

## 二维陀螺声子晶体结构力学研究\*

李夏临<sup>1,2†</sup> 杨晓东<sup>1,2</sup> 张伟<sup>1,2</sup>

(1.北京工业大学 机电学院,北京 100124)(2.机械结构非线性振动与强度北京市重点实验室,北京 100124)

**摘要** 首先,提出了一种二维平面陀螺声子晶体,得到了不同参数对带隙的影响.该结构由陀螺、外框架、弹簧组成.其次,在结构中只考虑由于陀螺转动引起的角运动,不考虑平移.运用角动量定理,针对该结构建立动力学方程.然后,通过动力学方程,分析其带隙特性得到色散曲面.随后,通过改变结构中的参数,观察带隙的变化,得到了不同参数对带隙的影响.最后,用数值方法验证其带隙的存在,证明了这种二维平面陀螺声子晶体能对扭转振动具有抑制作用.

**关键词** 声子晶体, 陀螺, 带隙, 振动控制

DOI: 10.6052/1672-6553-2019-043

### 引言

在当今工程实际应用中,振动会影响精密仪器设备的功能,降低加工精度和光洁度,加剧构件的疲劳和磨损,从而缩短机器和结构物的使用寿命;振动还可能引起结构的大变形破坏,有的桥梁曾因振动而坍塌,飞机机翼的颤振、机轮的抖振往往造成事故,车船和机舱的振动会劣化乘载条件,强烈的振动噪声会形成严重的公害.

刘正猷等<sup>[1]</sup>提出了另一种局域共振型声子晶体.他们将铅球用硅胶包裹,并将其置入树脂基体中.通过实验证明了这类材料中的带隙中央频率比结构晶格常数小了两个数量级,而且其带隙的机理并非布拉格散射,而是源自于局域共振结构.这类材料的带隙产生机理使得要在低频处获得带隙,不再依赖于结构尺寸.Goffaux 等<sup>[2]</sup>对刘正猷的模型进行分析,得出二维的类似声子晶体结构也存在类似的性质,同样存在局域共振引起的带隙.之后 Goffaux 等<sup>[3]</sup>将重圆柱置于方格上,并将其侵入软多聚物中,并用硬网格分开.通过对比有无方框的结构,证明了布拉格带隙对波的衰减能力要强于局域共振带隙.Liu 等<sup>[4]</sup>通过研究三组元局域共振声子晶体的等效参数,发现在这种结构带隙内有负等效密度效应.A. Khelif<sup>[5]</sup>等研究了将石英嵌入环氧树脂中的周期结构材料,通过分析嵌入柱状高度和晶

格常数的比值,确定了其对带隙带宽的影响,并且指出相同结构的三维和二维能带结构的不同.Sheng 等<sup>[6]</sup>对局域共振型声子晶体的等效介质理论进行了研究,并指出局域共振单元使得声子晶体的等效质量密度发生了重大变化,因此,在一定条件下能实现负质量密度.Sam Hyeon Lee<sup>[7]</sup>等研究了一种负模量的管结构,发现其负模量存在于在 0Hz~450Hz 的频率范围内,并在该范围内大幅度的对波有衰减作用.Huang 等<sup>[8]</sup>研究了具有负有效质量密度的局域共振型超材料的波衰减机制,从能量的角度解释了波的衰减.Liang 等<sup>[9]</sup>通过实验,对声波进行整流,将超晶格材料同非线性材料相耦合,实现了声学二极管效应.Cheng<sup>[10]</sup>等将钢管置入管道中,通过理论和数值得到该结构的色散关系,然后通过仿真验证其二极管效应.Marco Miniaci 等<sup>[11]</sup>研究了蜘蛛网状结构的声学超材料.通过对比不同的结构和结构的组成材料,分析了影响其带隙产生的因素,并且证明了这种结构中存在着由不同机理产生的带隙.Shu 等<sup>[12]</sup>研究了管状局域共振结构,同普通的柱状局域结构相比,管状结构能产生更宽范围的带隙.R. Chaunsali 等<sup>[13]</sup>研究了非线性弹性力的结构,这种结构能呈现无损耗通过和强烈衰减两种极端效果.黄飞等<sup>[14]</sup>将椭圆柱体引入二维声子晶体中,证明了声波禁带结构与填充率、椭圆柱体截面形状及旋转角度有关.

2018-11-07 收到第 1 稿,2018-12-10 收到修改稿.

\* 国家自然科学基金资助项目(11672007)

† 通讯作者 Email:dixiao914@126.com

目前,针对声子晶体的研究主要是在于提出创新性的模型,分析新模型的动力学特性.本文提出一种新型二维陀螺结构.首先,针对其动力学方程进行分析;然后,研究系统参数对带隙的影响;最后,通过数值方法验证结构对振动的控制作用,证明带隙的存在.

## 1 二维平面陀螺声子晶体

二维平面陀螺声子晶体模型如图1所示,该结构由单个陀螺和外框架组成,框架之间用弹簧连接,铺成平面网状结构.陀螺被安装在外框架上,初始状态时陀螺自转轴沿着 $z$ 轴.在该模型中假设弹簧只提供扭矩,不提供水平的拉力,所以,只考虑陀螺和框架整体的扭转角度,不考虑水平位移.框架绕 $x$ 轴的旋转角为 $\theta$ ,绕 $y$ 轴的旋转角为 $\varphi$ ,沿着坐标轴正向旋转为正.

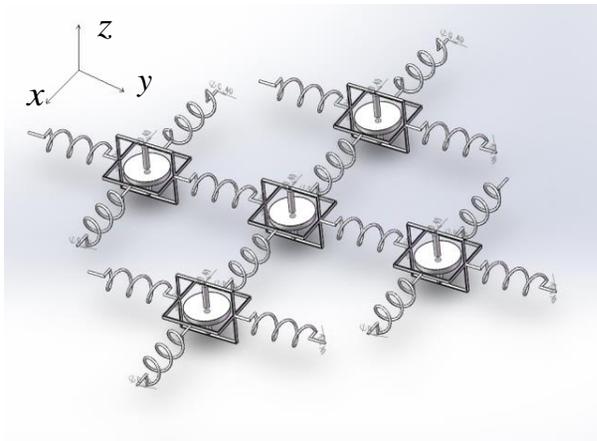


图1 二维平面陀螺声子晶体

Fig.1 2-D gyroscope phononic crystals

按照上述假设,根据角动量定理,建立该模型的动力学方程.针对第 $m$ 行(沿着 $x$ 轴方向),第 $n$ 列(沿着 $y$ 轴方向)的第 $(m,n)$ 个陀螺进行建模,如图2所示进行受力分析,得到以下两个方程,其中,绕 $x$ 轴方向的运动为:

$$I\ddot{\theta}_{m,n} = c_y(\theta_{m,n+1} - 2\theta_{m,n} + \theta_{m,n-1}) + c_x(\theta_{m+1,n} - 2\theta_{m,n} + \theta_{m-1,n}) - H\dot{\varphi}_{m,n} \quad (1)$$

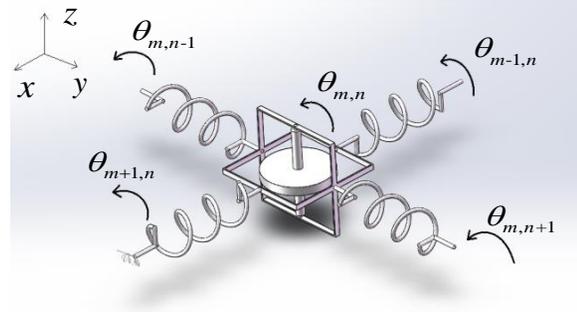
绕 $y$ 轴方向的运动为:

$$I\ddot{\varphi}_{m,n} = c_y(\varphi_{m,n+1} - 2\varphi_{m,n} + \varphi_{m,n-1}) + c_x(\varphi_{m+1,n} - 2\varphi_{m,n} + \varphi_{m-1,n}) + H\dot{\theta}_{m,n} \quad (2)$$

式中, $I$ 为陀螺绕 $x$ 轴、 $y$ 轴的转动惯量, $c_x$ 、 $c_y$ 分别为

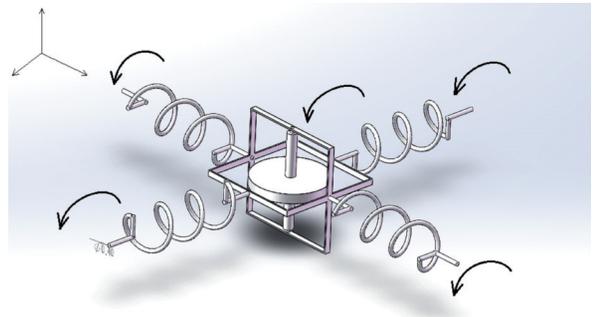
$$\begin{pmatrix} c_y e^{-i\beta b} + c_x e^{-i\alpha a} + I\omega^2 - 2c_y - 2c_x + c_x e^{i\alpha a} + c_y e^{i\beta b} & -iH\omega \\ iH\omega & c_y e^{-i\beta b} + c_x e^{-i\alpha a} + I\omega^2 - 2c_y - 2c_x + c_x e^{i\alpha a} + c_y e^{i\beta b} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

沿着 $x$ 、 $y$ 方向弹簧的扭转刚度, $H = I_z \Omega$ 为陀螺的自转角动量, $I_z$ 为陀螺绕转轴的转动惯量, $\Omega$ 为陀螺自转转速.



(a) 绕 $x$ 轴的扭转

(a) Rotating around  $x$  axis



(b) 绕 $y$ 轴的扭转

(b) Rotating around  $y$  axis

图2 陀螺的受力分析

Fig.2 Force analysis of gyroscope

利用Bloch定理,对上述方程进行求解,设解得形式如下:

$$\begin{aligned} \theta_{m,n} &= A e^{i\alpha m a} e^{i\beta n b} e^{i\omega t} \\ \varphi_{m,n} &= B e^{i\alpha m a} e^{i\beta n b} e^{i\omega t} \end{aligned} \quad (3)$$

其中, $A$ 、 $B$ 为振幅, $\alpha$ 为 $x$ 轴波数, $\beta$ 为 $y$ 轴波数, $\omega$ 为角频率, $a$ 和 $b$ 分别为 $x$ 轴和 $y$ 轴上相邻两陀螺之间的距离.

将(3)带入式(1)和(2)中,得到如下色散方程:

$$(c_y e^{-i\beta b} + c_x e^{-i\alpha a} + I\omega^2 - 2c_y - 2c_x + c_x e^{i\alpha a} + c_y e^{i\beta b})A + iH\omega B = 0 \quad (4)$$

$$iH\omega A + (c_y e^{-i\beta b} + c_x e^{-i\alpha a} + I\omega^2 - 2c_y - 2c_x + c_x e^{i\alpha a} + c_y e^{i\beta b})B = 0 \quad (5)$$

将(4)、(5)两式表达成矩阵的形式:

对下面行列式进行求解

$$\begin{vmatrix} c_y e^{-i\beta b} + c_x e^{-i\alpha a} + I\omega^2 - 2c_y - 2c_x + c_x e^{i\alpha a} + c_y e^{i\beta b} & -iH\omega \\ iH\omega & c_y e^{-i\beta b} + c_x e^{-i\alpha a} + I\omega^2 - 2c_y - 2c_x + c_x e^{i\alpha a} + c_y e^{i\beta b} \end{vmatrix} = 0 \quad (6)$$

可得色散方程

$$(c_y e^{-i\beta b} + c_x e^{-i\alpha a} + I\omega^2 - 2c_y - 2c_x + c_x e^{i\alpha a} + c_y e^{i\beta b})^2 = (\omega H)^2 \quad (7)$$

再对其进行求解得到色散关系

$$\omega_{1,2} = \frac{\pm H + \sqrt{H^2 - 8I(c_y(\cos\beta b - 1) + c_x(\cos\alpha a - 1))}}{2I} \quad (8)$$

上式中的 $\omega$ 是一个关于 $\alpha$ 和 $\beta$ 的二元函数。

## 2 带隙计算

为了解二维平面陀螺声子晶体的带隙特性,现在研究系统参数对色散曲面结构的影响.图3所示的色散曲面参数为: $a = b = 0.1, c_x = c_y = 4, I = 1, H = 1$

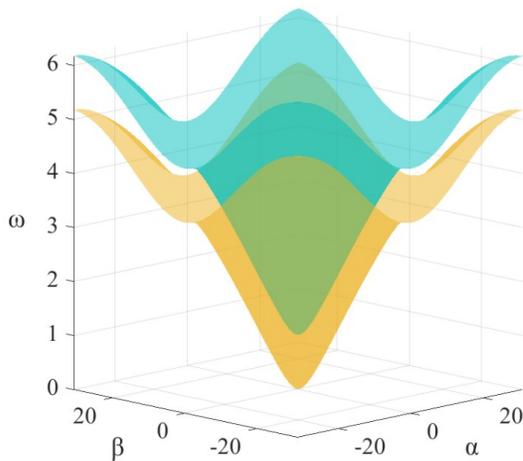
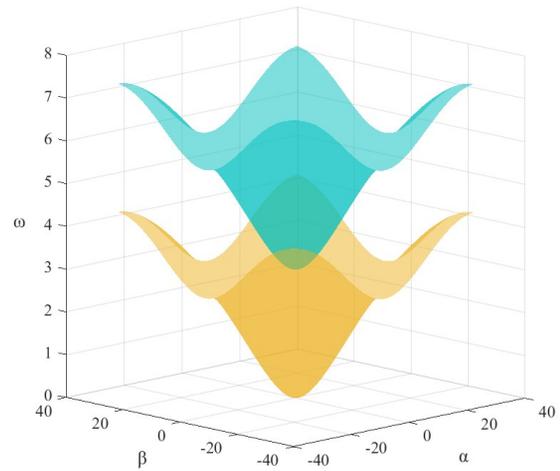


图3 色散曲面  
Fig.3 Dispersion surfaces

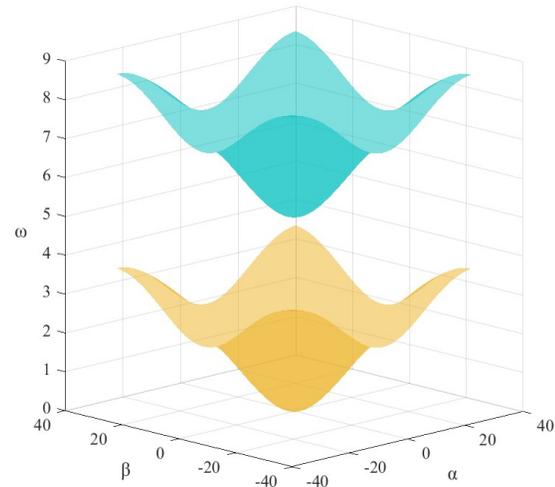
下面通过改变结构中的参数来研究带隙的变化,图4为自转角动量变化对色散曲面的影响.随着角动量 $H$ 从1增大到5,两曲面的距离随之增加,带宽明显增加.同时,上曲面频率变高,下曲面频率变小.

图5为色散曲面随着扭转刚度的变化.(a)和(b)为两个方向扭转刚度同时从1到40增大,此时曲面间距离逐渐减小,两曲面频率同时增大.

图6为色散曲面随着转动惯量的变化,转动惯量 $I$ 从0.1增加到10,两曲面的距离逐渐减小,曲面的频率也随着减小.



(a)  $H=3$



(b)  $H=5$

图4 色散曲面随自转角动量变化

Fig.4 The dispersion surfaces change with angular momentum

## 3 数值计算

基于(1)、(2)两个动力学方程所得的色散曲面图,现在通过数值计算的方法对其带隙进行验证.为求得模型的透射率,现取 $20 \times 20$ 个陀螺进行计算.首先定义透射率 $T$ (Transmittance),计算公式为:

$$T = \frac{\max(|\gamma_{20,20}|)}{\max(|\gamma_{1,1}|)} \quad (9)$$

其中, $\gamma^2 = \theta^2 + \phi^2$ 表示总的位移, $\gamma_{20,20}, \gamma_{1,1}$ 分别为第(20,20)和第(1,1)个陀螺的总位移.现假设系统参数为 $a = b = 0.1, c_x = c_y = 4, I = 1, H = 10$ ,其色散曲面结构如图7所示.

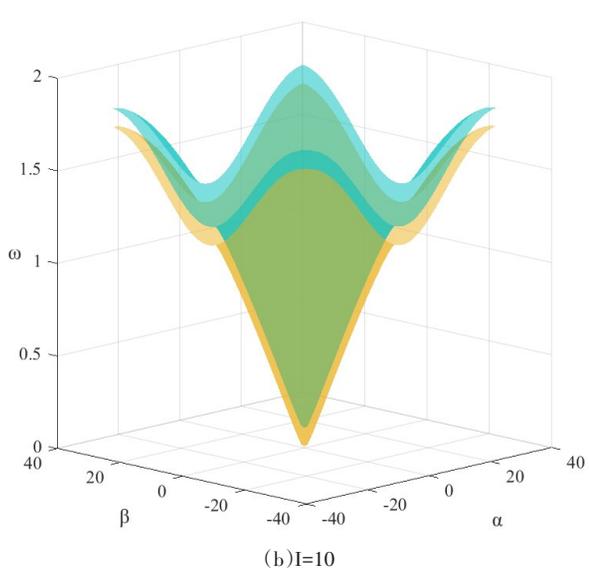
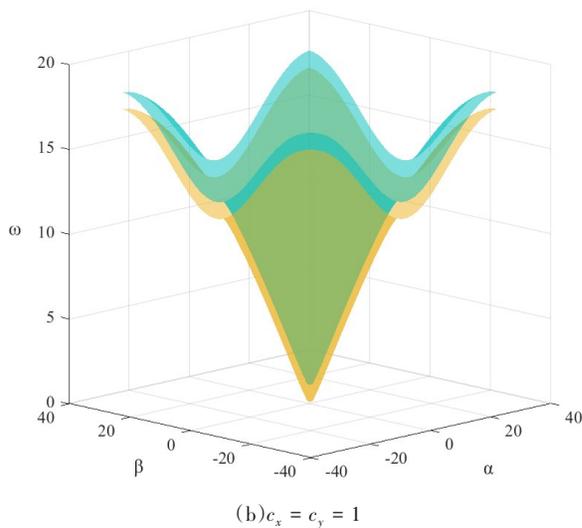
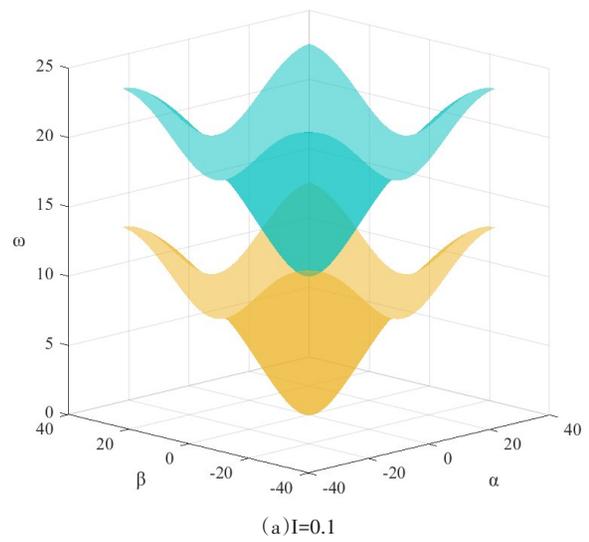
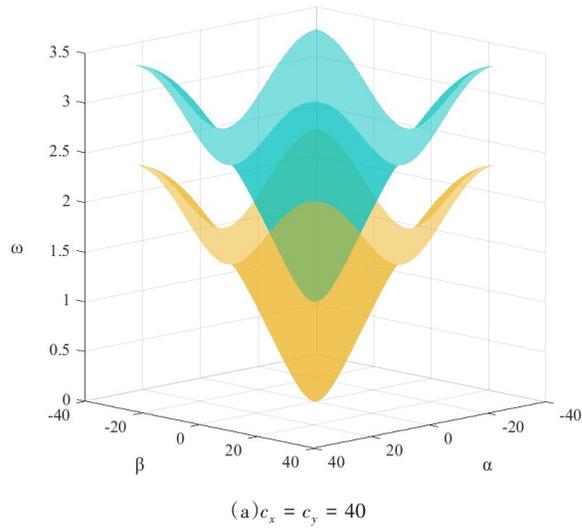


图5 色散曲面随扭转刚度的变化

Fig.5 The dispersion surfaces change with torsional stiffness

带隙频率范围为  $\omega = 2 \sim 10$ . 在第(1,1)个陀螺上作用方向绕  $x$  轴的外激励  $M = \sin(\omega t)$ , 令  $\omega$  从 0 增大到 12, 计算不同外激励频率情况下系统的  $T$  值, 并画出系统透射率图像, 计算结果如图 8 所示.

图 8 中横坐标为外激励频率  $\omega$ , 纵坐标为  $T$ . 在外激励频率为  $[2 \sim 10 \text{ rad/s}]$  时,  $T$  值跟其他频率区间相比明显略小, 表示振动受到明显抑制. 这段频率范围基本对应于图 7 中的带隙范围.

图 9 中(a), (b), (c) 三幅图对应的外激励频率分别为  $\omega = 0.8, \omega = 7, \omega = 12.1$ , 位移是在这三个外激励作用时间内的最大位移. 这三个频率分别处于图 7 中的下曲面、带隙、上曲面范围内. (a)、(c) 两幅图的运动振幅最大值基本都在 0.5 左右, (b) 中陀螺的运动最大位移只有 0.2, 整体的振动趋势明显弱于另外两种情况. 而 (b) 图的外激励频率也正好处于带隙内, 因此, 表明频率在带隙内的振动, 在

图6 色散曲面随转动惯量的变化

Fig.6 The dispersion surface change with moment of inertia

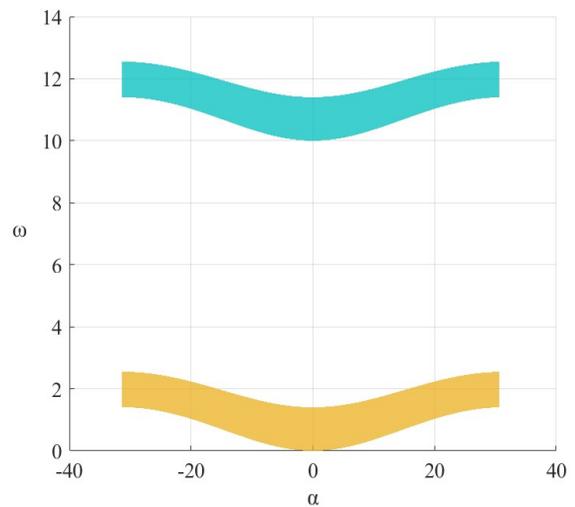


图7  $a = b = 0.1, c_x = c_y = 4, I = 1, H = 10$  时色散曲面

Fig.7 Dispersion surface with  $a = b = 0.1, c_x = c_y = 4, I = 1, H = 10$

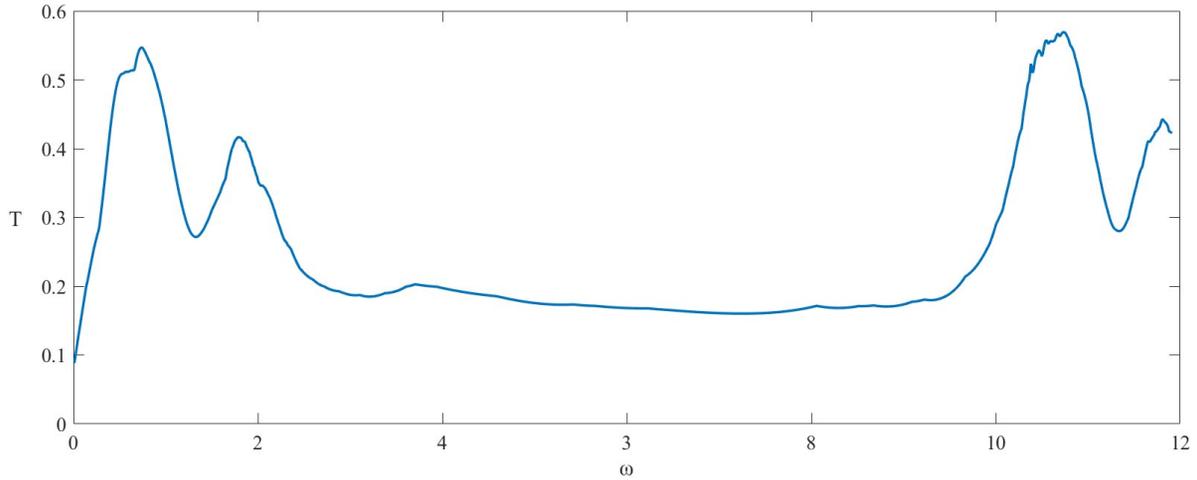


图 8  $a = b = 0.1, c_x = c_y = 4, I = 1, H = 10$  时透射率  
 Fig.8 Transmittance for  $a = b = 0.1, c_x = c_y = 4, I = 1, H = 10$

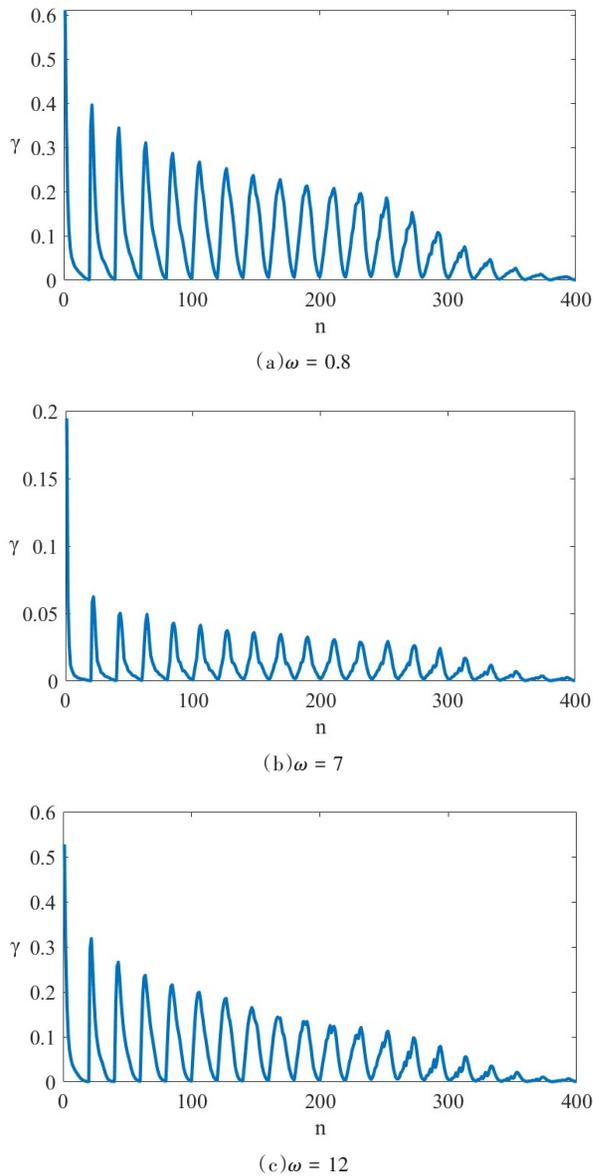


图 9 不同外激励下的陀螺位移图  
 Fig.9 Displacement of gyroscopes in different applied moment

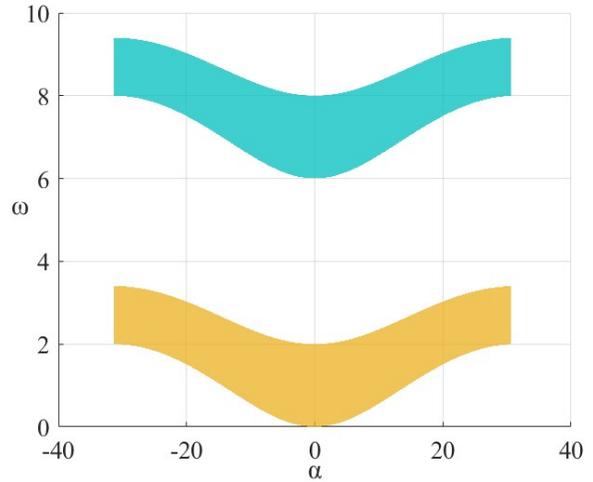


图 10  $a = b = 0.1, c_x = c_y = 4, I = 1, H = 6$  时色散曲面  
 Fig.10 Dispersion surface with  $a = b = 0.1, c_x = c_y = 4, I = 1, H = 6$

该结构中传播受到了明显的抑制。

现在固定其他参数不变,只改变角动量  $H$ ,使  $H=6$ 。根据(8)式,当  $H$  变化时两个频率的值也随之发生变化,色散曲面结构也因此发生变化,如图 10 所示,带隙频率范围变为  $[3 \sim 6 \text{rad/s}]$ 。同样使外激励频率  $\omega$  从 0 增大到 12,计算  $H=6$  时系统的透射率,结果如下:

由于自转角动量的改变,使系统的色散曲面发生了变化,从而导致了带隙范围也发生变化,因此,系统的透射率也发生变化.图中透射率处于较低值的频率范围为  $\omega = 3 \sim 6, \omega = 10 \sim 12$ 。图 12 为  $\omega=1, 5, 11$  时的陀螺位移图.图 12 中(a)图频率处于通带范围内,陀螺的位移基本在 0.05 以上,而(b),(c)频率处于带隙内,陀螺的位移基本小于 0.05。通过比较三个图的位移大小,能看频率处于带隙范围内的振动确实受到了抑制。

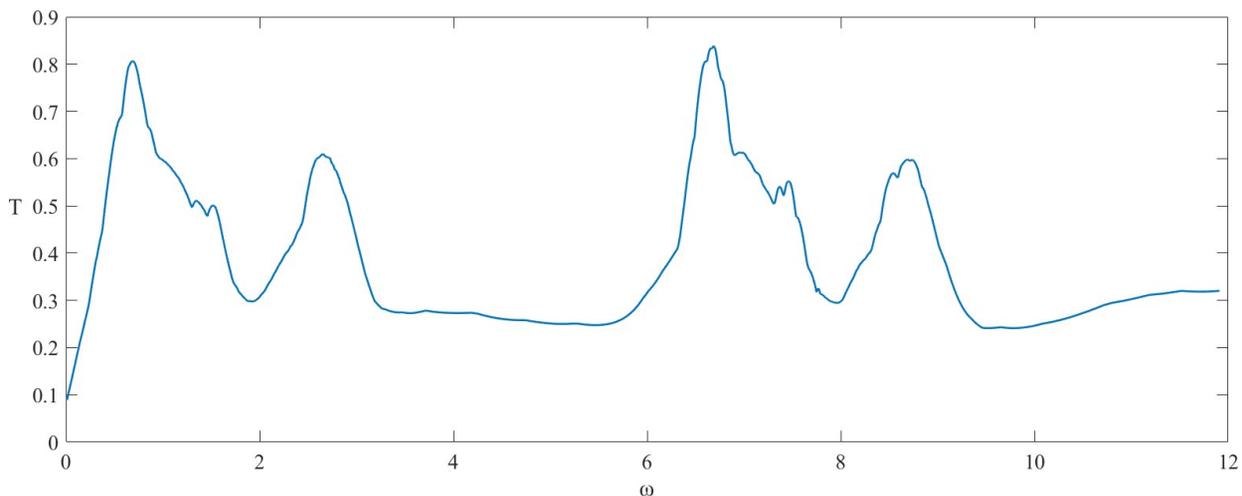


图11  $a = b = 0.1, c_x = c_y = 4, I = 1, H = 6$ 时透射率  
Fig.11 Transmittance for  $a = b = 1, c_x = c_y = 4, I = 1, H = 6$

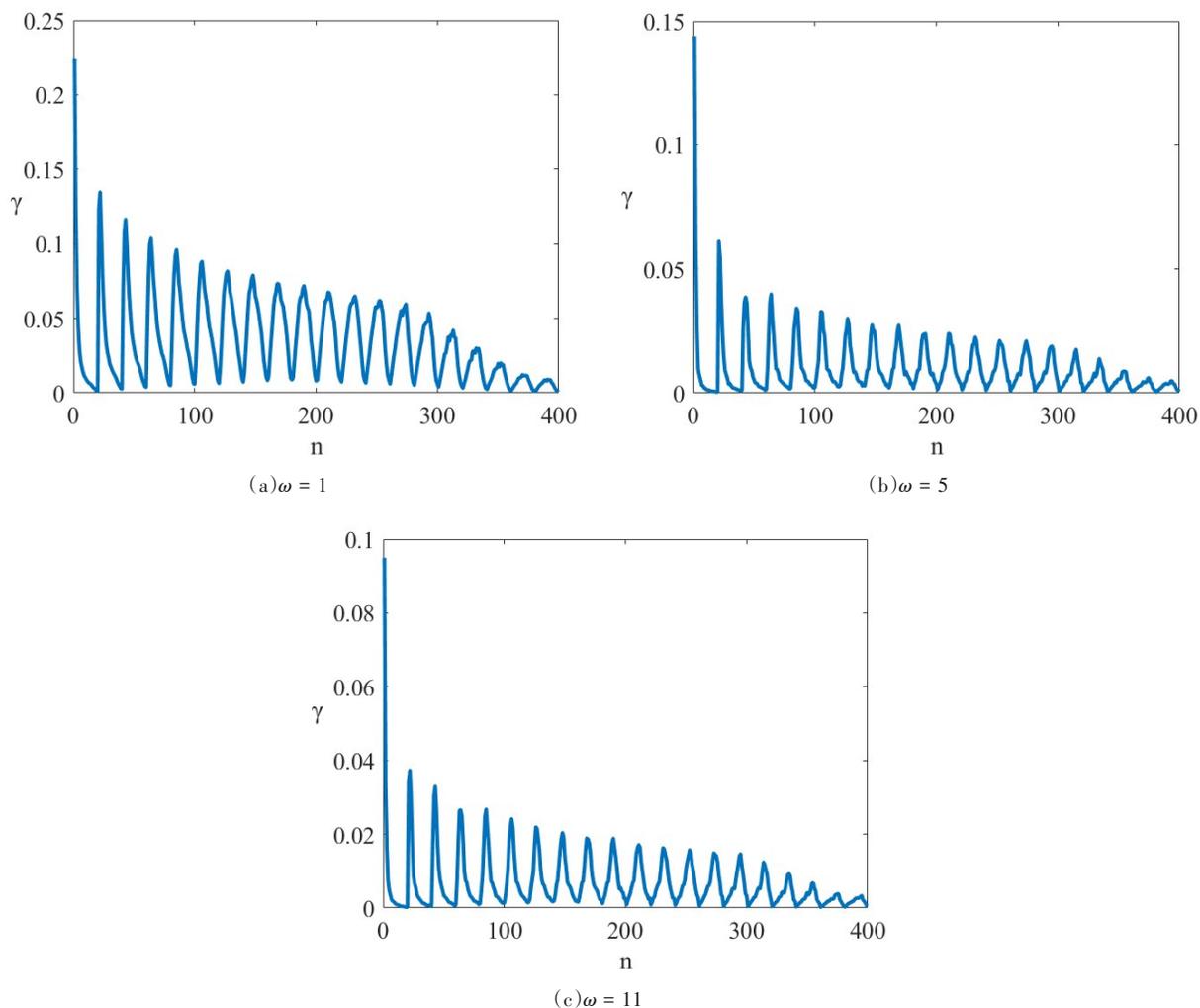


图12 不同外激励下的陀螺位移图  
Fig.12 Displacement of gyroscopes in different applied moment

### 4 结论

二维平面陀螺声子晶体的色散关系中,能够改变带隙特性的参数有 $I, H, c_x, c_y$ :当 $I$ 逐渐增大时,

上下曲面的间距逐渐减小,带隙随之减小,同时曲面所占频率范围也在降低;当 $H$ 逐渐增大时,曲面间距逐渐增大,带隙范围随之增大,此时,上曲面频率逐渐变大,下曲面频率逐渐减小; $c_x, c_y$ 都增大时,

曲面间距逐渐减小,带隙范围也逐渐减小,两张曲面的频率范围同时增大.通过数值计算分析,当振动频率处于带隙范围内时,结构对振动有着相对明显的抑制作用,而频率处于通带时,振动能够相对正常地在结构中传播.

### 参 考 文 献

- 1 Liu Z, Zhang X, Mao Y, et al. Locally resonant sonic materials. *Science*. 2000, 289(5485): 1734~1736
- 2 Goffaux C, Sánchez-Dehesa J, Yeyati A L, et al. Evidence of Fano-like interference phenomena in locally resonant materials. *Physics Review Letter*. 2002, 88(22): 225502/1~225502/4
- 3 Goffaux C, Sánchez-Dehesa J, Lambin P. Comparison of the sound attenuation efficiency of locally resonant materials and elastic band-gap structures. *Physics Review B*. 2004, 70(18): 1~6
- 4 Liu Z, Chan C T, Sheng P. Analytic model of phononic crystals with local resonances. *Physics Review B*. 2005, 71(1): 014103
- 5 Khelif A, Aoubiza B, Mohammadi S, et al. Complete band gaps in two-dimensional phononic crystal slabs. *Physics Review E*. 2006, 74(4): 046610
- 6 Sheng P, Mei J, Liu Z, et al. Dynamic mass density and acoustic metamaterials. *Physics B Condensed Matter*. 2007, 394(2): 256~261
- 7 Lee S H, Park C M, Seo Y M, et al. Acoustic metamaterial with negative density. *Physics Letter A*. 2009, 373(48): 4464~4469
- 8 Huang H H, Sun C T, Huang G L, On the negative effective mass density in acoustic metamaterials. *International Journal of Engineering Science*, 2009, 47(4): 610~617
- 9 Liang B, Guo X S, Tu J, et al. An acoustic rectifier. *Nature Materials*. 2010, 9(12): 989~992
- 10 Yuan B, Liang B, Tao J C, et al. Broadband directional acoustic waveguide with high efficiency. *Applied Physics Letter*, 2012, 101(4): 043503
- 11 Miniaci M, Krushynska A, Movchan A B, et al. Spider web-inspired acoustic metamaterials. *Applied Physics Letter*, 2016, 109(7): 071905
- 12 Shu F, Liu Y, Wu J, et al. Band gap in tubular pillar phononic crystal plate. *Ultrasonics*. 2016, 71: 172~176
- 13 Chaunsali R, Toles M, Yang J, et al. Extreme control of impulse transmission by cylinder-based nonlinear phononic crystals. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 2017, 107: 21~32
- 14 黄飞,何钊. 椭圆柱体二维液态声子晶体声波禁带的研究. *动力学与控制学报*, 2005, 3(4): 86~92 (Huang F, He Z. Acoustic band gaps for rectangular arrays of elliptical liquid cylinders. *Journal of Dynamics and Control*, 2005, 3(4): 86~92 (in Chinese))

## ANALYSIS OF DYNAMICS CHARACTERISTICS OF 2-D GYROSCOPE PHONONIC CRYSTAL \*

Li Xialin<sup>1,2†</sup> Yang Xiaodong<sup>1,2</sup> Zhang Wei<sup>1,2</sup>

(1. College of Mechanical Engineering, Beijing University of Technology, Beijing 100124, China)

(2. Beijing Key Laboratory of Nonlinear Vibrations and Strength of Mechanical Structures, Beijing University of Technology, Beijing 100124, China)

**Abstract** A two-dimensional gyroscopic phononic crystal was proposed. The unit cell of this crystal was composed of a gyroscope, an outer frame and four springs. In the unit cell, only angular motions due to gyro rotation were considered, and translations were ignored. Using the angular momentum theorem, the dynamic equation of the unit cell was established. By solving this dynamic equation, the dispersion relation was obtained and the band gap characteristic was revealed. Then, by changing the structural parameters, the variation of the band gap could be observed, and thus the influence of structural parameters on the band gap was presented. Finally, the existence of band gaps was verified by the numerical method, which showed that the 2D gyroscopic phononic crystal can effectively attenuate the torsional vibration when the frequency falls into the band gap.

**Key words** phononic crystals, gyroscope, bandgaps, vibration control

Received 7 November 2018, revised 10 December 2018.

\* The project supported by the National Natural Science Foundation of China (11672007)

† Corresponding author E-mail: dixiao914@126.com