

# 滚动轴承的刚度分析方法与试验测定\*

任红军<sup>†</sup>

(辽宁科技大学 机械工程与自动化学院, 鞍山 114051)

**摘要** 本文基于 Hertz 接触理论建立轴承零件模型, 在分析轴承零件受力的基础上, 给出了轴承内部零件相互作用的具体表达式, 分析了轴承载荷(轴向、径向、力矩载荷)对轴承接触应力和接触变形的影响, 获得了滚动轴承整体五自由度刚度矩阵的表达形式. 在滚动轴承加载试验台上, 通过测量不同载荷作用下轴承的轴向位移与径向位移, 获得了轴承的刚度特性, 与轴承刚度理论计算结果对比, 验证模型正确性.

**关键词** 滚动轴承, 刚度分析, Hertz 接触, 位移

DOI: 10.6052/1672-6553-2018-085

## 引言

滚动轴承的刚度分析是进行轴承设计与优化的基础, 对于分析滚动轴承-转子系统的动力学特性具有重要意义, 主要涉及滚动体与滚道间的弹性接触问题和轴承整体变形与平衡问题. 面向工程设计需求, 如何方便有效地确定轴承刚度十分重要.

Stribeck<sup>[1]</sup>首先通过大量试验对钢球及滚道的弹、塑性接触问题进行了研究, 确定球轴承的许用接触载荷, 给出了球轴承在径向外载荷作用下滚动体最大接触载荷的经验计算公式. Sjøvall<sup>[2]</sup>和 Lundberg<sup>[3]</sup>进行了径向、轴向载荷以及弯矩载荷的滚动轴承滚动体变形与载荷分布规律研究, 给出了滚动轴承在联合载荷作用下的套圈位移及载荷分布的计算方法. 此外, 目前有限元方法广泛应用于滚动轴承刚度分析中, 包括计算轴承刚度<sup>[4]</sup>、接触应力<sup>[5,6]</sup>、变形<sup>[7]</sup>, 有限元模型中可以考虑轴承、轴以及轴承支承结构<sup>[8,9]</sup>. 采用有限元法对轴承组件整体分析, 存在节点数量与计算精度的矛盾, 一般情况下计算量大且费时. 对于高速运行下的滚动体等零件惯性力影响, 其计算精度更不能满足.

Jones<sup>[10]</sup>假定滚动体与滚道之间的切向接触问题符合 Coulomb 摩擦定律, 并采用滚道控制理论作为滚动体的运动边界条件. Jedrzejewski 和 Kwasny<sup>[11]</sup>

考虑滚动体离心力、陀螺力矩对接触角影响, 建立角接触球轴承力学模型, 分析了离心力和陀螺力矩效应对轴承刚度及变形的影响. Noel 等<sup>[12]</sup>在 Jones 模型基础上提出五自由度角接触球轴承刚度矩阵计算方法. Yi 等<sup>[13]</sup>研究不同轴向预紧力、转速条件下角接触球轴承刚度, 并通过试验测量内圈、外圈的位移验证模型准确性. 赵春江等<sup>[14]</sup>研究高速条件下角接触球轴承钢球的陀螺力矩和外部负载以及摩擦系数的关系.

本文基于 Hertz 接触理论, 系统给出了滚动轴承力学模型的建立方法, 获得滚动轴承五自由度刚度模型的解析表达式, 为滚动轴承的动力学分析与优化设计奠定基础.

## 1 滚动轴承的力学分析

滚动轴承的力学模型如图 1 所示, 在该模型中, 不计轴承的质量, 轴承座及其基础视为刚性, 轴承外圈全约束固定, 内圈与转轴过盈配合. 建立固定坐标系为  $OXYZ$ , 其坐标原点  $O$  为固定点, 位于滚动轴承外圈中心点处,  $X$  为轴向坐标,  $Y/Z$  为径向坐标. 作用在滚动轴承上的外载荷和相应的滚动轴承的弹性变形分别为:

$$\mathbf{F} = \{F_x \quad F_y \quad F_z \quad M_y \quad M_z\}^T,$$
$$\mathbf{q} = \{\delta_x \quad \delta_y \quad \delta_z \quad \varphi_y \quad \varphi_z\}^T.$$

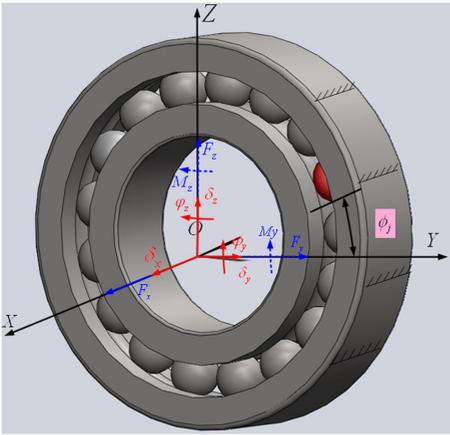


图1 滚动轴承简化学模型示意图

Fig.1 Simplified mechanical model of rolling bearing

假设滚动轴承共有  $m$  个滚珠体(在这里指滚珠个数). 每个滚珠与内外圈接触并相互作用, 存在力平衡关系. 其力学模型如图2所示.

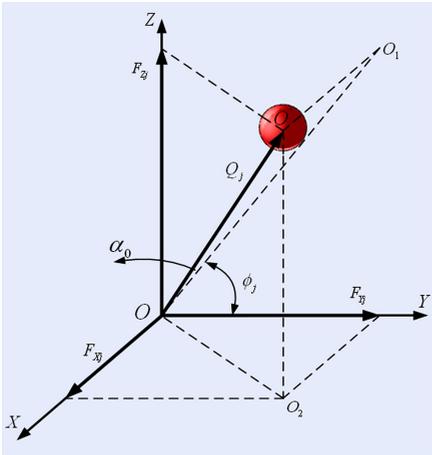


图2 单个滚珠受力学模型图

Fig.2 Mechanical model of one ball

设滚珠与内外圈的接触满足 Hertz 接触应力理论, 第  $j$  个滚珠对轴承内圈沿法线方向的接触力  $Q_j$  与其变形  $\delta_j$  之间的关系为:

$$Q_j = K_n \delta_j^n \quad (1)$$

其中,  $K_n$  为滚珠与内外圈之间总的载荷-变形系数(单位  $N/m^n$ ),  $n$  是接触指数, 对于滚珠轴承可以设为  $n = 1.5$ .

在安装预紧力作用下, 产生变形后的滚珠与内外圈的变形示意如图3所示. 图中  $\alpha_j$  为受负荷后的接触角,  $O'_i$  为受负荷后内圈沟曲率的中心位置. 因外圈固定, 受负荷后外圈沟曲率的中心位置仍在  $O_o$  处.  $A_j$  为  $O'_i$  和  $O_o$  之间的距离,  $\delta_j$  为第  $j$  个滚珠

在接触法向方向上的总接触变形量,  $\delta_{xj}$  为滚珠在轴向的弹性变形量,  $\delta_{yj}$  为滚珠在径向的弹性变形量.

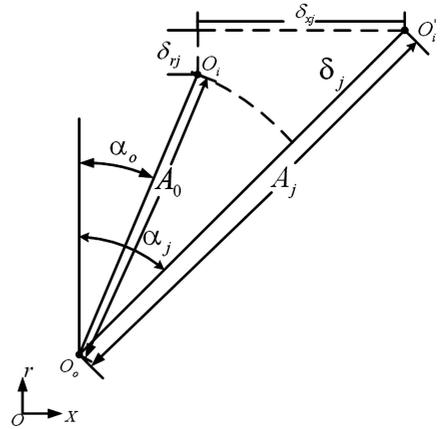


图3 滚珠与内外圈的相对变形示意图

Fig.3 Relative deformation of inner and outer raceway and ball

第  $j$  个滚珠在轴向的弹性变形量  $\delta_{xj}$  和在径向的弹性变形量  $\delta_{yj}$  与滚珠轴承的位移  $\mathbf{q}$  之间的关系如图4所示, 其中,  $\mathbf{q} = \{\delta_x, \delta_y, \delta_z, \varphi_y, \varphi_z\}^T$ , 总接触变形量  $\delta_j$  的两个方向上的分量分别为:

$$\delta_{xj} = \delta_x + R_j(\varphi_y \sin \varphi_j - \varphi_z \cos \varphi_j) \quad (2)$$

$$\delta_{yj} = \delta_y \cos \varphi_j + \delta_z \sin \varphi_j \quad (3)$$

其中,  $R_j$  为内滚道沟曲率中心轨迹半径,  $\varphi_j$  为第  $j$  个滚珠的位置角.

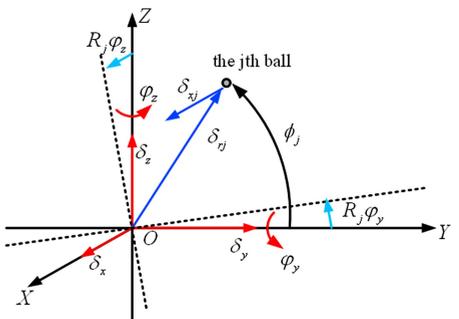
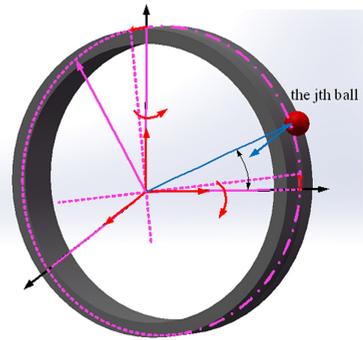


图4 第  $j$  个滚珠与内外圈的相对变形示意图

Fig.4 Inner and outer raceway and  $j$ th ball deformation

式(1)中的滚珠与内外圈之间总载荷-变形系数  $K_n$ ,是由内圈和外圈的载荷-变形系数  $K_i$ 、 $K_o$  综合求得,即:

$$K = \left[ \frac{1}{(1/K_i)^n + (1/K_o)^n} \right]^n \quad (4)$$

其中,滚珠内圈和外圈的载荷-变形系数  $K_i$ 、 $K_o$  的计算式为

$$K_i = \left[ \frac{32}{9(\delta_i^*)^3 \eta^2 \bar{\rho}_i} \right]^{1/2}, K_o = \left[ \frac{32}{9(\delta_o^*)^3 \eta^2 \bar{\rho}_o} \right]^{1/2} \quad (5)$$

其中,  $\delta_i^*$ 、 $\delta_o^*$  分别是滚珠与内滚道和外滚道的相对趋近量常数,  $\eta$  为综合弹性常数,滚珠与内外套圈接触的曲率和  $\bar{\rho}_i$ 、 $\bar{\rho}_o$ .

这样,在得到式(1)中的一个滚珠与内外圈之间的载荷-变形系数  $K_n$  和接触变形量  $\delta_j$  后,即可得到其弹性接触作用力  $Q_j$ .

## 2 滚动轴承刚度矩阵的推导

滚动轴承的整体载荷-位移关系具有如下关系.即将上面得到的任意位置角  $\varphi_j$  处的任一滚珠  $j$  的弹性接触作用力  $Q_j$  按轴承总体 5 个自由度方向进行分解,得:

$$\begin{aligned} F_{xj} &= Q_j \sin \alpha_j \\ F_{yj} &= Q_j \cos \alpha_j \cos \varphi_j \\ F_{zj} &= Q_j \cos \alpha_j \sin \varphi_j \\ M_{yj} &= R_j Q_j \sin \alpha_j \sin \varphi_j \\ M_{zj} &= -R_j Q_j \sin \alpha_j \cos \varphi_j \end{aligned} \quad (6)$$

将轴承所有滚珠的接触力进行求和,再根据滚动轴承内圈的平衡条件,即作用在轴承上的外力与所有钢球对内圈的作用力平衡,可得如下轴承整体平衡方程:

$$\begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \\ M_y \\ M_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum_{j=1}^m Q_j \sin \alpha_j \\ \sum_{j=1}^m Q_j \cos \alpha_j \cos \varphi_j \\ \sum_{j=1}^m Q_j \cos \alpha_j \sin \varphi_j \\ \sum_{j=1}^m R_j Q_j \sin \alpha_j \sin \varphi_j \\ - \sum_{j=1}^m R_j Q_j \sin \alpha_j \cos \varphi_j \end{Bmatrix} \quad (7)$$

在受小载荷作用时,滚珠与套圈之间的接触变形一般是微米级的.在微小变形情况下,滚动轴承各方向上的刚度可近似为线性刚度,即滚动轴承的外载荷与轴承位移之间的关系可记为

$$F = Kq \quad (8)$$

其中  $K$  为滚动轴承刚度矩阵,为  $5 \times 5$  阶的矩阵,其定义为:

$$K = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_x}{\partial \delta_x} & \frac{\partial F_x}{\partial \delta_y} & \frac{\partial F_x}{\partial \delta_z} & \frac{\partial F_x}{\partial \varphi_y} & \frac{\partial F_x}{\partial \varphi_z} \\ \frac{\partial F_y}{\partial \delta_x} & \frac{\partial F_y}{\partial \delta_y} & \frac{\partial F_y}{\partial \delta_z} & \frac{\partial F_y}{\partial \varphi_y} & \frac{\partial F_y}{\partial \varphi_z} \\ \frac{\partial F_z}{\partial \delta_x} & \frac{\partial F_z}{\partial \delta_y} & \frac{\partial F_z}{\partial \delta_z} & \frac{\partial F_z}{\partial \varphi_y} & \frac{\partial F_z}{\partial \varphi_z} \\ \frac{\partial M_y}{\partial \delta_x} & \frac{\partial M_y}{\partial \delta_y} & \frac{\partial M_y}{\partial \delta_z} & \frac{\partial M_y}{\partial \varphi_y} & \frac{\partial M_y}{\partial \varphi_z} \\ \frac{\partial M_z}{\partial \delta_x} & \frac{\partial M_z}{\partial \delta_y} & \frac{\partial M_z}{\partial \delta_z} & \frac{\partial M_z}{\partial \varphi_y} & \frac{\partial M_z}{\partial \varphi_z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} & K_{15} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} & K_{25} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} & K_{35} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} & K_{45} \\ K_{51} & K_{52} & K_{53} & K_{54} & K_{55} \end{bmatrix} \quad (9)$$

其中  $K_{ij}$  是刚度矩阵元素,是外载荷分量对弹性位移分量的偏导数.若忽略交叉刚度,只考虑 5 个方向的主刚度,滚动轴承刚度矩阵  $K$  可记为:

$$K = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_x}{\partial \delta_x} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial F_y}{\partial \delta_y} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial F_z}{\partial \delta_z} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial M_y}{\partial \varphi_y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial M_z}{\partial \varphi_z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & K_{55} \end{bmatrix} \quad (10)$$

在已知轴承外载荷  $F$  的情况下,  $F = \{F_x \ F_y \ F_z \ M_y \ M_z\}^T$ , 通过求解式 (10) 组成的非线性方程组, 得出该轴承载荷作用下的轴承位移  $q = \{\delta_x \ \delta_y \ \delta_z \ \varphi_y \ \varphi_z\}^T$ , 提供求得的位移向量估算轴承刚度矩阵元素  $K_{ij}$ , 进而确定刚度矩阵  $K$ .

### 3 结果与分析

#### 3.1 轴承参数

以 71807AC 角接触球轴承为例加以分析, 所采用轴承的内外圈及滚动体所采用的材料均为 GCr15 轴承钢, 轴承基本参数如表 1 所示.

表 1 71807AC 角接触球轴承基本参数

Table 1 Basic parameters of angular contact ball bearings 71807AC

Parameter	Value
Diameter of inner ring $D_i$	35.0mm
Diameter of outer ring $D_o$	47.0mm
Ball diameter $D$	3.14 mm
Contact angle	25°
Width	7mm
Count of ball $m$	25
Load-deformation index $n$	3/2
Young's modulus	2.07e11 Pa
Poisson's ratio	0.3
Load deformation coefficient	1.0649e10 N/m <sup>n</sup>
Axial preload	1000N

#### 3.2 轴承刚度测试

滚动轴承刚度测试试验台如图 5 所示. 被测滚动轴承安装在轴上, 其内圈与轴过盈配合, 外圈固定在轴承支座上. 加载装置分别位于轴向和径向两个方向上, 通过力传感器数显装置读取施加的载荷大小, 数显千分表分别位于滚动轴承左端轴向方向和靠近轴承的转轴水平方向, 用以近似轴承的轴向和径向位移.

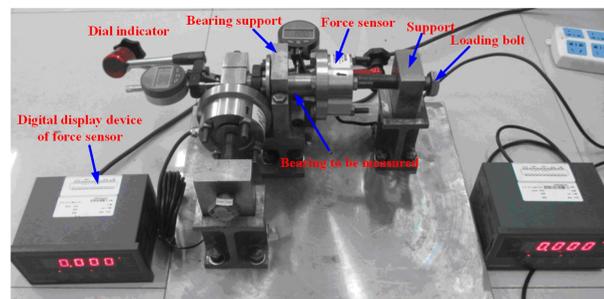
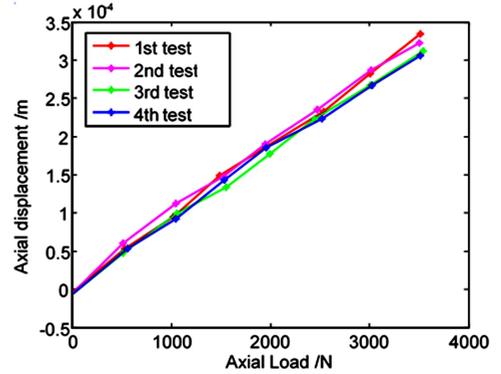


图 5 滚动轴承性能测试原理性试验器

Fig.5 Test rig for performances of ball bearing

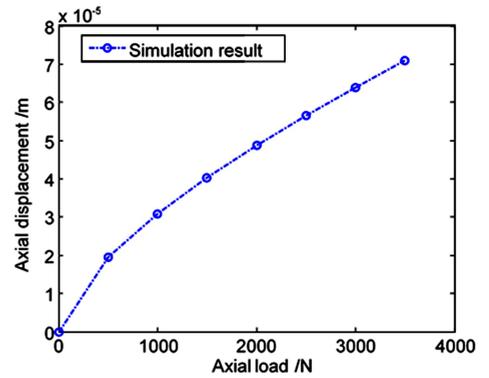
#### 3.3 测试结果对比分析

将试验结果与仿真分析的计算结果进行比较. 图 6 表示了不同轴向负荷作用下, 轴承的轴向变形情况.



(a) 试验结果

(a) test results



(b) 仿真结果

(b) Simulation results

图 6 不同轴向载荷作用下轴承的轴向位移

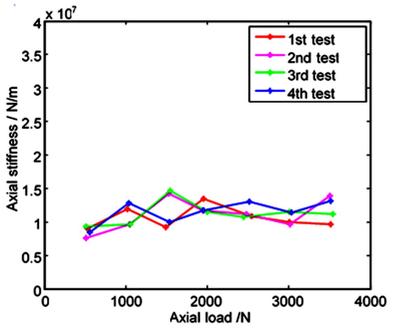
Fig.6 Axial displacement of ball bearing vs. axial preload

由图 6 可以看出, 试验具有很好的重复性, 四次测试的结果基本一致. 此外, 仿真分析结果与试验测试结果在趋势上表现出一致性.

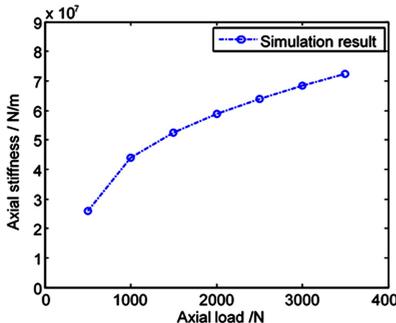
轴承轴向测试刚度和仿真计算的轴承轴向刚度比较如图 7 所示.

由图 7 可以看出, 在给定的轴向载荷范围内 (500~3500N), 试验所得的轴承轴向刚度出现波动, 仿真分析结果随着轴向载荷的增大而增大. 测试所得轴向刚度较小, 由于考虑了试验装置中轴、轴承座和轴承的串联后的刚度.

在固定的轴向预载 (2800N) 条件下, 不同径向载荷作用下, 轴承的径向位移变化规律和径向刚度变化, 分别如图 8 和 9 所示.

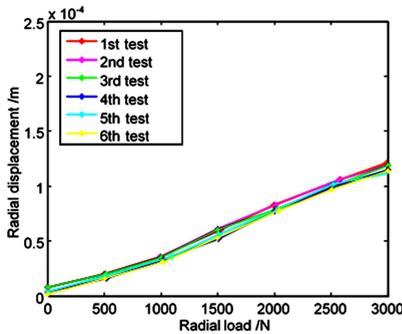


(a) 试验结果  
(a) test results

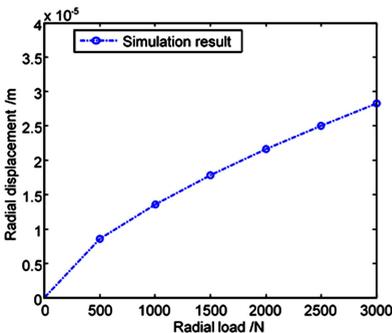


(b) 仿真结果  
(b) Simulation results

图 7 不同轴向载荷作用下轴承的轴向刚度  
Fig.7 Axial stiffness of ball bearing vs. axial preload



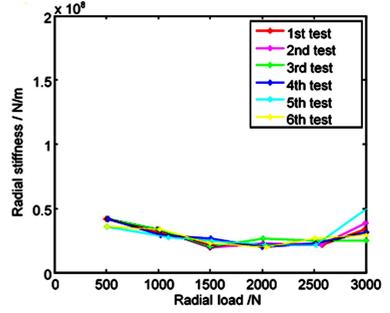
(a) 试验结果  
(a) test results



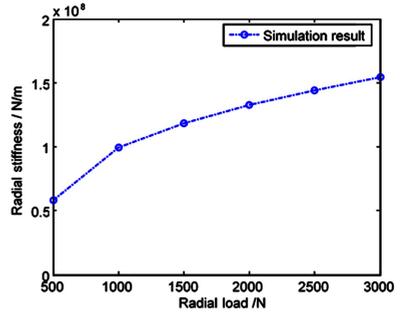
(b) 仿真结果  
(b) Simulation results

图 8 不同径向载荷作用下轴承径向位移

Fig.8 Radial displacement of ball bearing vs. radial preload



(a) 试验结果  
(a) test results



(b) 仿真结果  
(b) Simulation results

图 9 不同径向载荷作用下轴承径向刚度

Fig.9 Radialstiffness of ball bearing vs. radial preload

由图 8 可以看出,试验具有良好的重复性,六次测试的结果基本一致.此外,仿真分析结果与试验测试结果在趋势上表现出一致性,随着径向载荷的增大,径向位移均呈线性增大趋势.

由图 9 可以看出,在给定的径向载荷范围内(500~3000N),试验所得的轴承径向刚度呈现先减小后增大的趋势,仿真分析结果随着轴向载荷的增大而增大.试验测试所得轴承刚度较小,由于该刚度为考虑了试验装置中轴、轴承座和轴承的串联后的综合刚度.该试验测试结果与仿真分析结果在整体趋势上表现出了相似性,一定程度上验证了仿真计算模型的有效性.

### 4 结论

- (1) 本文给出了小变形下,基于 Hertz 接触理论滚动轴承五自由度刚度矩阵的计算方法;
- (2) 轴承内圈位移整体上随着载荷的增大而呈线性增大;
- (3) 利用刚度模型获得的理论分析结果与试验测试结果在趋势上表现出良好的一致性.

### 参 考 文 献

1 Stribeck R. Ball bearings for various loads. *Trans ASME*,

- 1907,29:420~463
- 2 Sjövall H. The load distribution within ball and roller bearings under given external radial and axial load. *Teknisk Tidskrift, Mek*, 1933,19(3):72~75
  - 3 Lundberg G, Palmgren A. Dynamic capacity of roller bearings. *Journal of Applied Mechanics-Transactions of the ASME*, 1949,16(2):165~172
  - 4 Guo Y, Parker R G. Stiffness matrix calculation of rolling element bearings using a finite element/contact mechanics model. *Mechanism and Machine Theory*, 2012,51(5):32~45
  - 5 Lostado R, García R E, Martínez R F. Optimization of operating conditions for a double-row tapered roller bearing. *International Journal of Mechanics and Materials in Design*, 2016, 12(3): 1~21
  - 6 Lostado R, Martínez R F, Donald B J M. Determination of the contact stresses in double-row tapered roller bearings using the finite element method, experimental analysis and analytical models. *Journal of Mechanical Science and Technology*, 2015,29(11):4645~4656
  - 7 Nataraj C, Harsha S P. The effect of bearing cage run-out on the nonlinear dynamics of a rotating shaft. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2008,13(4):822~838
  - 8 Cao L, Brouwer M D, Sadeghi F, et al. Effect of housing support on bearing dynamics. *Journal of Tribology*, 2015, 138(1):011105
  - 9 George B, Prasad N S. Finite element analysis of squirrel cage ball bearings for gas turbine engines. *Defence Science Journal*, 2007,57(2):165~171
  - 10 Jones A. Ball motion and sliding friction in ball bearings. *Journal of Basic Engineering*, 1959,81(3):1~12
  - 11 Jedrzejewski J, Kwasny W. Modelling of angular contact ball bearings and axial displacements for high-speed spindles. *CIRP Annals-Manufacturing Technology*, 2010, 59(1):377~382
  - 12 Noel D, Ritou M, Furet B, et al. Complete analytical expression of the stiffness matrix of angular contact ball bearings. *Journal of Tribology*, 2013,135(4):041101
  - 13 Yi D, Yang Y, Zhuo X, et al. An improved dynamic model for angular contact ball bearings under constant preload. *Journal of the Chinese Institute of Engineers*, 2016, 39(8):900~906
  - 14 Zhao C, Yu X, Huang Q, et al. Analysis on the load characteristics and coefficient of friction of angular contact ball bearing at high speed. *Tribology International*, 2015, 87:50~56

## ANALYTICAL DETERMINATION METHOD OF THE ROLLING BEARING STIFFNESS AND EXPERIMENTAL VALIDATION\*

Ren Hongjun<sup>†</sup>

(School of Mechanical Engineering and Automation, University of Science and Technology Liaoning, Anshan 114051, China)

**Abstract** This paper developed an analytical model of rolling bearing based on Hertz contact theory. Based on this model, the expressions of interaction forces of bearing parts were given, and the influences of axial, radial and moment bearing loads on bearing contact stress and contact deformation were also analyzed. Then, five degrees of freedom stiffness matrix of the rolling bearing was obtained. Finally, the experimental rig of the rolling bearing was built, and both the axial and radial deformations were measured under different loading levels, and then the stiffness of the bearing was achieved. Comparison between the theoretical and experimental results shows good agreement, which validates the proposed analytical model.

**Key words** rolling bearing, stiffness analysis, Hertz contact, displacement