

# 球轴承非线性动态刚度特性及其复杂共振行为研究\*

董文凯<sup>1</sup> 张智勇<sup>1,2†</sup> 芮筱亭<sup>2</sup> 陈予恕<sup>3</sup> 靳玉林<sup>4</sup>

(1.南京理工大学 理学院,南京 210094) (2.南京理工大学 发射动力学研究所,南京 210094)

(3.哈尔滨工业大学 航天学院,哈尔滨 150001) (4.四川大学 空天科学与工程学院,成都 610065)

**摘要** 滚动轴承由于其低阻尼、大过载和小体积等特点是航空发动机、铁路货车、舰船发动机等旋转机械的主要支承件.变柔度(varying compliance, VC)振动是由滚动体公转引起的一种不可避免的时变刚度参数激励振动.赫兹接触支承刚度给球轴承及其支承转子系统带来的滞后 VC 共振现象在相关研究中被大量发现.滞后突跳振动不但影响到转子系统的运行稳定性与安全性,而且其冲击作用也是轴承等系统元件裂纹及疲劳破坏的重要诱导因素.本文将通过分析球轴承动态时变刚度特性,拟提出一种采用系统动态固有频率估算球轴承 VC 共振区间的方法.在此基础上,探讨系统动态刚度特性与主共振区间复杂运动分岔行为的内在关联,发现当系统不同自由度方向上的固有频率值接近 1:2 比例关系时,系统可能产生强烈的内共振,进而诱发响应的周期倍化分岔甚至准周期、混沌振动.该研究对球轴承复杂共振响应的控制具有潜在的理论意义和工程价值.

**关键词** 球轴承, 变柔度(VC), 动态刚度, 分岔, 滞后共振

DOI: 10.6052/1672-6553-2018-58

## 引言

滚动轴承作为旋转机械中转子系统核心支承部件,在工业部门中广泛应用.随着国民经济的增长以及国防事业的发展,旋转机械正在向高速、重载和自动化方向发展,对轴承-转子系统的稳定性、安全性提出了更高的要求.滚动轴承内圈一般与转轴是过盈配合的,滚动体在自转的同时随着保持架在滚道绕转轴公转.在各个滚动体公转进入和离开承载区域过程中,轴承的刚度是时变的,时变刚度诱发的振动通常称为变柔度(varying compliance, VC)振动<sup>[1-3]</sup>.滚动轴承的时变刚度特性是转子-轴承系统的不可避免的参激源,已经有大量研究指出滚动轴承的 VC 振动具有复杂的滞后共振响应特性<sup>[4-9]</sup>.然而,迄今有关轴承非线性时变刚度特性对系统 VC 共振及其分岔行为影响的专门研究尚少.

针对滚动轴承 VC 振动问题, Sunnersjö<sup>[10]</sup> 较早分析了考虑惯性力的线弹性圆柱滚子轴承模型,发现 VC 振动可以给系统带来周期运动和不规则的

非周期运动. Fukata 等<sup>[1]</sup> 进一步研究了考虑赫兹接触非线性的经典两自由度轴承模型,指出 JIS6306 球轴承 VC 振动在轴承共振频率区间具有拍振(其中包括准周期运动行为)和类混沌(chaos-like)运动行为,并且发现在一阶临界转速附近系统存在 VC 亚谐振动. Rahnejat 和 Gohar<sup>[11]</sup> 研究指出在考虑润滑的情况下钢球数量和径向游隙对深沟球轴承 VC 振动的影响依然显著. Mevel 和 Guyader<sup>[2,12]</sup> 通过数值计算和实验讨论了 JIS6306 球轴承 VC 振动通向混沌的道路,发现系统存在倍周期分岔和准周期运动进入混沌的形式,其中倍周期分岔主要发生在一阶临界转速范围. Sankaravelu 等<sup>[4]</sup> 把打靶法与同伦延拓法相结合,发现滚动轴承 VC 振动响应曲线具有滞后行为. Tiwari 和 Gupta<sup>[3,13]</sup> 研究了平衡、不平衡刚性转子-滚动轴承系统的 VC 振动,发现系统共振幅频响应区间具有突跳失稳和阵发性混沌振动特征. 白长青、许庆余等<sup>[14]</sup> 研究了深沟球轴承 VC 振动的稳定性,指出 VC 周期运动幅频响应的不稳定区间的个数随轴承径向间隙的增加而增多.

2018-05-08 收到第 1 稿, 2018-06-27 收到修改稿.

\* 国家自然科学基金(11602108, 11472135), 江苏省自然科学基金(BK20160820), 科学挑战专题(TZ2016006-0104)

† 通讯作者 E-mail: zhiy Zhang@njjust.edu.cn

崔立和王黎钦等<sup>[15]</sup>建立了一种拟动力学球轴承模型,发现轴承非线性可使支承刚性转子系统的周期运动发生突跳、倍化以及混沌振动等非线性行为.邓四二等<sup>[16]</sup>理论和实验证实轴承间隙对转子系统的支承刚度、运行稳定性有显著影响.

传统上,滚动轴承被称为滚动接触轴承<sup>[17,18]</sup>,这是针对滚动体与滚道之间的接触变形关系而言的,且二者接触变形一般认为满足赫兹接触理论假设:(1)材质均质;(2)接触区域尺寸远小于接触体尺寸;(3)不考虑接触区摩擦,且作用力垂直于接触面;(4)变形属于弹性变形.接触共振是指接触非线性系统在线性等共振频率区间内的共振特性,Nayak<sup>[20]</sup>比较早地采用谐波平衡法分析了单自由度赫兹接触系统在简谐激励下的响应特征,发现系统在接触主共振区间幅频响应曲线向左偏,即系统具有软的动力学滞后共振行为.Rigaud 和 Perret-Liaudet<sup>[21]</sup>明确指出只有采用接触非线性模型才可能准确地预测系统的响应特性.球轴承受载过程中,将在滚珠和滚动体之间产生赫兹接触变形<sup>[19]</sup>.张智勇、陈予恕等<sup>[7,8]</sup>采用谐波平衡-频时转换(HB-AFT)方法结合 Floquet 理论研究了球轴承 VC 振动的赫兹接触共振特性及其参数影响规律,发现系统具有软的滞后主共振行为,并被随后实验证实<sup>[9]</sup>.

就滚动轴承-转子动力学而言,学者们更加关注滚动轴承的支承特性和时变激励特征对轴承及整个转子系统的振动特性和运动稳定性等方面的影响<sup>[19,22-24]</sup>,有大量工作<sup>[25-27]</sup>对滚动轴承动态时变刚度的计算方法和影响因素进行了研究.Harris<sup>[19]</sup>明确指出由于滚珠与滚动体之间的非线性受力-变形关系,轴承支承刚度具有时变特性且与转轴转速有关,而研究球轴承动态刚度特性及其对 VC 振动的影响具有基础理论意义.本文将 HB-AFT 方法和数值积分方法为主要分析手段,对球轴承的非线性动态刚度特性及其复杂共振行为展开研究,拟探究系统动态刚度特性与主共振区间复杂运动分岔行为的内在关联.

## 1 模型

在研究考虑轴承径向间隙、轴承时变刚度和赫兹接触力等非线性因素的球轴承 VC 振动时,采用如图 1 所示的 2 自由度深沟球轴承模型就可得较好的定性和定量的结果<sup>[3,8,12]</sup>.

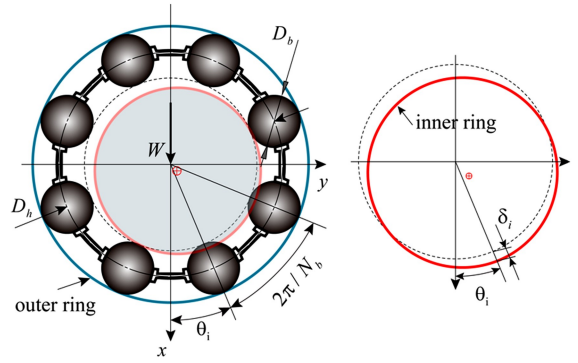


图1 经典两自由度深沟球轴承模型及其径向位移变形关系

Fig.1 Classical 2-DOF deep groove ball bearings and its displacement-deformation relationship in radial direction

第  $i$  个滚动体的瞬时角位置为:

$$\theta_i = 2\pi(i-1)/N_b + \Omega t \quad (1)$$

式中,  $N_b$  为滚动体个数;  $\Omega$  为保持架转速(rad/s).其中  $\Omega$  与转轴转速  $\omega_s$ 、轴承内圈半径  $r_i$  以及外圈半径  $r_o$  的关系为:

$$\Omega = \omega_s \frac{r_i}{r_i + r_o} \quad (2)$$

在小变形条件下,第  $i$  个滚动体与轴承套圈的接触变形表示为:

$$\delta_i = x \cos \theta_i + y \sin \theta_i - \delta_0 \quad (3)$$

这里  $2\delta_0$  为轴承的径向游隙.

对于球轴承,不考虑润滑条件下钢球与滚道之间的位移变形关系满足赫兹点接触,则轴承恢复力满足:

$$\begin{bmatrix} F_x \\ F_y \end{bmatrix} = C_b \sum_{i=1}^{N_b} (\delta_i G[\delta_i])^{1.5} \begin{bmatrix} \cos \theta_i \\ \sin \theta_i \end{bmatrix} \quad (4)$$

式中,  $C_b$  为轴承的赫兹接触刚度( $\text{N}/\text{m}^{3/2}$ );  $G[\cdot]$  为 Heavisde 函数.

球轴承-刚性 Jeffcott 转子系统的运动微分方程为:

$$m \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5)$$

式中,  $m$  为转子系统等效质量(m);  $c$  为轴承等效阻尼( $\text{Ns}/\text{m}$ );  $W$  为轴承内圈承受重力(N).

球轴承在承载后,将在滚珠和滚动体之间产生赫兹接触变形,由于滚珠与滚动体之间的非线性受力-变形关系,轴承支承刚度是与系统参数相关的时变量.根据恢复力(4)式,可求得系统线性化动态刚度为<sup>[2,23]</sup>:

$$\begin{bmatrix} k_{xx}(t) \\ k_{yy}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial F_x(t)/\partial x \\ \partial F_y(t)/\partial y \end{bmatrix} \quad (6)$$

则球轴承的时变固有频率为:

$$\begin{bmatrix} \omega_{xx}(t) \\ \omega_{yy}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{k_{xx}(t)/m} \\ \sqrt{k_{yy}(t)/m} \end{bmatrix} \quad (7)$$

系统动态等效固有频率  $\bar{\omega}_{xx}$ 、 $\bar{\omega}_{yy}$  可由(7)式算术平均值来描述.

就 VC 振动而言,滚珠通过频率激起的 VC 周期 1 运动是系统的基本运动形式,系统(5)式 VC 参激频率为:

$$\Omega_{VC} = N_b \cdot \Omega \quad (8)$$

则系统 VC 周期 1 运动在  $x$  方向或  $y$  方向发生参激主共振的条件为:

$$\Omega_{VC} = \bar{\omega}_{xx}, \Omega_{VC} = \bar{\omega}_{yy} \quad (9)$$

对于球轴承-刚性转子系统,其支承力仅在滚珠和滚道之间引起赫兹接触变形,则(9)式所表示的共振本质上是由赫兹非线性引起的参激接触共振.

## 2 方法

本文采用 HB-AFT 方法求解系统 VC 周期响应,并采用 Floquet 理论对解的稳定性进行分析.首先,进行式(5)的位移和非线性力的谐波平衡化过程:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \sum_{k=0}^K \left[ \begin{bmatrix} a_{xk} \\ a_{yk} \end{bmatrix} \cos(kt) - \begin{bmatrix} b_{xk} \\ b_{yk} \end{bmatrix} \sin(kt) \right] \quad (10)$$

$$\begin{bmatrix} F_x \\ F_y \end{bmatrix} = \sum_{k=0}^K \left[ \begin{bmatrix} c_{xk} \\ c_{yk} \end{bmatrix} \cos(kt) - \begin{bmatrix} d_{xk} \\ d_{yk} \end{bmatrix} \sin(kt) \right] \quad (11)$$

把式(10)、(11)代入方程(5),谐波平衡可得:

$$g(P, Q) = 0 \quad (12)$$

其中  $P, Q$  分别表示位移和非线性力谐波系数.

把  $Q$  记为已知,可采用 Newton-Raphson 迭代求解不动点  $P$ :

$$J^{(i)}(P^{(i+1)} - P^{(i)}) + g^{(i)} = 0 \quad (13)$$

其中,迭代 Jacobian 矩阵:

$$\begin{aligned} J &= dg(P, Q)/dP \\ &= \partial g(P, Q)/\partial P + \partial g(P, Q)/\partial Q \cdot dQ/dP \end{aligned} \quad (14)$$

迭代过程中,采用 AFT 转换给出式(14)中

$dQ/dP$  的关系.然后,对所得周期解进行 Floquet 稳定性分析<sup>[8]</sup>.

## 3 分析结果

对于如表 1 所示的 JIS6306 深沟球轴承-转子系统,取轴承游隙为  $\delta_0 = 1.0 \mu\text{m}$  时,如图 2 所示系统在  $\Omega = 180 \text{rad/s}$ 、 $200 \text{rad/s}$  和  $220 \text{rad/s}$  时的动态刚度都是周期性时变的,而且与已有文献<sup>[19,27]</sup>结果一致,系统的 VC 特性是随转速变化的.另外,由式(7)可知,系统的动态固有频率同样随转速变化的.滚动轴承 VC 振动是由滚动体公转引起的一种不可避免的时变刚度参激振动,下面分析 JIS6306 球轴承系统随转速的全局周期响应特性.

表 1 JIS6306 轴承-转子系统参数

Table 1 Specifications and parameters of JIS6306 ball bearing-rotor system

Item	Value
Contact stiffness $C_b$ ( $\text{N/m}^{3/2}$ )	$1.334 \times 10^{10}$
Ball diameter $D_b$ (mm)	11.9062
Ball pitch diameter $D_k$ (mm)	52.0
Number of balls $N_b$	8
Damping $c$ (Ns/m)	400
Equivalent mass $m$ (kg)	20
Radical load $W$ (N)	200

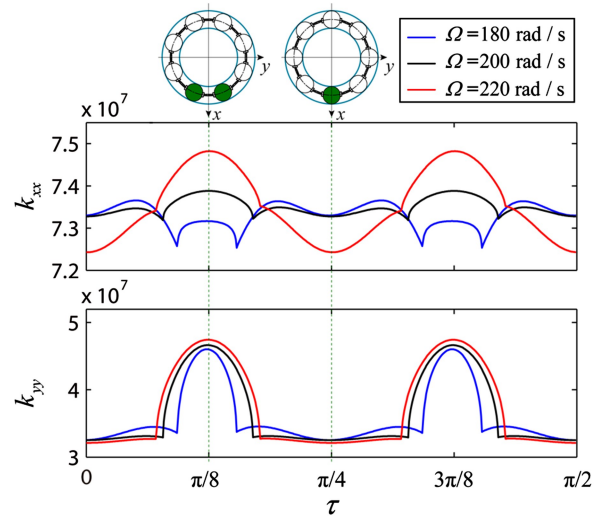


图 2 当  $\delta_0 = 1.0 \mu\text{m}$  时,系统在  $\Omega$  取  $180 \text{rad/s}$ 、 $200 \text{rad/s}$  和  $220 \text{rad/s}$  时的动态刚度,其中  $\tau = \Omega t$

Fig.2 For  $\delta_0 = 1.0 \mu\text{m}$ , the system dynamic stiffness when  $\Omega$  takes  $180 \text{rad/s}$ ,  $200 \text{rad/s}$  and  $220 \text{rad/s}$ , here  $\tau = \Omega t$

在轴承径向间隙为  $\delta_0 = 1.0 \mu\text{m}$ ,以保持架转速  $\Omega$  为控制参数,采用嵌入弧长延拓的 HB-AFT 方法可追踪系统的 VC 周期 1 响应轨线.如图 3(a)所

示,系统  $x$  方向出现向左偏的共振峰值,  $y$  方向出现交叉滞后共振行为,这与已有的理论和实验结果一致<sup>[9]</sup>.图 3(b)和(c)给出了系统动态等效固有频率  $\bar{\omega}_{xx}$ 、 $\bar{\omega}_{yy}$  随转速的变化规律,其中在  $x$  方向发生软滞后共振区间,系统动态等效固有频率出现随转速增大而减小的软弹簧特性,这说明本文动态刚度的计算具有一定的参考价值.在远离 VC 共振的 A-A、B-B 和 C-C 区间,系统  $x$ 、 $y$  方向的等效固有频率分别浮动在 1906.8~1911.1rad/s、1340~1450rad/s 范围,由 VC 参数激励接触主共振的条件(9)式可推算系统  $x$ 、 $y$  方向主共振发生于  $\Omega$  为 238.4~238.9rad/s、167.5~181.3rad/s 区间附近,这与图 3(a)理论分析结果是吻合的.其中,  $y$  方向等效固有频率波动范围大多由于非常载方向(见式(5))系统间隙非线性影响显著导致的.总体而言,非共振区间的动态等效固有频率可用于预测系统 VC 接触共振位置,上述结果也说明系统在非共振区间的动态刚度与系统静态刚度接近.

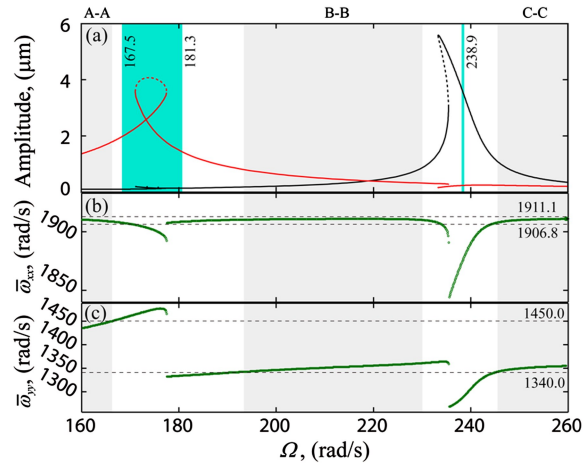


图3 当  $\delta_0 = 1.0 \mu\text{m}$  时, (a)  $x$  (黑线)、 $y$  (红线)方向稳定(实线)和不稳定(虚线)的 VC 周期解频响峰峰值曲线, (b)  $\bar{\omega}_{xx}$ 、(c)  $\bar{\omega}_{yy}$  为系统动态等效固有频率随  $\Omega$  的变化值

Fig.3 For  $\delta_0 = 1.0 \mu\text{m}$ , (a) stable (solid) and unstable (dashed) VC periodic frequency-response peak to peak curves,  $c = 200 \text{ Ns/m}$  in  $x$  (black line) and  $y$  (red line) directions respectively, (b)  $\bar{\omega}_{xx}$  and (c)  $\bar{\omega}_{yy}$  are the system equivalent dynamic natural frequencies varying with  $\Omega$

已有研究表明较大间隙可以给系统带来复杂的非线性响应行为<sup>[28]</sup>,而轴承游隙  $\delta_0$  是系统的基本参数之一.取  $\delta_0 = 6.0 \mu\text{m}$ ,采用嵌入弧长延拓的 HB-AFT 方法结合 Floquet 理论分析系统  $x$  方向主共振区间的周期运动及其分岔行为.如图 4 所示,随着控制参数  $\Omega$  的变化,稳定的 VC 周期 1 解分枝

的 Floquet 乘子在  $A_1$  (见表 2)、 $A_2$  点通过 -1 离开单位圆,由亚临界倍周期分岔失稳产生的 VC 周期 2 解分枝依然包含多个失稳区间,这与图 5(a)的数值分岔图结果是吻合的,其中不稳定周期 2 解  $A_1$  -  $A_2$  段是在  $A_1$ 、 $A_2$  点由二次 Hopf 分岔失稳产生的.

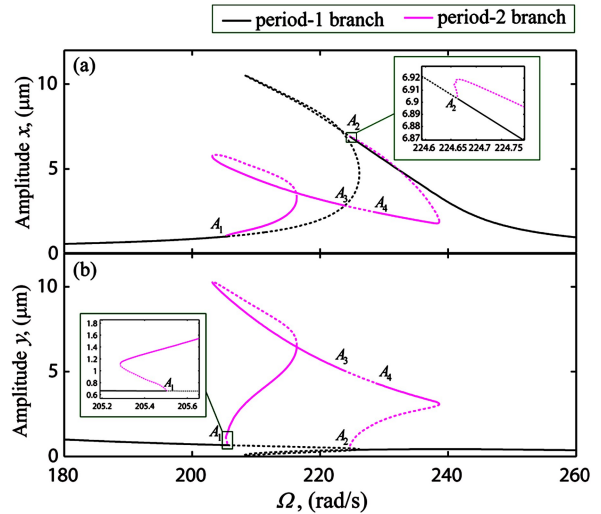


图4 当  $\delta_0 = 6.0 \mu\text{m}$  时, (a)  $x$  方向、(b)  $y$  方向稳定(实线)和不稳定(虚线)的周期解频响峰峰值曲线  
Fig.4 For  $\delta_0 = 6.0 \mu\text{m}$ , stable (solid) and unstable (dashed) periodic frequency-response peak to peak curves in (a)  $x$  direction and (b)  $y$  direction

表2 周期 1 分枝在转向点  $A_1$  附近的 Floquet 乘子  $\lambda_m$   
Table 2 Floquet multipliers  $\lambda_m$  of period-1 branch around the turning point  $A_1$

$\Omega$ (rad/s)	204	205.2	206	207
$\lambda_m$	0.6241+	0.6529+	0.6728+	0.6960+
	0.7324i	0.7071i	0.6884i	0.6652i
	0.6241-	0.6529-	0.6728-	0.6960-
	0.7324i	0.7071i	0.6884i	0.6652i
$\lambda_m$	-0.9538+	-0.9473	-0.8606	-0.8169
	0.1272i			
$\lambda_m$	-0.9538-	-0.9778	-1.0766	-1.1347
	0.1272i			

图 5(b)为系统等效动态固有频率随转速的变化特征(为便于分析图中给出了  $\bar{\omega}_{xx}$  和  $2\bar{\omega}_{yy}$  变化值),发现随着  $\Omega$  的变大,两自由度方向的动态等效固有频率之比  $\bar{\omega}_{xx}:\bar{\omega}_{yy}$  逐渐趋近 2:1 关系,并最终在  $A_1$  点发生倍周期分岔.对比  $\delta_0 = 1.0 \mu\text{m}$  的频响曲线(见图 3(a)),由图 4 可见在  $\delta_0 = 6.0 \mu\text{m}$  时两自由度方向的耦合振动显著增强.如文献[8]所述,系统动态固有频率的 1:2 耦合参激内共振导致  $A_1$  点发生倍周期分岔,此时从  $x$  自由度上高频成分



VC 周期 1 响应到  $y$  方向的低频成分 VC 周期 2 运动上发生了典型的能量渗透现象<sup>[29,30]</sup>.

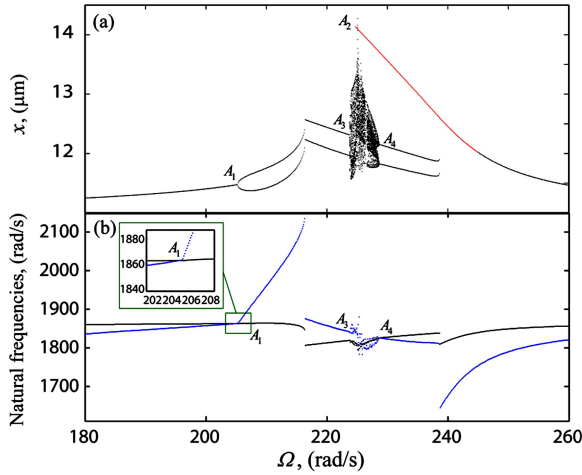


图 5 当  $\delta_0 = 6.0 \mu\text{m}$  时, (a)  $x(t)$  的数值分岔图,其中黑点、红点分别为向上、向下扫频的数值积分结果, (b) 系统动态等效固有频率  $\bar{\omega}_{xx}$  (black dots)、 $2\bar{\omega}_{yy}$  (blue dots) 随  $\Omega$  的变化值

Fig.5 For  $\delta_0 = 6.0 \mu\text{m}$ , (a) bifurcation diagram of  $x(t)$  calculated by numerical integrations when  $\Omega$  sweeping up (black dots) and down (red dots), and (b) the system equivalent dynamic natural frequencies  $\bar{\omega}_{xx}$  and  $2\bar{\omega}_{yy}$  varying with  $\Omega$

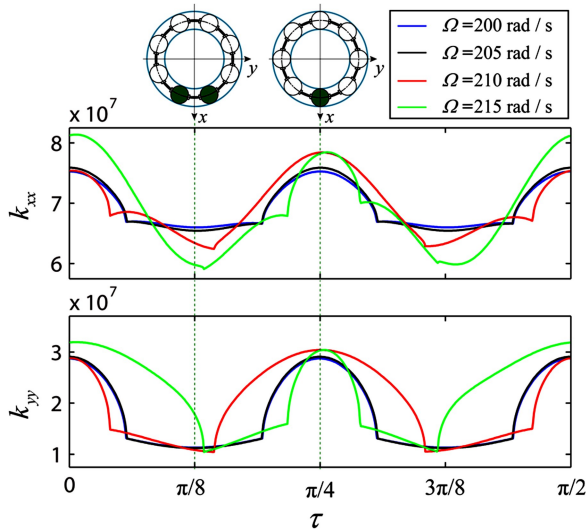


图 6 当  $\delta_0 = 6.0 \mu\text{m}$  时,系统在  $\Omega$  取 180 rad/s, 200 rad/s 和 220 rad/s 时的动态刚度,其中  $\tau = \Omega t$

Fig.6 For  $\delta_0 = 6.0 \mu\text{m}$ , the system dynamic stiffness when  $\Omega$  takes 180 rad/s, 200 rad/s and 220 rad/s, here  $\tau = \Omega t$

如图 6 所示,就系统刚度特性而言,在  $A_1$  点倍周期分岔发生前  $y$  方向动态刚度随  $\Omega$  基本没有改变,而内共振发生后,由于耦合效应<sup>[31]</sup>导致动态刚度发生显著变化.另外由图 5 值得关注的是,周期倍化失稳产生的亚谐运动区间上,在动态等效固有

频率  $\bar{\omega}_{xx}$ 、 $\bar{\omega}_{yy}$  再次趋近 2:1 比值过程中,系统在  $A_1 - A_2$  区间发生更为复杂的周期(图 7(c))、准周期(图 7(d))乃至混沌运动(图 7(a)、(b)).显然,系统的分岔行为与动态刚度特性紧密关联.实际转子系统在运行过程中随着工况的变化,转速、轴承游隙、温度、磨损等各种参数势必对轴承的动态刚度产生复杂的影响,因此需要充分考虑系统实际的运行状态.这与从动态刚度、轴承-转子系统一体化角度<sup>[19,25,27]</sup>进行轴承-转子系统设计的理念一致.

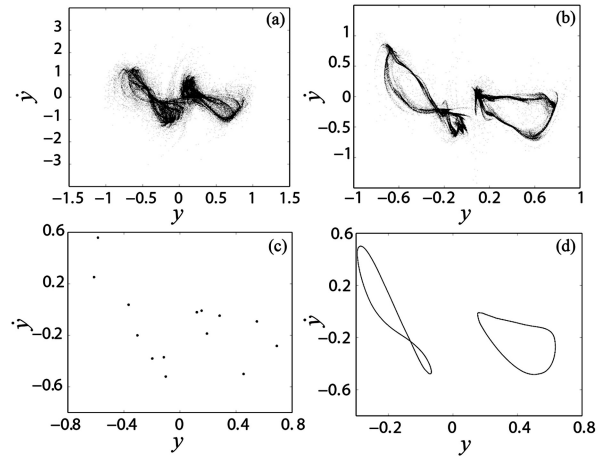


图 7 当  $\delta_0 = 6.0 \mu\text{m}$  时,系统在  $\Omega$  取 (a) 225 rad/s、(b) 226 rad/s、(c) 226.5 rad/s 和 (d) 227 rad/s 时响应的 Poincaré 映射

Fig.7 For  $\delta_0 = 6.0 \mu\text{m}$ , Poincaré maps of the response for  $\Omega$  at (a) 225 rad/s, (b) 226 rad/s, (c) 226.5 rad/s and (d) 227 rad/s

### 4 结论

球轴承非线性因素带来的滞后共振行为会给轴承-转子系统带来突跳、冲击作用,进而可对转子的运行稳定性和安全性带来影响.因此,分析此非线性系统的动态刚度特性,对于预测乃至避开系统的 VC 接触共振区间具有重要意义.在本文中,针对轴承非线性时变刚度特性对系统 VC 共振及其分岔行为影响的专门研究尚少的情况,采用理论和数值方法相结合,深入探讨了系统动态刚度特性与主共振区间复杂运动分岔行为的内在关联.研究指出非共振区间的动态等效固有频率对于预测系统 VC 接触共振位置具有一定的参考价值.另外,发现当系统不同自由度方向上的固有频率值接近 1:2 比例关系时,系统可能产生强烈的内共振,进而诱发响应的周期倍化分岔甚至准周期、混沌振动.该研究对球轴承复杂共振响应的控制具有潜在的理论意义和工程价值.

## 参 考 文 献

- 1 Fukata S, Gad E H, Kondou T, et al. On the radial vibrations of ball bearings (computer simulation). *Bulletin of the JSME*, 1985,28(239):899~904
- 2 Mevel B, Guyader J L. Routes to chaos in ball bearings. *Journal of Sound and Vibration*, 1993,162(3):471~487
- 3 Tiwari M, Gupta K. Effect of radial internal clearance of a ball bearing on the dynamics of a balanced horizontal rotor. *Journal of Sound and Vibration*, 2000,238(5):723~756
- 4 Sankaravelu A, Noah S T, Burger C P. Bifurcation and chaos in ball bearings. *ASME Nonlinear and Stochastic Dynamics*, 1994,AMD-192(78):313~325
- 5 Ghafari S H, Abdel-Rahman E M, Golnaraghi F, et al. Vibrations of balanced fault-free ball bearings. *Journal of Sound and Vibration*, 2010,329(9):1332~1347
- 6 Kostek R. Simulation and analysis of vibration of rolling bearing. *Key Engineering Materials*, 2014,588:257~265
- 7 Zhang Z Y, Chen Y S, Li Z G. Influencing factors of the dynamic hysteresis in varying compliance vibrations of a ball bearing. *Science China:Technological Sciences*, 2015,58(5):775~782
- 8 Zhang Z Y, Chen Y S, Cao Q J. Bifurcations and hysteresis of varying compliance vibrations in the primary parametric resonance for a ball bearing. *Journal of Sound and Vibration*, 2015,350:171~184
- 9 Jin Y L, Yang R, Hou L, et al. Experiments and numerical results for varying compliance contact resonance in a rigid rotor-ball bearing system. *ASME Journal of Tribology*, 2017,139:041103-1
- 10 Sunnersjö C S. Varying compliance vibrations of rolling bearings. *Journal of Sound and Vibration*, 1978,58(3):363~373
- 11 Rahnejat H, Gohar R. The vibrations of radial ball bearings. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, 1985,199:181~193
- 12 Mevel B, Guyader J L. Experiments on routes to chaos in ball bearings. *Journal of Sound and Vibration*, 2008,318(3):549~564
- 13 Tiwari M, Gupta K, Prakash O. Dynamic response of an unbalanced rotor supported on ball bearings. *Journal of Sound and Vibration*, 2000,238(5):757~779
- 14 Bai C Q, Xu Q Y, et al. Nonlinear stability of balanced rotor due to effect of ball bearing internal clearance. *Applied Mathematics and Mechanics (English Edition)*, 2006,27(2):175~186
- 15 崔立. 航空发动机高速滚动轴承及转子系统的动态性能研究[博士学位论文]. 哈尔滨:哈尔滨工业大学, 2008 (Cui L. Research on dynamic performances of high-speed rolling bearing and rotor system of aero-engine[Ph. D Thesis]. Harbin:Harbin Institute of Technology, 2008 (in Chinese))
- 16 邓四二,付金辉,王燕霜,等. 航空发动机滚动轴承-双转子系统动态特性分析. *航空动力学报*, 2013,28(1):195~204 (Deng S E, Fu J H, Wang Y S, et al. Analysis on dynamic characteristics of aero-engine rolling bearing/dual-rotor system. *Journal of Aerospace Power*, 2013,28(1):195~204 (in Chinese))
- 17 Zhou R S. Surface topography and fatigue life of rolling contact bearing. *Tribology Transactions*, 1993,36(3):329~340
- 18 Burrier J, Harold I. Optimizing the structure and properties of silicon nitride for rolling contact bearing performance. *Tribology Transactions*, 1996,39(2):267~285
- 19 Harris T A. *Rolling Bearing Analysis (4th Edition)*. New York: John Wiley & Sons, 2001
- 20 Nayak R. Contact vibrations. *Journal of Sound and Vibration*, 1972,22(3):297~322
- 21 Rigaud E, Perret-Liaudet J. Experiments and numerical results on non-linear vibrations of an impacting hertzian contact. part 1: harmonic excitation. *Journal of Sound and Vibration*, 2003,265(2):289~307
- 22 罗继伟,罗天宇. 滚动轴承分析计算与应用. 北京:机械工业出版社, 2009 (Luo J W, Luo T Y. *Rolling Bearing Analysis, Calculation and Application*. Beijing: China Machine Press, 2009 (in Chinese))
- 23 Gupta T C, Gupta K, Sehgal D K. Instability and chaos of a flexible rotor ball bearing system: an investigation on the influence of rotating imbalance and bearing clearance. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 2011,133(8):082501
- 24 Bai C Q, Xu Q Y, Wang J Y. Effects of flexible support stiffness on the nonlinear dynamic characteristics and stability of a turbopump rotor system. *Nonlinear Dynamics*, 2011,64:237~252
- 25 Walford T L H, Stone B J. The measurement of the radial stiffness of rolling element bearings under oscillating. *Pro-*

- ceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science, 1980,22: 175~181
- 26 Tamura H, Tsuda Y. On the spring characteristics of a ball bearing. *Bulletin of JSME*, 1980,23(180):961~969
- 27 Liew H V, Lim T C. Analysis of time-varying rolling element bearing characteristics. *Journal of Sound and Vibration*, 2005,283:1163~1179
- 28 张思进,王紫业,文桂林. 含间隙齿轮碰振系统的全局动力学分析. *动力学与控制学报*, 2018,16(2):129~135 (Zhang S J, Wang J Y, Wen G L. Global dynamic analysis of gear vibration system with clearance. *Journal of Dynamics and Control*, 2018,16(2):129~135 (in Chinese))
- 29 Nayfeh A H, Mook D T. *Nonlinear Oscillations*. New York: John Wiley & Sons, 1995
- 30 胡海岩. *应用非线性动力学*. 北京:航空工业出版社, 2000 (Hu H Y. *Applied Nonlinear Dynamics*. Beijing: Aviation Industry Press, 2000 (in Chinese))
- 31 孙莹,张伟. 1:1内共振环形桁架天线的稳定性分析. *动力学与控制学报*, 2018,16(3):281~288 (Sun Y, Zhang W. Analysis on stability of circular mesh antenna with 1:1 internal resonance. *Journal of Dynamics and Control*, 2018,16(3):281~288 (in Chinese))

## NONLINEAR DYNAMIC STIFFNESS CHARACTERISTICS AND COMPLICATED RESONANCE BEHAVIORS OF BALL BEARINGS\*

Dong Wenkai<sup>1</sup> Zhang Zhiyong<sup>1,2†</sup> Rui Xiaoting<sup>2</sup> Chen Yushu<sup>3</sup> Jin Yulin<sup>4</sup>

(1.School of Science, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing 210094, China)

(2.Institute of Launch Dynamics, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing 210094, China)

(3.School of Astronautics, Harbin Institute of Technology, Harbin 210094, China)

(4.School of Aeronautics and Astronautics, Sichuan University, Chengdu 610065, China)

**Abstract** The rolling bearing has the advantages of low friction, withstanding large transient overloads and small volume, which makes it as a major bearing element for rotating machinery including aero-engines, gas turbines and rocket motors. The varying compliance (VC) vibration is an inevitable parametrical vibration due to time-varying stiffness from rolling element revolution. Hysteretic VC resonances resulting from the Hertzian contact supporting stiffness of bearings have been found in many related studies. The hysteretic jumping vibration not only affects the operational stability and safety of the rotor system, but also induces cracks and fatigue failures of the bearing and other components. In this paper, by analyzing the characteristics of dynamic time-varying stiffness of the ball bearing, a method for estimating the VC resonant intervals was proposed by employing the dynamic natural frequency of the system. Based on this method, the inherent associations between the dynamic stiffness and the bifurcation of complicated motions in primary resonances were revealed. It is found that the system may emerge strong internal resonance when the natural frequency values of different freedoms are close to the 1:2, which induces period doubling response and even quasi-periodic and chaotic motions. This study may be beneficial to control the complicated resonant responses of ball bearings.

**Key words** ball bearing, varying compliance, dynamic stiffness, bifurcation, hysteretic resonances

Received 8 May 2018, revised 27 June 2018.

\* The project supported by the National Natural Science Foundation of China(11602108, 11472135), Natural Science Foundation of Jiangsu Province (BK20160820), Science Challenge Project(TZ2016006-0104).

† Corresponding author E-mail: zhiyzhang@njust.edu.cn