

# 离散混沌网络系统中共同噪声诱导同步的条件<sup>\*</sup>

刘田 杨晓丽<sup>†</sup>

(陕西师范大学 数学与信息科学学院, 西安 710062)

**摘要** 噪声普遍存在于各种真实系统和人造系统中, 它对系统的同步动力学具有多重影响. 本文探索外部噪声对高维离散复杂网络系统同步行为的积极作用. 首先构建外部共同噪声驱动下两个参数相同、未耦合的离散混沌网络模型, 然后利用 Birkhoff 遍历定理与矩阵论等相关理论, 严格证明了噪声诱导两个离散混沌网络系统取得同步的充分条件, 进一步借助于具体的混沌网络模型, 利用数值仿真验证了理论分析的有效性. 数值模拟的结果表明当网络模型参数满足理论分析的充分条件时, 共同噪声可以诱导两个参数相同、未耦合的离散混沌网络在随机意义下取得同步, 而且同步效果不依赖于复杂网络拓扑结构的选取.

**关键词** 离散网络, 噪声, 网络同步

DOI: 10.6052/1672-6553-2018-013

## 引言

同步是自然科学、社会科学及工程技术领域普遍存在的现象<sup>[1,2]</sup>. 对同步现象的最早阐述可以追溯到 1965 年荷兰研究者 Huygens 对悬挂在横梁上两个钟摆同步摆动的描述<sup>[3]</sup>. 1990 年, Pecora 和 Carroll 开创性地提出混沌同步的变量替代方案<sup>[4]</sup>, 这引起不同领域的科学家对混沌同步的深入研究. 到 20 世纪末, 随着复杂网络的兴起<sup>[5-9]</sup>, 众多耦合振子的同步动力学更是激发了研究人员的极大兴趣. 无论是网络内不同节点之间的同步<sup>[10-13]</sup>、还是网络之间的同步都得到广泛研究<sup>[14-17]</sup>. 随着研究的不断扩展, 各种同步类型不断涌现, 如完全同步、广义同步、相位同步、滞后同步、超前同步、投影同步和测度同步等. 同时, 实现同步的方案也不断提出, 包括反馈控制、自适应控制、脉冲控制、模糊控制和噪声诱导的同步等.

众所周知, 噪声普遍存在于各种真实系统和人造系统中, 因此研究噪声环境下系统的同步动力学具有重要意义<sup>[18-21]</sup>. 早在 1967 年 Stratonovich<sup>[21]</sup>探讨噪声理论时, 就揭示了噪声和耦合对耦合极限环振子同步的协同调节作用. 近年来, 噪声环境下耦合的低维混沌系统、耦合网络系统中不同类型的同

步现象得到研究. Lin 等<sup>[22]</sup>利用随机时滞微分方程的 Lasalle 不变原理, 研究了噪声摄动下两个单向耦合的 Chua 电路完全同步的充分条件, Xiao 等<sup>[23]</sup>进一步研究了噪声对两个双向耦合混沌振子完全同步的作用; 关新平等<sup>[24]</sup>利用状态观测器思想, 研究了随机扰动下混沌系统的完全同步; Sun 等<sup>[25]</sup>设计了基于白噪声的反馈控制, 使得两个单向时滞耦合的混沌振子实现滞后同步, 且控制策略对系统参数不匹配具有鲁棒性. Yang<sup>[26]</sup>研究了有界噪声对双向耦合混沌系统相位同步的影响, 发现存在一个最优的噪声强度使得系统的相位同步程度达到最大. Guan 等<sup>[27]</sup>利用相空间分析法, 发现白噪声对驱动-响应系统的广义同步可以起到加强或诱导作用, 也可能起到破坏作用. 对于噪声摄动下耦合的网络系统, Sun 等<sup>[28]</sup>探讨了两个单向耦合的网络取得完全同步的条件, Cao<sup>[29]</sup>等与 Sun<sup>[30]</sup>等通过设计非线性控制方案, 进一步研究了耦合网络的广义同步, 张丽等<sup>[31]</sup>证明了在合理的控制器作用下, 噪声摄动下的驱动网络和响应网络在几乎必然渐近稳定性意义下能够取得广义投影滞后同步, Yang 等<sup>[32]</sup>通过设计自适应-脉冲控制器和更新规则, 从理论上证明了噪声扰动下两个单向耦合网络能够在均方意义下达到完全同步.

2017-08-15 收到第 1 稿, 2017-09-14 收到修改稿.

\* 国家自然科学基金资助项目(11572180), 中央高校基本科研业务费专项资金资助项目(GK201602009)

† 通讯作者 E-mail: yangxiaoli@snnu.edu.cn

以上分析表明,噪声环境下耦合系统之间能够呈现丰富的同步动力学现象.同时,研究者还发现对于未耦合的混沌系统,外部共同噪声对同步行为具有积极的诱导作用.1994年Mritan和Banavar<sup>[33]</sup>提出均匀分布的随机噪声能够使得两个独立、参数完全相同的混沌映射达到完全同步,即共同噪声诱导的同步现象.由于混沌系统对初始条件的极端敏感性,这一观点在当时引起极大质疑<sup>[34-38]</sup>.例如,文献[37]认为噪声诱导的同步只是由于计算机的有限计算精度造成,Herzel和Freund<sup>[38]</sup>认为噪声的非零均值驱使系统的动力学行为呈现出有序性,Zhou等<sup>[36]</sup>阐述了噪声诱导完全同步的内在动力学机理,揭示了噪声诱导完全同步的关键因素是噪声对系统收缩域的影响较对扩张域明显.之后,关于共同噪声诱导同步的研究得到了国内外学者的进一步研究.Yoshimura等<sup>[39]</sup>研究了极限环振子和混沌系统中色噪声诱导的同步现象,讨论了噪声衰减率与诱导同步的噪声强度临界值的关系.Yang等<sup>[40]</sup>研究了有界噪声对非自治动力系统完全同步的作用.试验表明激光系统、神经网络和生态系统中等也存在噪声诱导同步的现象<sup>[41-43]</sup>.当系统含有小参数失调时,文献[36]表明白噪声能够诱导两个未耦合的混沌系统取得相位同步.文献[44]讨论了标量连续时滞系统中共同噪声诱导同步的条件和类型,文献[45]给出了一维离散系统中共同噪声诱导同步发生的条件和类型.

可见,关于共同噪声诱导同步的研究已经取得了一些成果,然而,已有的研究对象主要集中于低维的微分连续系统和低维的离散系统,且研究方法多以数值模拟为主.因而,很有必要深入探讨共同噪声诱导同步的解析条件,并讨论高维系统中共同噪声能否诱导同步现象.鉴于此,本文通过构建具有混沌行为的离散复杂网络模型,通过理论分析,探讨共同噪声诱导两个独立、参数完全相同的离散复杂网络取得同步的解析条件,并利用数值模拟验证理论推导的有效性.

## 1 网络模型构建

本部分构建共同噪声诱导离散网络同步的理论框架.考虑外部共同噪声驱动下两个参数相同、未耦合的离散网络系统,其动力学方程如下:

$$x_i(n+1) = (1-\varepsilon)f(x_i(n)) + \frac{\varepsilon}{N} \sum_{j=1}^N b_{ij}f(x_j(n)) + \sigma\xi_i(n) \quad (1)$$

$$y_i(n+1) = (1-\varepsilon)f(y_i(n)) + \frac{\varepsilon}{N} \sum_{j=1}^N b_{ij}f(y_j(n)) + \sigma\xi_i(n) \quad (2)$$

其中,  $n$  为离散化时间,  $i (1 \leq i \leq N)$  为空间离散点坐标,  $x_i(n)$  与  $y_i(n)$  分别表示网络(1)与网络(2)的节点  $i$  在时刻  $n$  的状态变量,  $f(x)$  为有界函数,  $0 < \varepsilon < 1$  表示耦合强度,  $\mathbf{B} = (b_{ij})_{N \times N}$  代表网络的连接矩阵,  $b_{ij}$  定义如下: 如果节点  $i$  与节点  $j$  之间有连接, 那么,  $b_{ij} = 1 (i \neq j, i, j = 1, 2, \dots, N)$ , 反之,  $b_{ij} = 0$ , 且  $b_{ii} = 0$ .  $\xi_i(n)$  为高斯白噪声, 其统计特性满足  $\langle \xi_i(n) \rangle = 0$ ,  $\langle \xi_i(n) \xi_j(n') \rangle = \delta_{ij} \delta(n-n')$ .

## 2 理论分析

针对第1部分构建的网络模型, 在合适的条件下, 网络系统(1)和网络系统(2)在共同噪声驱动下, 从不同初始条件出发的解的轨道将趋于一致, 即存在一个常数  $\delta > 0$ , 当网络系统(1)与(2)的初始条件满足  $|x_i(0) - y_i(0)| < \delta, i = 1, 2, \dots, N$  时, 有  $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_i(n) - y_i(n)| = 0$  (almost sure) 成立, 从而两个离散网络系统出现共同噪声诱导的同步现象. 接下来, 我们以定理形式给出共同噪声诱导离散网络(1)与(2)出现同步的条件.

**定理1** 对于共同噪声驱动下离散网络系统(1)与(2), 如果网络模型满足以下四个条件:

$$(1) \lambda_B \geq 0, \lambda_{BB} \geq 0,$$

(2) 在  $x(n)$  的取值范围内有

$$H(x) = (1-\varepsilon)^2 f^2(x) + \frac{2\varepsilon(1-\varepsilon)f^2(x)}{N} \lambda_B +$$

$$\frac{\varepsilon^2 f^2(x)}{N^2} \lambda_{BB} - 1 \geq 0,$$

$$(3) (1-\varepsilon)^2 + \frac{2\varepsilon(1-\varepsilon)}{N} \lambda_B + \frac{\varepsilon^2}{N^2} \lambda_{BB} \leq 1,$$

$$(4) \langle f^2(x) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f^2(x) P(x, \sigma) dx < 1.$$

其中,  $\lambda_B$  与  $\lambda_{BB}$  分别表示矩阵  $\mathbf{B}$  和  $\mathbf{B} \times \mathbf{B}$  的最大特征值,  $x(n)$  表示第  $n$  时刻使  $f^2(x_i(n))$ , ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) 达到最大的  $x_i(n)$ , 则离散网络(1)与离散网络(2)发生共同噪声诱导的同步现象.

证明: 定义离散网络系统(1)与(2)的状态误差变量

$$e_i(n) = x_i(n) - y_i(n) (i = 1, 2, \dots, N) \quad (3)$$

则误差系统可以表示为

$$e_i(n+1) = (1-\varepsilon)(f(x_i(n)) - f(y_i(n))) +$$

$$\frac{\varepsilon}{N} \sum_{j=1}^N b_{ij}(f(x_j(n)) - f(y_j(n))) \quad (4)$$

将误差系统(4)在  $x_i(n)$  进行线性化, 得到

$$\begin{aligned} e_i(n+1) &= (1-\varepsilon)f'(x_i(n))e_i(n) + \\ &\quad \frac{\varepsilon}{N} \sum_{j=1}^N b_{ij}f'(x_j(n))e_j(n) \end{aligned} \quad (5)$$

引入如下正定函数

$$V(n) = \sum_{i=1}^N e_i^2(n) \quad (6)$$

该正定函数沿着线性化系统(5)的差分为

$$\begin{aligned} \Delta V(n) &= V(n+1) - V(n) \\ &= \sum_{i=1}^N (1-\varepsilon)^2 f'^2(x_i(n)) e_i^2(n) + \\ &\quad \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{2\varepsilon(1-\varepsilon)}{N} b_{ij} f'(x_i(n)) \cdot \\ &\quad f'(x_j(n)) e_i(n) e_j(n) + \\ &\quad \sum_{i=1}^N \left( \frac{\varepsilon}{N} \sum_{j=1}^N b_{ij} f'(x_j(n)) e_j(n) \right) \cdot \\ &\quad \left( \frac{\varepsilon}{N} \sum_{j=1}^N b_{ij} f'(x_j(n)) e_j(n) \right) - \\ &\quad \sum_{i=1}^N e_i^2(n) \end{aligned} \quad (7)$$

记  $\mathbf{F} = [f'(x_1(n))e_1(n), f'(x_2(n))e_2(n), \dots, f'(x_N(n))e_N(n)]^T$ , 若以  $\lambda_B$  与  $\lambda_{BB}$  分别表示矩阵  $\mathbf{B}$  和  $\mathbf{B} \times \mathbf{B}$  的最大特征值, 则上式可以改写为

$$\begin{aligned} \Delta V(n) &= \sum_{i=1}^N (1-\varepsilon)^2 f'^2(x_i(n)) e_i^2(n) + \\ &\quad \mathbf{F}^T \left( \frac{2\varepsilon(1-\varepsilon)}{N} \mathbf{B} \right) \mathbf{F} + \frac{\varepsilon^2}{N^2} \mathbf{F}^T \mathbf{B} \mathbf{B}^T \mathbf{F} - \sum_{i=1}^N e_i^2(n) \\ &\leq \sum_{i=1}^N [(1-\varepsilon)^2 f'^2(x_i(n)) - 1] e_i^2(n) + \\ &\quad \frac{2\varepsilon(1-\varepsilon)}{N} \lambda_B \sum_{i=1}^N f'^2(x_i(n)) e_i^2(n) + \\ &\quad \frac{\varepsilon^2}{N^2} \lambda_{BB} \sum_{i=1}^N f'^2(x_i(n)) e_i^2(n) \end{aligned} \quad (8)$$

若以  $x(n)$  表示第  $n$  时刻使得  $f'^2(x(n))$  达到最大的  $x_i(n)$ , 由条件(1)进一步可以得到

$$\begin{aligned} \Delta V(n) &< [((1-\varepsilon)^2 f'^2(x(n)) - 1) + \\ &\quad \frac{2\varepsilon(1-\varepsilon)f'^2(x(n))}{N} \lambda_B + \\ &\quad \frac{\varepsilon^2 f'^2(x(n))}{N^2} \lambda_{BB}] \mathbf{e}^T \mathbf{e} \end{aligned} \quad (9)$$

其中,  $\mathbf{e}(n) = [e_1(n), e_2(n), \dots, e_N(n)]^T$ .

又因为

$$\begin{aligned} \lambda &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} (\ln(V(n+1)) - \ln V(1)) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \ln(1 + \frac{\Delta V(j)}{V(j)}) \\ &< \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \ln[(1-\varepsilon)^2 f'^2(x(j)) + \\ &\quad \frac{2\varepsilon(1-\varepsilon)f'^2(x(j))}{N} \lambda_B + \frac{\varepsilon^2 f'^2(x(j))}{N^2} \lambda_{BB}] \end{aligned} \quad (10)$$

设  $x(n)$  的概率密度函数为  $P(x, \sigma)$ , 根据 Birkhoff 遍历定理及条件(2), 可以得到

$$\begin{aligned} \lambda &= \int_{-\infty}^{+\infty} \ln[(1-\varepsilon)^2 f'^2(x) + \frac{2\varepsilon(1-\varepsilon)f'^2(x)}{N} \lambda_B + \\ &\quad \frac{\varepsilon^2 f'^2(x)}{N^2} \lambda_{BB}] P(x, \sigma) dx \\ &< \int_{-\infty}^{+\infty} [(1-\varepsilon)^2 f'^2(x) + \frac{2\varepsilon(1-\varepsilon)f'^2(x)}{N} \lambda_B + \\ &\quad \frac{\varepsilon^2 f'^2(x)}{N^2} \lambda_{BB} - 1] P(x, \sigma) dx \\ &= [(1-\varepsilon)^2 + \frac{2\varepsilon(1-\varepsilon)}{N} \lambda_B + \frac{\varepsilon^2}{N^2} \lambda_{BB}] \cdot \\ &\quad \int_{-\infty}^{+\infty} f'^2(x) P(x, \sigma) dx - 1 \end{aligned} \quad (11)$$

根据文献[45,46], 得知误差系统(5)零解渐近稳定的充分条件为  $\lambda < 0$ . 由条件(3)和条件(4)可以得到  $\lambda < 0$ . 综合以上分析, 当条件(1)~(4)满足时, 离散网络系统(1)和离散网络系统(2)在外部共同噪声驱动下, 能够出现共同噪声诱导的同步现象.

### 3 数值模拟

第2部分从理论上严格证明了当离散网络模型满足条件(1)~(4)时, 网络系统(1)和网络系统(2)在共同噪声驱动下, 从不同初始条件出发的解的轨道将逐渐趋于一致, 从而两个离散网络在随机意义下取得同步. 本部分进一步以具体网络模型、通过数值模拟来验证理论分析的有效性.

对于离散网络模型(1)与(2), 取  $f(x) = \exp[-\frac{(x-0.5)^2}{\omega^2}]$ ,  $\omega = 0.37$ , 显然  $f(x)$  为有界函数, 且网络的孤立节点呈现混沌行为<sup>[35]</sup>. 假设离散网络的拓扑连接结构是根据 NW 小世界网络生成<sup>[47]</sup>, 即首先产生一个节点总数为  $N$  的环状最近邻网络, 每个节点均与它左右各  $K/2$  个节点相连( $K$  是偶数), 然后以概率  $p$  在随机选取的一对节点之间加

上一条边.不失一般性,这里取  $N=25, K=2, p=0.5, \varepsilon=0.07$ .随机产生区  $[0, 1]$  间上两组不同的随机数,分别作为离散网络(1)和离散网络(2)的初始条件.当噪声强度  $\sigma=0$  时,图 1(a)刻画了离散网络(1)的时空演化曲线,图 1(b)刻画了离散网络(1)的最大 Lyapunov 指数  $\lambda_{\max}$  随参数  $\omega$  的变化曲线,可以看出当  $\omega=0.37$  时,  $\lambda_{\max}=0.453$ .因而,在无噪声驱动下,本文构建的离散网络系统具有混沌行为.

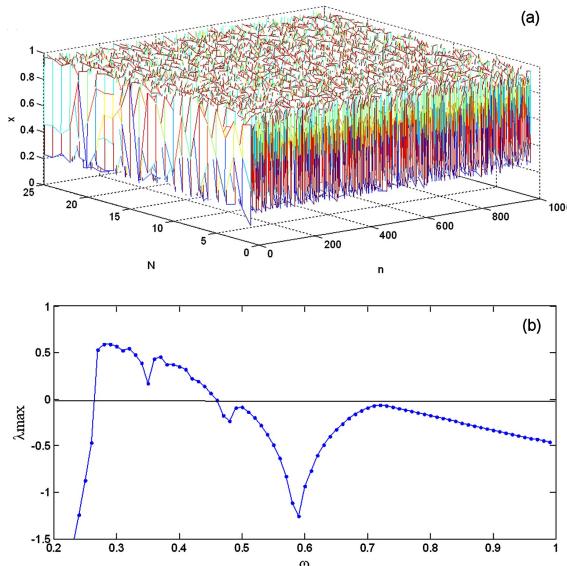


图 1 (a) 离散网络系统(1)的时空演化曲线图;

(b) 离散网络系统(1)的最大 Lyapunov 指数  $\lambda_{\max}$

随参数  $\omega$  的变化曲线

Fig.1 (a) Spatiotemporal plot of discrete network systems (1);

(b) Evaluation of the maximum Lyapunov exponent  $\lambda_{\max}$  with parameters for discrete network system (1)

在以上参数取值下,经计算  $\lambda_B=14.2219, \lambda_{BB}=202.2629, (1-\varepsilon)^2 + \frac{2\varepsilon(1-\varepsilon)}{N} \lambda_B + \frac{\varepsilon^2}{N^2} \lambda_{BB}=0.9429$ ,

显然条件(1)与(3)满足.图 2 刻画了  $\langle f^2(x) \rangle$  随噪声强度  $\sigma$  的变化曲线,不难观察到当  $\sigma>1.1$  时,有  $\langle f^2(x) \rangle>1$ ,即满足条件(4).当噪声强度  $\sigma=1.4$  时,图 3(a)模拟了  $x(n)$  的概率密度函数  $P(x, \sigma)$  的演化曲线,图 3(b)刻画了  $H(x)$  的变化曲线,由该图可以看出在  $x(n)$  的取值范围内,有  $H(x) \geq 0$ ,此时条件(2)成立.以上分析验证了离散网络模型满足定理中的条件(1)~(4).

为了定量地刻画网络系统(1)和网络系统(2)的同步效果,引进以下同步误差指标

$$E(n)=\frac{1}{h} \sum_{k=1}^h \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \|x_i(n, \omega_k) - y_i(n, \omega_k)\|^2}$$

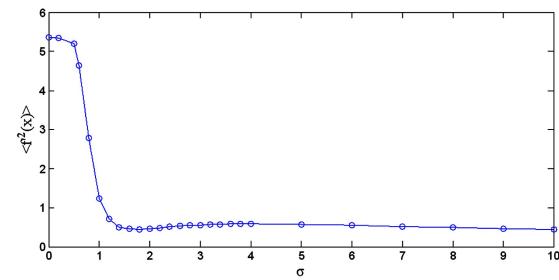


图 2  $\langle f^2(x) \rangle$  随噪声强度  $\sigma$  的变化曲线

Fig.2 Variation of  $\langle f^2(x) \rangle$  with noise intensity  $\sigma$

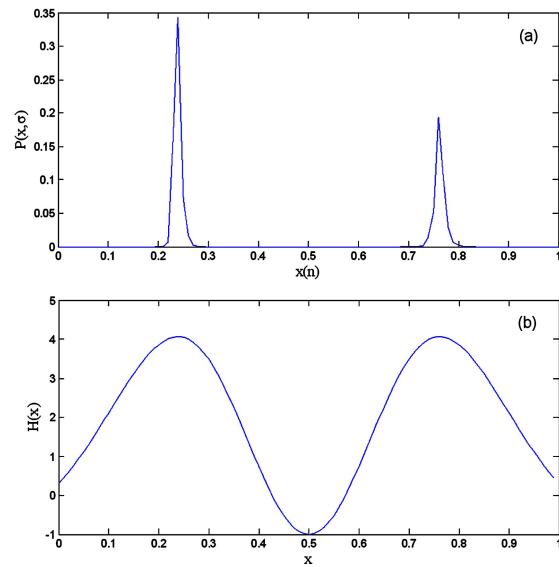


图 3 (a)  $x(n)$  的概率密度函数  $P(x, \sigma)$  的演化曲线;

(b)  $H(x)$  的变化曲线

Fig.3 (a) Evolution curve of probability density function

$P(x, \sigma)$  for  $x(n)$ ; (b) Variation curve of  $H(x)$

其中,  $\omega_k \in \Omega, x_i, y_i$  代表节点  $i$  的状态变量,  $h$  代表样本轨道,这里取  $h=15$ .图 4(a)和 4(b)分别刻画了  $\sigma=0.0$  与  $\sigma=1.4$  时,两个离散网络的同步误差指标  $E(n)$  随时间的演化曲线.可以看出,当  $\sigma=0.0$  时,如图 4(a)所示,随着时间的演化,  $E(n)$  在 0.34 附近波动而没有趋于零,说明无外部噪声驱动时,两个离散网络的动力学演化行为不同;而当噪声出现时,如图 4(b)所示,当噪声强度为  $\sigma=1.4$ ,两个离散网络的同步误差指标  $E(n)$  随时间的演化能迅速趋向于 0.可以看出:一定强度的噪声,可以使得具有不同初始条件的离散网络(1)和(2)的轨道逐渐趋于一致,从而共同噪声能够诱导两个离散网络达到同步.这与第 2 部分的理论分析结果相一致.

当  $\sigma>1.4$  时,类似于图 2 中对  $x(n)$  的概率密度函数  $P(x, \sigma)$  及  $H(x)$  的研究,数值模拟的结果表明条件  $H(x) \geq 0$  仍然成立.为了全面刻画噪声对

两个离散网络同步的影响,图5给出了两个离散网络的同步误差指标 $E(n)$ 随噪声强度和时间的演化曲面图及其投影图.不难看出:当 $\sigma>1.4$ 时,两个离散网络的同步误差指标 $E(n)$ 随时间的演化能迅速趋向于0,即共同噪声能够诱导两个离散网络达到同步,这与第2部分的理论分析结果也一致.

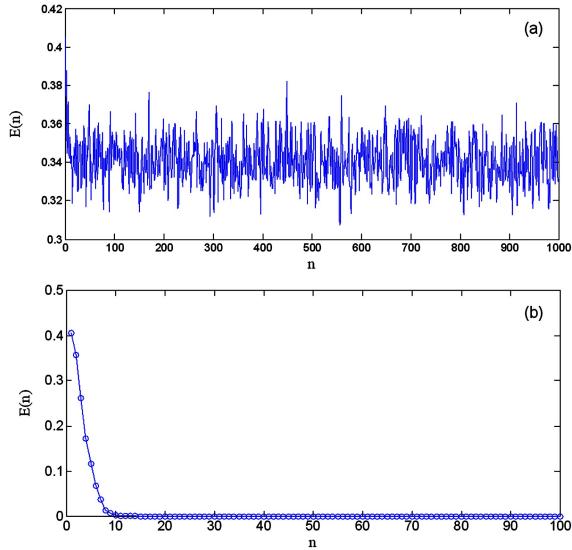


图4 两个离散网络的同步误差指标 $E(n)$ 的演化曲线

(a)  $\sigma=0.0$ ; (b)  $\sigma=1.4$

Fig.4 Evolution curve of synchronization error index  $E(n)$

for two discrete networks

(a)  $\sigma=0.0$ ; (b)  $\sigma=1.4$

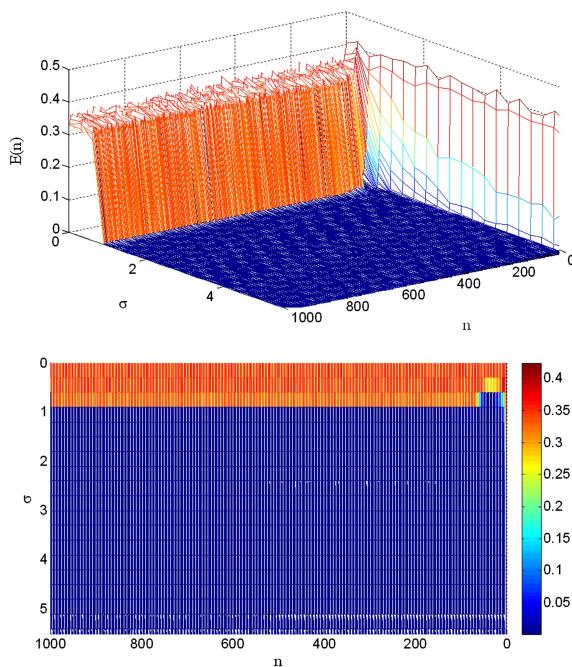


图5 同步误差指标 $E(n)$ 随噪声强度和时间的演化曲面图及其投影图

Fig.5 Variation of synchronization error index  $E(n)$  with noise intensity and time and its responding contour plot

当离散网络的连接结构发生变化时,如加边概率 $p=0.8$ ,网络模型的其它参数保持不变,此时,共同噪声仍然能够诱导离散网络(1)与(2)取得同步.经计算得 $\lambda_B=19.1258$ , $\lambda_{BB}=365.7943$ , $(1-\varepsilon)^2+2\varepsilon(1-\varepsilon)\lambda_B+\frac{\varepsilon^2}{N}\lambda_{BB}=0.9673$ ,显然满足定理中的条件(1)与(3).图6刻画了 $\langle f^2(x) \rangle$ 随噪声强度 $\sigma$ 的变化曲线,不难观察到当 $\sigma>1.1$ 时,有 $\langle f^2(x) \rangle < 1$ ,即满足条件(4).当噪声强度 $\sigma=1.5$ 时,图7(a)模拟了 $\sigma=1.5$ 时 $x(n)$ 的概率密度函数 $P(x, \sigma)$ 的演化曲线,图7(b)刻画了 $H(x)$ 的变化曲线,由该图可以看出在 $x(n)$ 的取值范围内,有 $H(x) \geq 0$ ,此时条件(2)成立.以上分析验证了当 $p=0.8$ 时离散网络模型满足定理中的条件(1)~(4).

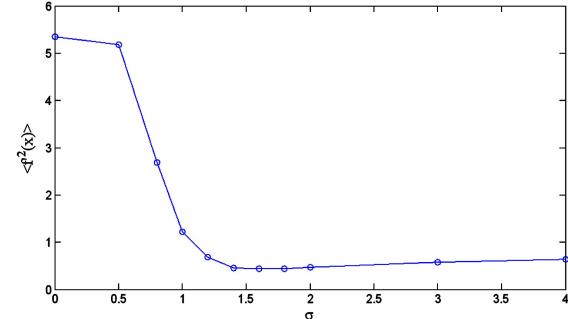


图6  $\langle f^2(x) \rangle$ 随噪声强度  $\sigma$  的变化曲线

Fig.6 Variation of  $\langle f^2(x) \rangle$  with noise intensity  $\sigma$

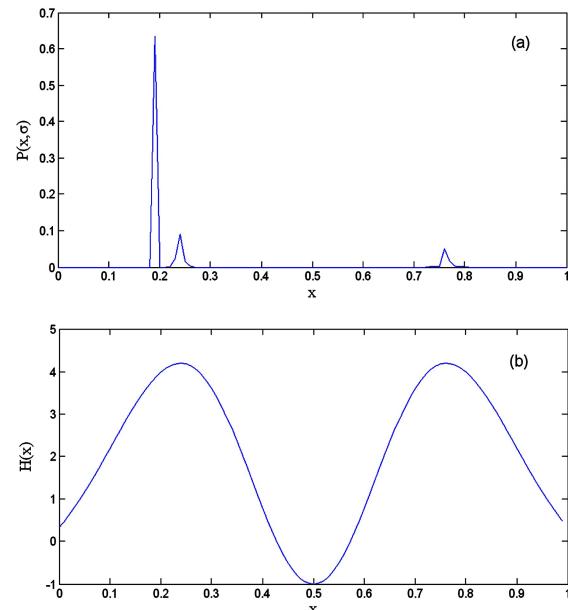


图7 (a)  $x(n)$  的概率密度函数  $P(x, \sigma)$  的演化曲线;

(b)  $H(x)$  的变化曲线

Fig.7 (a) Evolution curve of probability density function  $P(x, \sigma)$  for  $x(n)$ ; (b) Variation curve of  $H(x)$

图8(a)和8(b)分别刻画了 $\sigma=0.0$ 与 $\sigma=1.5$ 时,两个离散网络的同步误差指标 $E(n)$ 随时间的演化曲线.可以看出,当 $\sigma=0.0$ 时,随着时间的演化, $E(n)$ 在0.34附近波动而没有趋于零,而当噪声出现时,如噪声强度为 $\sigma=1.5$ ,两个离散网络的同步误差指标 $E(n)$ 随时间的演化能迅速趋向于0,从而出现共同噪声诱导两个离散网络的同步现象.图9给出两个离散网络的同步误差指标 $E(n)$ 随噪声强度和时间的演化曲面及其投影图,不难看出,当 $\sigma \geq 1.5$ 时,两个离散网络的同步误差指标 $E(n)$ 随时间的演化能迅速趋向于0,即共同噪声能够诱导两个离散网络达到同步.这些结果与第2部分的理论分析结果也相一致,同时也说明共同噪声诱导离散网络出现同步对网络连接结构的变化具有鲁棒性.进一步的研究发现,当改变网络模型(1)~(2)的其它参数时,只要条件(1)~(4)满足,离散网络(1)与离散网络(2)都可以发生共同噪声诱导同步的现象.限于篇幅,这里不再一一列举.

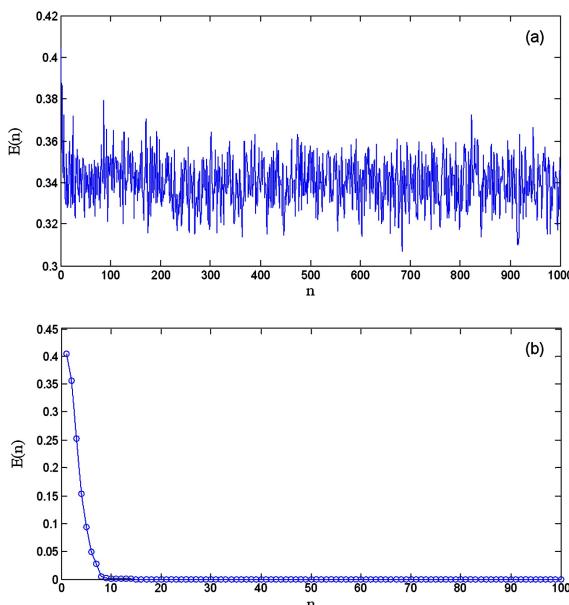


图8 同步误差指标 $E(n)$ 的演化曲线:(a) $\sigma=0.0$ ;(b) $\sigma=1.5$

Fig.8 Evolution curve of synchronization error index  $E(n)$  for two discrete networks; (a)  $\sigma=0.0$ ; (b)  $\sigma=1.5$

## 4 结论

噪声普遍存在于各种系统中,噪声与非线性的相互作用,可使得系统的动力学行为呈现一定的有序性,其中,噪声增强或诱导混沌系统的同步是典型范例之一.如引言中所述,共同噪声诱导同步的研究状况,本文提出探讨噪声对高维离散复杂网络系统

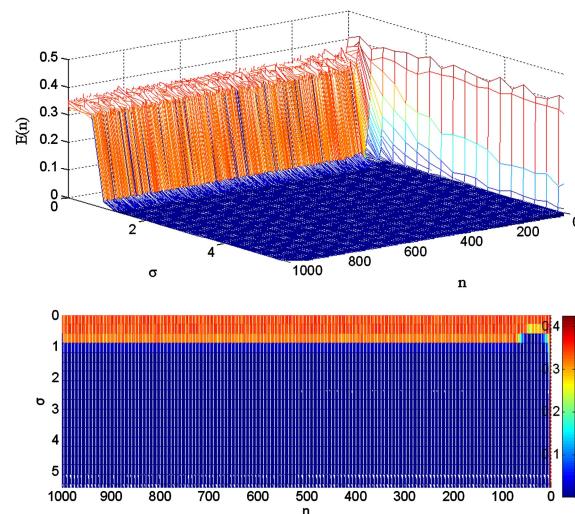


图9 同步误差指标 $E(n)$ 随噪声强度和时间的演化曲面图及其投影图

Fig.9 Variation of synchronization error index  $E(n)$  with noise intensity and time and its responding contour plot

同步的积极效应.通过构建外部共同噪声驱动下两个参数相同、未耦合的离散混沌网络模型,利用Birkhoff遍历定理与矩阵论等相关理论严格证明了噪声诱导两个离散混沌网络系统取得同步的充分条件,进一步借助于具体的混沌网络模型,利用数值仿真,从多角度证实了理论分析的有效性.数值模拟的结果表明,当网络模型参数满足理论分析的充分条件时,共同噪声可以诱导两个参数相同、未耦合的离散混沌网络在随机意义下达到同步.本文首次从理论上得到了共同噪声诱导离散混沌网络系统取得同步的解析条件,这在一定程度上丰富了噪声诱导同步的理论研究成果,同时也有助于理解噪声对高维非线性混沌系统有序动力学的积极效应.

## 参 考 文 献

- 1 Pikovsky A, Rosenblum M, Kurths J. Synchronization: A universal concept in nonlinear science. *Physics Today*, 2003, 56(1):45~45
- 2 Boccaletti S, Kurths J, Osipov G, et al. The synchronization of chaotic systems. *Physics Reports*, 2002, 366(1~2):1~101
- 3 Huygens C. Horologium oscillatorium. Paris: FMuguet, 1673
- 4 Pecora L M, Carroll T L. Synchronization in chaotic systems. *Physical Review Letters*, 1990, 64(8):821~825
- 5 Albert R, Barabási A L. Statistical mechanics of complex networks. *Reviews of Modern Physics*, 2002, 74:47~97
- 6 Newman M E J. The structure and function of complex

- network. *Siam Review*, 2003, 45(2): 167~256
- 7 Wang X F. Complex networks: topology, dynamics and synchronization. *International Journal of Bifurcation & Chaos*, 2002, 12(5): 885~916
- 8 Dorogovtsev S N, Mendes J F F. Evolution of networks. *Advances in Physics*, 2002, 51(4): 1079~1187
- 9 Barabási A L, Crandall R E. The new science of networks. *Physics Today*, 2003, 6(5): 243~270
- 10 Wu X J, Lu H T. Projective lag synchronization of the general complex dynamical. *Communications in Nonlinear Science & Numerical Simulation*, 2012, 17(11): 4417~4429
- 11 Liu H, Chen J, Lu J A, et al. Generalized synchronization in complex dynamical networks via adaptive couplings. *Physica A*, 2010, 389(8): 1759~1770
- 12 敬晓丹,吕翎. 非线性耦合完全网络的时空混沌同步. *物理学报*, 2009, 58(11): 7539~7543 (Jing X D, Lv L. The synchronization of spatiotemporal chaos of all-to-all network using nonlinear coupling. *Acta Physisca Sinica*, 2009, 58(11): 7539~7543 (in Chinese))
- 13 李岩,吕翎,栾玲. 环形加权网络的时空混沌延迟同步. *物理学报*, 2009, 58(7): 4463~4468 (Li Y, Lv L, Luan L. Lag synchronization of spatiotemporal chaos in a weighted network with ring connection. *Acta Physisca Sinica*, 2009, 58(7): 4463~4468 (in Chinese))
- 14 Li C P, Sun W G, Kurths J. Synchronization between two coupled complex networks. *Physical Review E*, 2007, 76(4 pt 2): 046204
- 15 Dai H, Jia L X, Zhang Y B. Adaptive generalized matrix projective lag synchronization between two different complex networks with non-identical nodes and different dimensions. *Chinese Physics B*, 2012, 21(12): 141~152
- 16 Chen J R, Jiao L C, Wu J S, et al. Adaptive synchronization between two different complex networks with time-varying delay coupling. *Chinese Physics Letters*, 2009, 26(6): 060505
- 17 张檬,吕翎,吕娜等. 结构与参量不确定的网络与网络之间的混沌同步. *物理学报*, 2012, 61(22): 220508 (Zhang M, Lv L, Lv N, et al. Chaos synchronization between complex networks with uncertain structures and unknown parameters. *Acta Physisca Sinica*, 2012, 61(22): 220508 (in Chinese))
- 18 方同. 工程随机振动. 北京:国防工业出版社, 1995 (Fang T. Engineering random vibration. Beijing: National Defense Industry Press, 1995 (in Chinese))
- 19 朱位秋. 非线性随机动力学与控制. 北京:科学出版社, 2003 (Zhu W Q. Nonlinear stochastic dynamics and control. Beijing: Science Press, 2003 (in Chinese))
- 20 Arnold L. Random Dynamical Systems. Berlin: Springer, 1994
- 21 Stratonovich R. Topics in the theory of random noise. New York: Gordonand Breach Science Publishers, 1963
- 22 Lin W, He Y B. Complete synchronization of the noise-perturbed Chua's circuits. *Chaos*, 2005, 15(2): 23705
- 23 Xiao Y Z, Xu W, Li X C, et al. The effect of noise on the complete synchronization of two bidirectionally coupled. *Chaos*, 2009, 19(1): 013131
- 24 关新平,范正平,彭海朋等. 对一类具有随机扰动的混沌系统同步的新方法. *电子学报*, 2001, 29(10): 1427~1429 (Guan X P, Fan Z P, Peng H P, et al. A new approach of synchronization to a class of chaotic system with random perturbation. *Acta Electronica Sinica*, 2001, 29(10): 1427~1429 (in Chinese))
- 25 Sun Z K, Yang X L. Generating and enhancing lag synchronization of chaotic systems by white noise. *Chaos*, 2011, 21(3): 033114
- 26 Yang X L, Xu W. Study on phase synchronization of stochastic chaotic system. *Chinese Physics B*, 2004, 17(6): 2004~2009
- 27 Guan S G, Lai Y C, Lai C H. Effect of noise on generalized chaotic synchronization. *Physical Review E*, 2006, 73(4): 046210
- 28 Sun Y Z, Zhao D H. Effects of noise on the outer synchronization of two unidirectionally coupled complex dynamical networks. *Chaos*, 2012, 22(2): 023131
- 29 Cao L, Ma Y. Linear generalized outer synchronization between two different complex dynamical networks with noise perturbation. *International Journal of Nonlinear Science*, 2012, 13(3): 373~379
- 30 Sun Y Z, Li W, Ruan J. Generalized outer synchronization between complex dynamical networks with time delay and noise perturbation. *Communications in Nonlinear Science*, 2013, 18(4): 989~998
- 31 张丽,杨晓丽,孙中奎. 噪声环境下时滞耦合网络的广义投影滞后同步. *物理学报*, 2013, 62(24): 240502 (Zhang L, Yang X L, Sun Z K. Generalized projective lag synchronization between delay-coupled networks under circumstance noise. *Acta Physisca Sinica*, 2013, 62(24): 240502 (in Chinese))
- 32 Yang X L, Wei T. Revealing network topology and dynamical parameters in delay-coupled complex network subjected to random noise. *Nonlinear Dynamics*, 2015, 82(1~2): 319~332
- 33 Maritan A, Banavar J R. Chaos, noise, and synchronization. *Physical Review Letters*, 1994, 72(10): 1451~1454
- 34 Shuai J W, Wong K W. Noise and synchronization in chaotic neural networks. *Physical Review E*, 1998, 57(6): 7002~7007

- 35 Toral R, Mirasso C R, Hernandez-Garcia E, et al. Analytical and numerical studies of noise-induced synchronization of chaotic systems. *Chaos*, 2001, 11(3):665~673
- 36 Zhou C S, Kurths J. Noise-induced phase synchronization and synchronization transitions in chaotic oscillators. *Physical Review Letters*, 2002, 88(23):230602
- 37 Longa L, Curado E M F, Oliveira F A. Roundoff-induced coalescence of chaotic trajectories. *Physical Review E*, 1996, 54(3):2201~2204
- 38 Herzel H, Freund J. Chaos, noise, and synchronization reconsidered. *Physical Review E*, 1995, 52(2):3328~3241
- 39 Yoshimura K, Valiusaityte I, Davis P. Synchronization induced by common colored noise in limit cycle and chaotic systems. *Physical Review E*, 2007, 75(2):026208
- 40 Yang X L, Xu W, Sun Z K. Synchronization of a chaotic particle with potential. *Physics Letters A*, 2006, 353(2):179~184
- 41 Uchida A, McAllister R, Roy R. Consistency of nonlinear system response to complex drive signals. *Physical Review Letters*, 2004, 93(24):244102
- 42 Mainen Z F, Sejnowski T J. Reliability of spike timing in neocortical neurons. *Science*, 1995, 268:1503~1505
- 43 Royama T. Analytical population dynamics. London: Chapman & Hall, 1992:695~702
- 44 Yoshimura K, Muramatsu J, Davis P. Conditions for common-noise-induced synchronization in time-delay systems. *Physica D*, 2008, 237(23):3146~3152
- 45 刘茂省. 复杂网络上的动力学模型分析及随机影响 [博士学位论文]. 上海:复旦大学, 2009 (Liu M S. Dynamic model analysis and stochastic effects in complex networks [ Ph. D Thesis ]. Shanghai: Fudan University, 2009 ( in Chinese ))
- 46 Atay F M, Jost J, Wende A. Delays, connection topology, and synchronization of coupled chaotic maps. *Physical Review Letters*, 2004, 92(14):144101
- 47 Newman M E J, Watts D J. Renormalization group analysis of the small-world network model. *Physics Letters A*, 1999, 263(4-6):341~346

## CONDITION OF COMMON NOISE INDUCED SYNCHRONIZATION IN DISCRETE CHAOTIC NETWORK SYSTEMS<sup>\*</sup>

Liu Tian Yang Xiaoli<sup>†</sup>

(College of Mathematics and Information Science, Shaanxi Normal University, Xi'an 710062, China)

**Abstract** Noise is ubiquitous in the various real and artificial systems, which plays multiple effects on synchronization of nonlinear systems. This study proposes to explore the positive influence of external common noise on the synchronous behavior of high dimensional discrete complex network. A network model of two uncoupled discrete chaotic networks with identical parameters under the excitation of external common noise is firstly constructed. By using the Birkhoff traversal theorem and the matrix theory, some sufficient conditions for synchronization of two discrete chaotic network systems are then proved. Meanwhile, by employing a specific chaotic network model, numerical simulation is used to verify the effectiveness of the theoretical analysis. The numerical results illustrate that when the parameters of network model meet the sufficient conditions for common noise induced synchronization, the two discrete chaotic networks can achieve synchronization in random sense. Moreover, the synchronization is robust against the variation of complex network topology. This paper obtains the theoretical conditions for common noise induced synchronization in the discrete chaotic networks for the first time, which not only can enrich the research of noise induced synchronization in some extent, but also can help to understand the positive effect of noise on ordered dynamics in high-dimensional nonlinear chaotic systems.

**Key words** discrete networks, noise, network synchronization

Received 15 August 2017, revised 14 September 2017.

\* The project supported by the National Natural Science Foundation of China(11572180) and the Fundamental Research Funds for the Central Universities of Ministry of Education of China(GK201602009).

† Corresponding author E-mail: yangxiaoli@snnu.edu.cn