

# 具有不同决策规则的 Cournot 双寡头模型分析\*

曹银霞<sup>†</sup> 周伟 杨琼

(兰州交通大学 数理学院, 兰州 730070)

**摘要** 以寡头市场中两家具有限理性且以产量竞争的异质企业为背景, 建立了一个离散时间的非线性动态古诺双寡头模型. 讨论了模型的边界均衡点和 Cournot-Nash 均衡点的存在性和稳定性, 给出了 Cournot-Nash 均衡点的稳定区域. 通过数值模拟, 利用单参数分岔图分析了随着参数的变化, 系统的复杂动力学行为的变化情况. 得出调整速度太大会导致 Cournot-Nash 均衡点失去稳定性, 系统将产生混沌吸引子等复杂的动力学现象. 此外初值极小的变化将导致系统产生巨大的波动. 同时企业成本函数的差异性也会使得系统产生不同的分岔.

**关键词** Cournot 模型, 企业异质性, 混沌, 分岔

DOI: 10.6052/1672-6553-2018-037

## 引言

随着非线性科学和混沌理论的迅速发展, 越来越多的学者致力于将非线性动力学及混沌理论应用到经济领域中. 应用博弈理论建立离散时间非线性模型, 分析其分岔, 混沌吸引子等复杂动力学行为来解释各种经济学现象, 对了解和掌控经济发展规律和本质, 以及在经济活动中采取合理的经济决策具有指导性意义. 由于在不同环境中需要采取不一样的决策准则, 所以一般基于不同假设建立博弈模型来分析经济现象. 在没有完全获得市场和竞争对手的信息时, 通常采取有限理性原则, 它是目前使用最为广泛的决策准则<sup>[1-4]</sup>. 文献[5]使用弹性需求和线性成本函数, 基于有限理性建立双寡头模型分析异质成本函数和行为决策对 Cournot-Nash 平衡的影响. 文献[6]基于有限理性的假设, 建立了一个不同理性, 不同结构成本函数的双寡头模型, 分析了寡头理性的变化对博弈结果的影响. 文献[7]基于不同理性建立了一个双寡头博弈模型, 讨论了它的复杂性. 文献[8]研究了一个基于不同决策的三寡头模型. 在大量关于异质企业的动态双寡头的文献中, 竞争对手的生产和组织结构角色可能的异质性在一定程度上仍处于阴影之中. 例如, 只

有少数研究明确地考虑了企业成本函数的差异对模型的动态特性的影响, 并从财务角度分析其对企业生存的影响. 然而, 这种差异确实可能起到重要作用, 并有助于丰富可能的动态场景的范围. 本文将通过建立和分析一个比较简单的模型来对上述问题进行讨论, 但是它同时包含了“行为”的异质性(即不同的产出决策方法)和生产成本差异的可能性. 为了进行这样的分析, 我们假设在每个离散周期的竞争中, 两家具有限理性的企业根据对竞争者下一时期的产出预测来实施不同的生产决策. 在所选产出不能为负值的自然要求下, 迫使动力系统的映射是分段光滑的. 本研究主要通过分析分岔和混沌吸引子, 改变梯度调整参数, 来确定可变成成本的固定结构.

## 1 模型建立

假设市场中有两家寡头企业, 两家企业生产同质产品并以产量竞争. 并令  $x \geq 0$  表示企业 1 的产量供应,  $y \geq 0$  表示企业 2 的产量供应. 考虑到总供给为  $q = x + y$ ,  $p(q)$  为产品的市场价格, 其中  $p(\cdot)$  是逆需求函数, 一般假设  $p(\cdot)$  是减函数. 两家企业的利润函数由

$$\pi_1(x, y) = xp(q) - C_1(x)$$

和

$$\pi_2(x, y) = yp(q) - C_2(y)$$

表示,其中  $C_1(x)$  和  $C_2(y)$  分别表示两家企业的总成本函数。

假定两家企业都是根据对竞争者产出的预测,预先采取生产决策.用  $x^e, y^e$  分别表示对企业 1 和企业 2 将来产出的预测.若考虑两家企业都是追求利润最大化,则根据两家企业的利润函数,可求出使得各自企业利润最大化的产量分别为

$$x = R_1(y^e) := \arg \max_{u \geq 0} \pi_1(u, y^e) \quad (1)$$

$$y = R_2(x^e) := \arg \max_{v \geq 0} \pi_2(x^e, v) \quad (2)$$

其中,  $R_1(y^e)$  和  $R_2(x^e)$  分别是企业 1 和企业 2 的最佳回应或反应函数。

在这个模型中,我们考虑一个线性逆需求函数  $p(q) = a - b(x + y)$ , 其中,  $a, b \geq 0$ . 假设成本函数是二次的, 即  $C_1(x) = c_1 x^2, C_2(y) = c_2 y^2$ , 其中,  $c_1, c_2 > 0$ , 分别是与各企业技术水平成反比的系数. 通过上述假设, 可得两家企业的利润函数分别为

$$\pi_1(x, y) = (a - b(x + y))x - c_1 x^2 \quad (3)$$

$$\pi_2(x, y) = (a - b(x + y))y - c_2 y^2 \quad (4)$$

那么, 方程 (1) 和 (2) 即可分别表示为

$$R_1(y^e) = \begin{cases} \frac{a - by^e}{2(b + c_1)} & 0 \leq y^e \leq \frac{a}{b} \\ 0 & y^e > \frac{a}{b} \end{cases} \quad (5)$$

$$R_2(x^e) = \begin{cases} \frac{a - bx^e}{2(b + c_2)} & 0 \leq x^e \leq \frac{a}{b} \\ 0 & x^e > \frac{a}{b} \end{cases} \quad (6)$$

进一步, 用  $x_t$  和  $y_t$  表示两家企业在  $t$  时期的产量, 而  $y_{t+1}^e, x_{t+1}^e$  分别表示企业 1 和企业 2 对竞争者下一个时期产出的预测. 我们假设两家企业的行为决策和他们的成本函数一样都是异质的. 对于两家企业来说, 均假设简单预期, 即  $x_{t+1}^e = x_t, y_{t+1}^e = y_t$ . 然而, 与上面讨论的参考案例不同, 这两家企业有不同的产出决策. 企业 1 采用最佳回应决策 (5), 则其在  $t+1$  时期的产量如下

$$x_{t+1} = R_2(x_t) = \max \left\{ 0, \frac{a - by_t}{2(b + c_1)} \right\} \quad (7)$$

而企业 2 根据梯度调整规则决定其在下一个时期的产量, 即

$$y_{t+1} = y_t + ky \frac{\partial \pi_2(x, y)}{\partial y} \quad (8)$$

其中, 调整速度参数  $k > 0$ , 企业根据当前时期的边际利润情况, 进行下一时期的决策. 如果当前的边际利润为正, 则企业在下一时期将提高产出; 如果当前的边际利润为负, 则企业在下一时期将降低产出。

正如前面提到的, 这两种策略都依赖于两家企业都对竞争者下一时期的产出有简单预期, 即竞争者不会改变它当前时期的产出水平. 然而当企业 1 完全切换到新的赢利最大化产出模式时, 企业 2 只是增加或减少其产出的比例. 因此重复的双寡头博弈可以形式化为一个二维非线性离散差分方程. 考虑到产量不能为负, 映射  $M: R^2 \rightarrow R^2$  确定系统的映射如下

$$M: \begin{cases} x_{t+1} = \max \left\{ 0, \frac{a - by_t}{2(b + c_1)} \right\} \\ y_{t+1} = \max \{ 0, y_t + ky_t(a - bx_t) - 2ky_t^2(b + c_2) \} \end{cases} \quad (9)$$

即动力系统 (9) 的初始条件满足

$$F = \{ (x, y) : x \geq 0, y \geq 0, x + y \neq 0 \}$$

## 2 稳定性分析

在系统 (9) 中, 令  $x_{t+1} = x_t = x^*, y_{t+1} = y_t = y^*$ , 可得到如下代数方程

$$\begin{cases} x - \frac{a - by}{2(b + c_1)} = 0 \\ ky(a - bx) - 2ky^2(b + c_2) = 0 \end{cases} \quad (10)$$

从而得到系统 (9) 有两个平衡点

$$E_0 = \left( \frac{a}{2(b + c_1)}, 0 \right)$$

$$E^* = \left( \frac{a(b + 2c_2)}{3b^2 + 4c_1b + 4c_2b + 4c_1c_2}, \frac{a(b + 2c_1)}{3b^2 + 4c_1b + 4c_2b + 4c_1c_2} \right)$$

其中, 平衡点  $E_0$  是一个边界平衡点, 是一个垄断均衡解, 显然  $E^*$  是惟一的 Cournot-Nash 均衡点. 由稳定性理论, 平衡点的局部稳定性可通过系统的 Jacobi 矩阵的特征值得到, 计算系统 (9) 在任意一点的 Jacobi 矩阵为

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-b}{2b + 2c_1} \\ -kyb & 1 + k(a - bx) - 4k(b + c_2)y \end{pmatrix}.$$

利用该 Jacobi 矩阵讨论系统(9)平衡点得稳定性,可得到如下结论:

**定理 1** 平衡点  $E_0$  是系统(9)的鞍点.

**证明:** 系统在  $E_0$  点的 Jacobi 矩阵为

$$J(E_0) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{b}{2b+2c_1} \\ 0 & 1+ka-\frac{kab}{2(b+c_1)} \end{pmatrix}, \text{ 它的特征值为}$$

$\lambda_1=0, \lambda_2=1+ka\left(1-\frac{b}{2(b+c_1)}\right)$ . 因为参数  $a, b, k, c_1$  均为正数, 则  $|\lambda_1|<1, |\lambda_2|>1$ , 所以  $E_0$  是系统(9)的不稳定的平衡点(鞍点).

由于系统在  $E^*$  处的 Jacobi 矩阵为

$$J(E^*) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{b}{2b+2c_1} \\ \frac{a(b+2c_1)}{3b^2+4c_1b+4c_2b+4c_1c_2} & 1+k\left(a-\frac{B}{A}\right)-\frac{C}{A} \end{pmatrix}$$

其中,

$$A=3b^2+4c_1b+4c_2b+4c_1c_2$$

$$B=ab(b+2c_2)$$

$$C=4ka(b+2c_1)(b+c_2).$$

$\text{tr}J$  和  $\det J$  分别是  $J(E^*)$  的迹和行列式, 且可表示为

$$\text{tr}J = 1+k\left(a-\frac{B}{A}\right)-\frac{C}{A}$$

$$\det J = \frac{-kab^2(b+2c_1)}{(3b^2+4c_1b+4c_2b+4c_1c_2)(2b+2c_1)}.$$

由 Jury 条件, Cournot-Nash 均衡点的稳定区域为,

$$\begin{cases} \frac{D-E}{2A(b+c_1)} > 0 \\ \frac{ka(b+2c_1)}{b+c_1} > 0 \\ -\frac{kab^3+2kab^2c_1+6b^3+14b^2c_1+8c_1^2b+16c_2bc_1+8c_1^2c_2}{2A(b+c_1)} < 0 \end{cases} \quad (11)$$

其中,

$$D=12b^3+28b^2c_1+16c_1^2b+16c_2b^2+$$

$$32c_2bc_1+16c_1^2c_2$$

$$E=5kab^3+14kab^2c_1+8kac_1^2b+4kac_2b^2+$$

$$12kac_2bc_1+8kac_1^2c_2$$

在(11)中, 由于参数  $a, b, k, c_1, c_2 > 0$ , 第二个和第三个式子恒成立, 从而(11)式可等价地表示为

$$4(b+c_1)-ka(2c_1+b) > 0 \quad (12)$$

通过数值模拟, Cournot-Nash 均衡点  $E^*$  的稳定域是由(12)式的曲线和  $k, c_1$  的正半轴围成的区域(图1深色部分).  $E^*$  在这个区域是稳定的, 当穿过稳定区域的 flip 分岔曲线时, 系统发生 flip 分岔, 在 flip 曲线的交叉处附近出现一个稳定的 2 周期轨道, 稳定的平衡点变成鞍点.

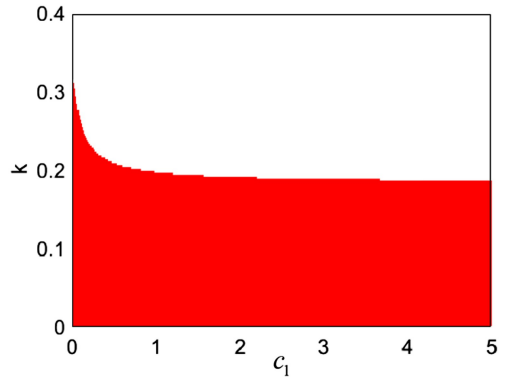


图1 Cournot-Nash 均衡点  $E^*$  在参数平面  $(c_1, k)$  的

局部渐进稳定区域

Fig.1 Region of local asymptotic stability of the Cournot-Nash steady state in the parameter  $(c_1, k)$

### 3 数值模拟

上面对系统的 Nash 均衡点进行了分析, 接下来将在参数空间, 通过数值模拟来分析系统的动力学行为, 以及对初始条件的敏感性. 我们希望企业 2 的调整速度  $k$  具有一个稳定变化的趋势. 对始于稳定参数空间区域的值, 随着调整速度的增加, 会失去稳定性. 而且对于有限理性的异质双寡头模型, 成本函数系数的相关值会产生不同的分岔. 基于这些条件, 为研究平衡点的局部稳定性, 固定其它参数值  $a=11, b=0.2, c_2=1$ . 我们研究系统在参数空间  $(c_1, k)$  的动力学行为.

图 2(a) 是在参数  $a, b, c_2$  固定,  $c_1=5$  时系统随企业 2 的调整速度  $k$  变化的分岔图. 图 2(b) 是与图 2(a) 对应的最大李雅普洛夫指数图, 从图中可以看出调整速度  $k$  在小于 0.24 时系统是稳定的, 随着  $k$  值的增加系统逐渐通往混沌. 从图 2(a) 中可以看出随着  $k$  值的增加, 系统在通往混沌的过程中会出现周期间隙. 也可以观察到, 当调整参数进一步增加时, 新的吸引子在局部分岔产生后变得越来越复杂.

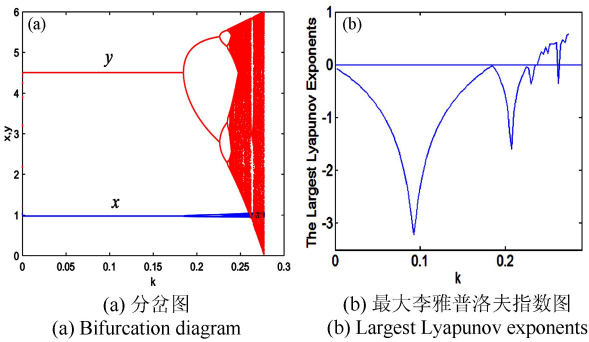


图 2  $c_1=5$  时两家企业产量随参数  $k$  的变化

Fig.2 Variation of the output levels of both firms when  $c_1=5$

图 3 是企业 1 随  $k$  值变化的分岔图,在图 1 中我们可以看到当调整速度接近 0.2 时,系统会发生 flip 分岔.从图 3 中可以看出,企业 1 随参数  $k$  变化的单参图,在接近 0.2 时也发生了 flip 分岔.此时 Cournot-Nash 均衡点  $E^*$  失去稳定性,形成了一个围绕着  $E^*$  的 2 周期环.随着调整速度  $k$  的不断增加,2 周期环经过 flip 分岔产生了一个 4 周期环.直至调整速度  $k$  接近 0.25 时,flip 分岔序列结束,系统进入混沌状态.

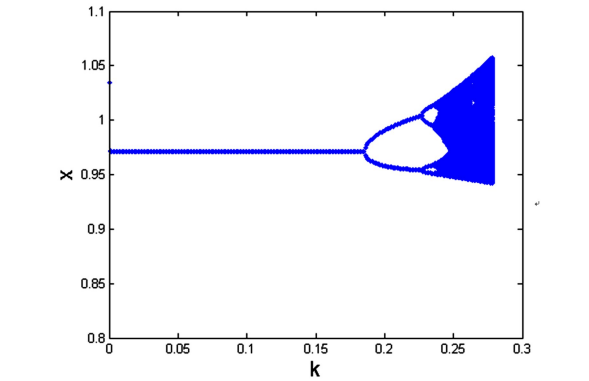


图 3 对应图 2 中企业 1 产量随参数  $k$  变化的分岔图的放大

Fig.3 Amplification of the bifurcation diagram with the change of the parameter  $k$  for the output levels of Firm 1 in Fig.2

图 4 是在图 3 所对应的参数下,取调整速度  $k=0.25$  时系统的混沌吸引子.可以验证系统此时已经结束了 flip 分岔序列进入混沌状态.也就是寡头市场中企业的调整速度参数越大,即对市场的反应越快,系统越容易打破稳定状态而陷入混沌状态,寡头竞争市场也越容易陷入无序状态.这种情况下企业无法对将来做出准确的预测.

图 5 是固定参数  $a=22, b=3, c_1=5$ , 通过增加参数  $c_2$  的值,得到产量关于调整速度  $k$  的分岔图.可以看到图 5(a) 是  $c_2=4$  时的分岔图,此时  $c_1$  大

于  $c_2$ , 企业 1 的分岔图在企业 2 的下方,随着  $c_2$  的进一步增加,两家分岔图先是有重合部分,再到图 5(c) 中企业 1 在企业 2 的上方.但不管怎样增加  $c_2$ , 这些分岔图的形状基本不变.直到图 5(d) 中两家企业的分岔图都是从 1 周期到 2 周期再到 4 周期,没有出现混沌,此时市场处于周期运转状态.

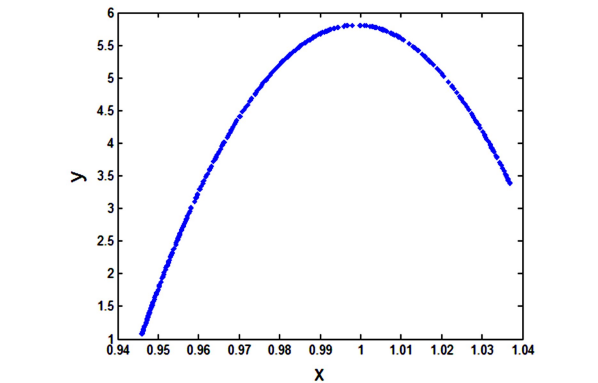


图 4 当  $c_1=5, k=0.25$  时,系统的混沌吸引子

Fig.4 Chaotic attractor of the system when  $c_1=5$  and  $k=0.25$

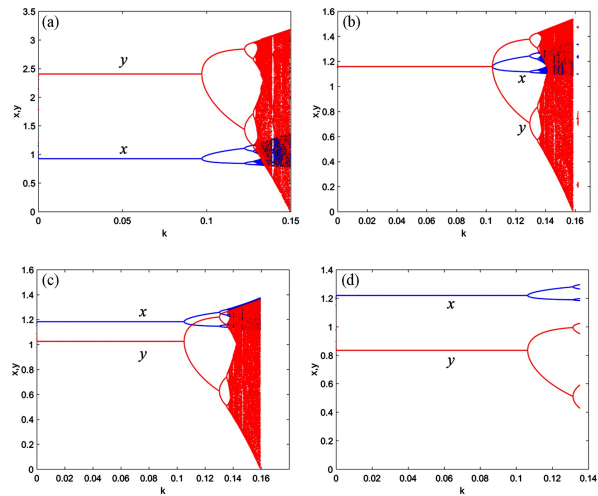


图 5 系统随  $k$  变化的全局分岔图,其中,  $c_1=5, c_2$  分别为 1、5、6 及 8

Fig.5 Global bifurcation diagrams with different  $k$  when  $c_1=5$  and  $c_2=1, 5, 6, 8$ , respectively

从图 6 可以看出系统对初值具有敏感依赖性.图 6(a) 是初值  $(x_0, y_0) = (5, 5)$  时企业 2 的产量随时间变化的图;图 6(b) 是初值  $(x_0, y_0) = (5, 5.001)$  时企业 2 的产量随时间变化的图.显然当初值有微小变动时,产量随时间有剧烈的波动,将来的产量对当前时期产量的变化具有极强的敏感性.当企业处于这种状态的市场中时,决策者很难对未来市场的变化做出准确判断,这意味着市场具有极为有限



的可预测性.

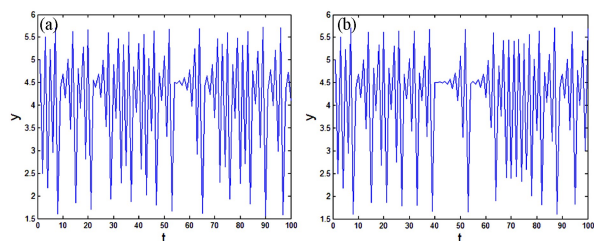


图6 在不同初值下  $y$  产量随时间变化图

Fig.6 Time paths of output  $y$  with different initial values

通过以上分析可以看出,对于具有有限理性的两家企业的博弈,Nash 均衡不仅会受到不同决策的影响,还会受到它们成本函数差异性的影响.在图1 Nash 均衡关于参数  $k, c_1$  的稳定域中,当企业2的调整速度  $k$  和企业1的成本函数的系数  $c_1$  选取在稳定域中时,双方博弈的结果最终会趋向 Nash 均衡;但如果穿过临界曲线就会发生 flip 分岔,Nash 均衡点就会变得不稳定,系统会出现混沌等现象.只要混沌发生,那么博弈双方的微小变动都会引起强烈反应,市场也就变得不可预测,这对博弈双方都是不利的.

## 4 结论

本文分析了一个动态的古诺双寡头模型,两家具有限理性的企业,都对竞争者下一时期的产出有简单预期,根据不同的行为决策决定自身的产出.其中一个企业通过采用最佳回应决策,把使得当前利润达到最大的产出作为下一时期的产出,而另一个企业则是根据梯度调整,通过其边际利润函数的符号来决定下一时期产出的变化.系统具有线性逆需求函数和二次成本函数.在给定的成本参数下,把企业2的调整参数视为分岔参数来研究系统的局部动力学.通过增加该调整参数,分析系统在唯一的 Cournot-Nash 平衡点周围的动态行为演变,在一般情况下,系统朝向不稳定或内生周期性运动状态演变.然而,这类局部分岔是否出现在平衡点,以及从这种分岔中产生的长期动力学行为都受到两家企业成本函数异质性的影响.足够相似的单位可变成本与一个 flip 分岔场景是相容的.调整速度的变化除了产生不稳定的平衡点,还可能会导致出现混沌吸引子等更复杂的动力学现象.这些复杂现象与该系统的分段光滑性质直接相关.

## 参考文献

- 1 Ma J, Pu X. The research on Cournot-Bertrand duopoly model with heterogeneous goods and its complex characteristics. *Nonlinear Dynamics*, 2013, 72(4): 895~903
- 2 Naimzada A K, Sbragia L. Oligopoly games with nonlinear demand and cost functions: Two boundedly rational adjustment processes. *Chaos Solitons & Fractal*, 2006, 29(3): 707~722
- 3 Du J G, Huang T. New results on stable region of Nash equilibrium of output game model. *Applied Mathematics and Computation*, 2007, 192(1): 12~19
- 4 Zhang J, Da Q, Wang Y. The dynamics of Bertrand mode with bounded rationality. *Chaos Solitons & Fractal*, 2009, 39(5): 2048~2055
- 5 Natascia A, Roberto D, Franco N. Bifurcation analysis of a dynamic duopoly model with heterogeneous costs and behavioural rules. *Mathematics and Computers in Simulation*, 2009, 79: 3179~3196
- 6 张骥骧, 达庆利. 双寡头不同理性博弈模型分析. 东南大学学报, 2006, 36(6): 1029~1033 (Zhang J X, Da Q L. Analysis of duopoly game with different rationality in oligopoly market. *Journal of Southeast University*, 2006, 36(6): 1029~1033 (in Chinese))
- 7 任娟, 董文波, 杜建国. 一类差异决策规则的双寡头产量博弈模型分析. 统计与决策, 2014, 21(417): 43~45 (Ren J, Dong W B, Du J G. Analysis of duopoly output game model based on a class of difference decision rules. *Statistics and Decision*, 2014, 21(417): 43~45 (in Chinese))
- 8 凯歌, 张伟. 一类非线性金融系统的数值研究. 动力学与控制学报, 2016, 14(5): 407~411 (Kai G, Zhang W. Numerical study of a class of nonlinear financial system. *Journal of Dynamics and Control*, 2016, 14(5): 407~411 (in Chinese))
- 9 王晶园, 吕静, 李想. 一类金融系统的分岔分析与混沌. 动力学与控制学报, 2016, 14(6): 508~512 (Wang J N, Lv J, Li X. Bifurcation and chaos of a financial. *Journal of Dynamics and Control*, 2016, 14(6): 508~512 (in Chinese))
- 10 Kebriaei H, Rahimi-Kian A. On the stability of quadratic dynamics in discrete time n-player Cournot games. *Automatica*, 2012, 48(6): 1182~1189
- 11 Elsadany A A. Competition analysis of a triopoly game

with bounded rationality. <i>Chaos Solitons &amp; Fractal</i> , 2012, 45(11):1343~1348	rium for a heterogeneous duopoly of differentiated products. <i>Cybernetics &amp; Systems Analysis</i> , 2010, 46(1):25~33
12 Gorbachuk V M. Cournot-Nash and Bertrand-Nash equilib-	

ANALYSIS OF COURNOT DUOPOLY MODEL  
WITH DIFFERENT DECISION RULES\*

Cao Yinxia<sup>†</sup> Zhou Wei Yang Qiong

(School of Mathematics and Physics, Lanzhou Jiaotong University, Lanzhou 730070, China)

**Abstract** This paper is based on the quantity competition for two heterogeneous and bounded rational firms in the oligopoly market. A nonlinear dynamic Cournot duopoly model is constructed in discrete time, and the existence and stability of the boundary equilibrium point and the Cournot-Nash equilibrium are analyzed. The stability region of the Cournot-Nash equilibrium is given. Numerical simulation and bifurcation diagrams are used to study the complex dynamic behaviour of the system with the varying parameters chosen in the parameter space. It is conclude that the Cournot-Nash equilibrium loses its stability, and the chaotic attractor or other complex dynamic behaviours arise when the speed of adjustment is too high. Furthermore, a tiny variation of the initial conditions causes the drastic fluctuations in the output. The heterogeneous cost function of the system also gives rise to different bifurcation at the same time.

**Key words** Cournot model, heterogeneity of firms, chaos, bifurcation

Received 25 July 2017, revised 14 March 2018.  
\* The project supported by the National Natural Science Foundation of China(61364001), the youth Science Research Foundation of Lanzhou Jiaotong University(2015029), the Research Fund of Higher Education of Gansu Province (2015B-047).  
<sup>†</sup> Corresponding author E-mail:1157849407@qq.com