017, revised 22 December 2017.

* The project supported by the National Natural Science Foundation of China(11302157), Natural Science Basics Research Plan in Shaanxi Province of China(2015JM1028), the Fundamental Research Funds for the Central Universities under the Grants(JB160706) and China-Serbian Science and Technology Cooperation for the years 2015-2016 under the Grants(3-19).

† Corresponding author E-mail: liweilw@mail.xidian.edu.cn