

# 相关白噪声激励下双稳态 Duffing-Van der Pol 系统的随机分岔\*

刘坤峰 靳艳飞†

(北京理工大学 宇航学院力学系, 北京 100081)

**摘要** 研究了相关乘性和加性高斯白噪声激励下, 双稳态 Duffing-Van der Pol 系统的随机 P-分岔和 D-分岔; 利用随机平均法, 得出系统幅值稳态概率密度的理论表达式, 以及随机 P-分岔发生的临界参数条件; 通过分析概率密度曲线形状的变化, 发现阻尼系数、加性和乘性噪声强度均可诱导系统出现随机 P-分岔, 但对系统分岔区域的影响有着明显的不同, 同时 Monte-Carlo 数值模拟验证了理论分析的有效性. 此外, 利用 Wolf 算法得到系统的最大 Lyapunov 指数, 并分析了系统的稳定性和随机 D-分岔, 发现加性和乘性噪声强度以及阻尼系数  $\alpha_1$  的增大, 均会使系统趋于不稳定, 而阻尼系数  $\varepsilon, \alpha_2$  的增大, 可以增强系统的稳定性.

**关键词** 随机分岔, 相关噪声, 随机平均法, 最大 Lyapunov 指数

DOI: 10.6052/1672-6553-2019-019

## 引言

随机分岔的研究始于 20 世纪 80 年代, 引起了数学、物理、化学、工程等领域的普遍关注. 随机分岔是非线性系统在噪声作用下产生的一种典型的非线性现象, 反映了临界分岔系数对于弱随机扰动的敏感性<sup>[1-4]</sup>. 一般地讲, 随机分岔主要有两种情况: 一种是通过观察稳态概率密度曲线的形状随参数的变化, 来判断系统是否发生随机 P-分岔, P-分岔是一种静态概念. 吴志强等<sup>[5,6]</sup>通过奇异性理论刻画随机 P-分岔发生的临界参数条件, 讨论了噪声和系统参数对三稳态 Duffing-Van der Pol 系统的随机 P-分岔和稳态响应的影响. Xu 等<sup>[7,8]</sup>应用随机平均法, 分别研究了色噪声和 Lévy 稳定噪声激励下双稳态 Duffing-Van der Pol 振子响应的随机 P-分岔现象, 分析了系统参数、噪声强度对稳态概率密度的影响; 另一种是通过观察最大 Lyapunov 指数符号的正负变化, 来判断系统是否发生随机 D-分岔, D-分岔是一种动态概念. 我们对 D-分岔的分析, 建立在最大李雅普诺夫指数数值符号瞬变的基础之上<sup>[9-13]</sup>, 故研究 D-分岔的关键, 就在于建立有噪声激励时对最大

Lyapunov 合适的定义以及能够高效、准确地计算最大 Lyapunov 指数的算法. 从 Wei 等<sup>[14]</sup>的研究中可以看到, 使用不同的算法来计算最大 Lyapunov 指数, 将会得到不同的分岔点. 在目前来看, 使用较为普遍的是 Wolf 算法<sup>[15,16]</sup>, Feng 等<sup>[17]</sup>对带有时滞的 Duffing-Mathieu 系统的稳定性分析以及 Qiao 等<sup>[18]</sup>对可变质量 Duffing 系统的稳定性分析都使用 wolf 算法, 得到的最大 Lyapunov 指数与理论解有着非常好的一致性.

一般情况下, 加性噪声源于系统内部的涨落, 而乘性噪声来源于系统所处外部环境的涨落, 大多情况下乘性和加性噪声具有相互关联性, 并可能对系统动力学产生较大的影响. 曹力等<sup>[19]</sup>研究了互关联的噪声作用下的双稳态系统, 给出了相应的一致有色噪声近似. 李静辉等<sup>[20]</sup>研究了相关噪声下的非平衡相变, 发现乘性和加性噪声之间的互关联性对系统的相变有重要的作用. Mei 和 Xie 等<sup>[21-23]</sup>研究了互关联噪声作用下的非线性动力系统, 发现噪声之间的关联性, 能诱导平均首次穿越时间的曲线出现共振和抑制现象. 靳艳飞等<sup>[24,25]</sup>研究了色相关的乘性色噪声和周期调制噪声联合作用下, 线性系统的随机共振, 发现了真实的随机共振和传统的随机共

2018-05-28 收到第 1 稿, 2018-12-17 收到修改稿.

\* 国家自然科学基金资助项目 (11772048)

† 通讯作者 Email: jinyf@bit.edu.cn

振现象.但是针对相关噪声激励下非线性系统的随机分岔,相关研究还较少.本文研究了具有相关性的乘性和加性高斯白噪声作用下的双稳态 Duffing-Van der Pol 系统的随机分岔.利用随机平均法,计算得出系统幅值的稳态概率密度函数(PDF)曲线,通过观察曲线拓扑结构变化,并使用 Wolf 算法,计算出系统的最大 Lyapunov 指数,讨论了噪声强度、噪声互关联系数和系统参数对系统随机分岔的影响.

## 1 模型

考虑相关加性和乘性高斯白噪声激励下的 Duffing-Van der Pol 系统,其相应的随机微分方程可写为

$$\ddot{x} - (-\varepsilon + \alpha_1 x^2 - \alpha_2 x^4)\dot{x} + \omega^2 x + \alpha_0 x^3 = n(t) + x\xi(t) \quad (1)$$

其中,  $\varepsilon, \alpha_1$  和  $\alpha_2$  分别是线性和非线性阻尼系数,  $\omega$  为系统固有频率,  $\alpha_0$  是非线性刚度系数,且  $\alpha_0$  是一个小参量,取  $\alpha_0 = 0.002$ .  $n(t)$  和  $\xi(t)$  是相关的高斯白噪声,它们的统计性质满足以下条件:

$$\begin{aligned} \langle n(t) \rangle &= 0, \langle n(t)n(t') \rangle = 2D\delta(t-t'), \\ \langle \xi(t) \rangle &= 0, \langle \xi(t)\xi(t') \rangle = 2Q\delta(t-t'), \\ \langle n(t)\xi(t') \rangle &= 2\lambda\sqrt{DQ}\delta(t-t') \end{aligned} \quad (2)$$

其中,  $D$  和  $Q$  分别为加性噪声强度和乘性噪声强度,  $\lambda$  是乘性噪声和加性噪声之间的关联系数.

首先,对(1)式进行如下变换<sup>[26]</sup>

$$n_1(t) = n(t) - \lambda\sqrt{D/Q}\xi(t) \quad (3)$$

利用(3)式将(1)式变成如下不相关的高斯白噪声激励下的系统:

$$\ddot{x} - (-\varepsilon + \alpha_1 x^2 - \alpha_2 x^4)\dot{x} + \omega^2 x + \alpha_0 x^3 = n_1(t) + (x + \lambda\sqrt{D/Q})\xi(t) \quad (4)$$

可以证明,  $n_1(t)$  和  $\xi(t)$  是不相关的高斯白噪声,  $n_1(t)$  的统计性质为

$$\langle n_1(t)n_1(t') \rangle = 2D(1 - \lambda^2)\delta(t-t') \quad (5)$$

这样,我们就把原方程(1)变成了由两个不相关的高斯白噪声激励下的系统(4).以下的分析计算都是针对(4)式进行的.

## 2 双稳态 Duffing-Van der Pol 系统的稳态概率密度

在确定性情形下,当  $0 < \varepsilon < \alpha_1/8\alpha_2$  时,系统(1)的相图中最多有两个吸引子共存:分别是在原点附近的平衡点和一个稳定的极限环.

为讨论噪声激励下系统(1)的分岔问题,以下应用随机平均法求解系统幅值的稳态概率密度函数.首先,引入如下变换:

$$x(t) = a \cos\theta, \dot{x}(t) = -\omega a \sin\theta, \theta = \omega t + \phi. \quad (6)$$

将(6)式代入(4)式,得到关于振幅和相位的标准方程为

$$\begin{cases} \dot{a} = (-\varepsilon + \alpha_1 a^2 \cos^2\theta - \alpha_2 a^4 \cos^4\theta)a \sin^2\theta \\ \quad + \frac{\alpha_0}{\omega} a^3 \cos^3\theta \sin\theta - \frac{\sin\theta}{\omega^2} n_1(t) \\ \quad - (a \cos\theta + \lambda\sqrt{D/Q} \frac{\sin\theta}{\omega^2})\xi(t) \\ \dot{\phi} = (-\varepsilon + \alpha_1 a^2 \cos^2\theta - \alpha_2 a^4 \cos^4\theta)\sin\theta \cos\theta \\ \quad + \frac{\alpha_0}{\omega} a^2 \cos^4\theta - \frac{\cos\theta}{\omega^2 a} n_1(t) \\ \quad - \frac{1}{\omega^2} (\cos^2\theta + \frac{\lambda}{a} \cos\sqrt{D/Q})\xi(t) \end{cases} \quad (7)$$

应用随机平均法<sup>[27,28]</sup>,我们可以得到振幅对应的伊藤随机微分方程:

$$\begin{aligned} da &= \left( -\frac{\varepsilon a}{2} + \frac{\alpha_1 a^3}{8} - \frac{\alpha_2 a^5}{16} + \frac{3aQ}{8\omega^2} + \frac{D}{2a\omega^2} \right) dt \\ &\quad + \frac{1}{\omega} \sqrt{\frac{a^2 Q}{4} + D} dW(t) \end{aligned} \quad (8)$$

其中,  $W(t)$  是独立的单位 Wiener 过程,可以看出,振幅  $a$  不依赖于  $\phi$  的变化,故由(8)式可以得到关于振幅  $a$  的 Fokker-Planck-Kolmogorov (FPK) 方程

$$\begin{aligned} \frac{\partial p(a,t)}{\partial t} &= -\frac{\partial}{\partial a} \left[ \left( -\frac{\varepsilon a}{2} + \frac{\alpha_1 a^3}{8} - \frac{\alpha_2 a^5}{16} + \frac{3aQ}{8\omega^2} + \frac{D}{2a\omega^2} \right) p \right] \\ &\quad + \frac{1}{2\omega^2} \left( \frac{a^2 Q}{4} + D \right) \frac{\partial^2 p}{\partial a^2} \end{aligned} \quad (9)$$

在(9)式中,令  $\frac{\partial p(a,t)}{\partial t} = 0$ , 可得稳态概率密度的表达式为

$$p(a) = NM(a)^{c(a)} \exp(U(a)) \quad (10)$$

其中,

$$\begin{cases} M(a) = a(Qa^2 + 4D) \\ C(a) = \frac{-4\alpha_2 D^2 \omega^2 - 2\alpha_1 DQ\omega^2 - 2\varepsilon Q^2 \omega^2}{Q^3} \\ U(a) = \frac{\alpha_1 a^2 \omega^2}{2Q} + \frac{\alpha_2 a^2 D\omega^2}{Q^2} - \frac{\alpha_2 a^4 \omega^2}{8Q} \end{cases} \quad (11)$$

$N$  为归一化常数.

### 3 随机分岔

#### 3.1 随机P-分岔

根据(10)式,利用 $p(a)$ 拓扑性质的变化来讨论随机P-分岔.首先,根据 $\frac{dp(a)}{da} = 0$ 可得以下代数方程:

$$a^6 + b_1 a^4 + b_2 a^2 + b_3 = 0 \tag{12}$$

其中,  $b_1 = 2\alpha_1/\alpha_2$ ,  $b_2 = (8\epsilon\omega^2 - 2Q)/\omega^2\alpha_2$ ,

$$b_3 = -8D/\alpha_2\omega^2.$$

由(12)式可以得到系统的分岔参数临界条件为

$$4(3b_2 - b_1^2)^3 + (27b_3 - 9b_2b_3 + 2b_1^3)^2 = 0 \tag{13}$$

根据(13)式可以画出系统的三维分岔参数区间图,如图1所示.首先,我们先考虑在乘性噪声强度 $Q = 0.08$ 时,加性噪声强度 $D$ 和阻尼 $\epsilon$ 对分岔行为的影响.图2给出了 $Q = 0.08$ 时 $(\epsilon, D)$ 平面内的三维分岔区间图切片,所取参数为 $\omega=1, \alpha_0 = 0.02$ .图中点A和点B是分岔边界线和直线 $D = 0.005$ 的交点,坐标分别为A(0.005, 0.083), B(0.005, 0.149).

由图2可知,当 $(\epsilon, D)$ 取值落入白色区域时,稳态概率密度曲线呈双峰结构;反之,稳态概率密度曲线呈单峰结构.因此,加性噪声强度 $D$ 和阻尼系数 $\epsilon$ 都可以作为系统的分岔参数,当 $D$ 逐渐增大时,双峰区域将逐渐减小,且当 $D$ 增大到某一值时将不会出现双峰分布.

在下面的分析中,我们讨论了不同参数对系统

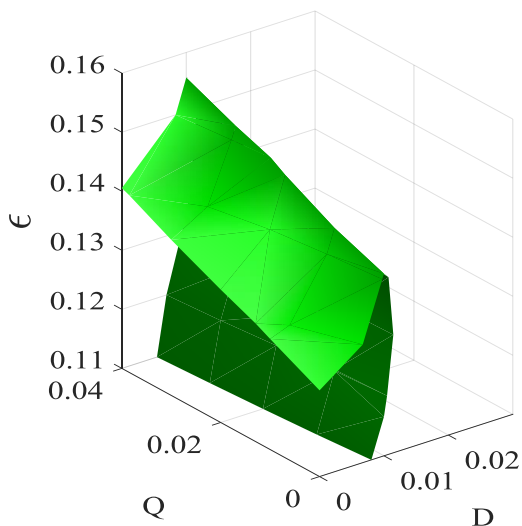


图1 系统(1)的三维分岔参数区间图

Fig.1 Three-dimensional bifurcation region diagram of system (1)

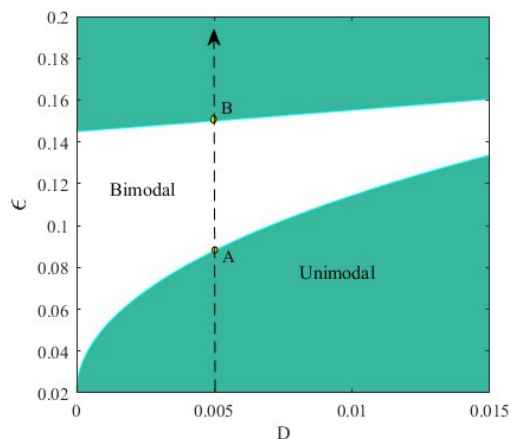


图2  $Q = 0.08$ 时 $(\epsilon, D)$ 平面内的分岔区间图

Fig.2 Bifurcation region diagram in the parameter plane  $(\epsilon, D)$  when  $Q = 0.08$

的稳态概率密度曲线的影响,并和数值模拟结果进行了对比.在Monte-Carlo数值模拟中,取初始条件为 $(x(0), \dot{x}(0)) = (0, 0)$ ,  $dt = 0.001$ ,模拟数据长度 $N = 10^7$ .在图3中,实线表示由(10)式得到的理论结果,符号线表示由方程(1)得到的数值结果.当阻尼系数取较小值 $\epsilon = 0.05$ 时(A点的下边取值),系统稳态概率密度只有一个单峰;当阻尼系数取 $\epsilon = 0.1$ 和 $\epsilon = 0.13$ 时(A点和B点之间取值),系统稳态概率密度为双峰结构;当阻尼系数取 $\epsilon = 0.17$ 时(B点的上边取值),稳态概率密度曲线又变为单峰.因此,随着阻尼系数的增大,系统的稳态概率密度曲线,经历了从单峰到双峰,再到单峰的变化,故系统发生了两次随机P-分岔,并且Monte-Carlo数值模拟得到的结果与理论计算的结果符合较好.

下面我们研究了非线性阻尼系数 $\alpha_1$ 和 $\alpha_2$ 对系统分岔行为的影响.图4给出了 $D = 0.005, Q = 0.08, \epsilon = 0.08, \omega = 1$ 时 $(\alpha_1, \alpha_2)$ 平面内的三维分岔

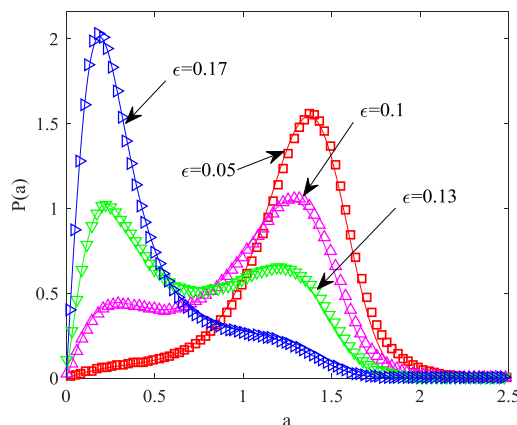


图3  $D = 0.005, \lambda = 0.5$ 时不同阻尼 $\epsilon$ 下振幅的稳态PDF曲线

Fig.3 Stationary PDF of amplitude under different damping coefficients when  $D = 0.005, \lambda = 0.5$

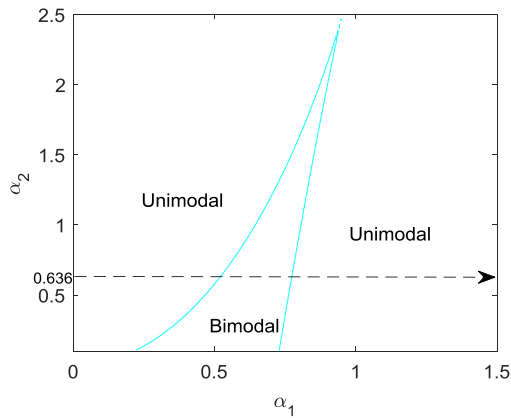


图 4  $(\alpha_1, \alpha_2)$  平面内的分岔区间图

Fig.4 Bifurcation region diagram in the parameter plane  $(\alpha_1, \alpha_2)$

区间图切片. 固定  $\alpha_2 = 0.636$ , 当  $\alpha_1$  沿着图 4 中的箭头方向在不同区域取值时, 图 5 给出相应的稳态概率密度曲线. 容易发现随着  $\alpha_1$  的增大, 振幅的稳态概率密度曲线, 经历了从单峰到双峰, 再到单峰的变化, 从而说明阻尼系数  $\alpha_1$  可以作为分岔参数, 引起随机 P-分岔的发生. 同样地, 在图 4 中固定  $\alpha_1$ , 改变  $\alpha_2$  的大小同样也能引起随机 P-分岔的发生, 在此不做赘述.

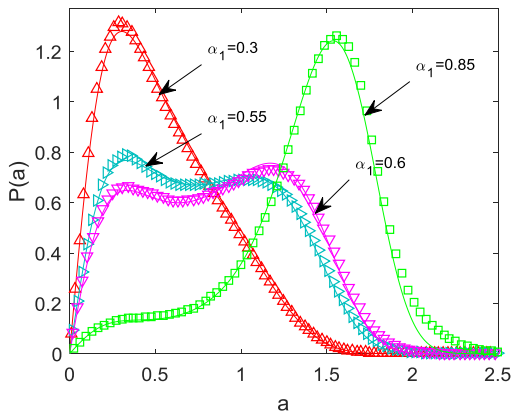


图 5  $\alpha_2 = 0.636, \lambda = 0.5$  时不同阻尼  $\alpha_1$  下幅值的稳态 PDF 曲线

Fig.5 Stationary PDF of amplitude under different damping coefficients  $\alpha_1$  when  $\alpha_2 = 0.636, \lambda = 0.5$

接下来, 我们将分析噪声强度及噪声之间的关联系数对系统分岔行为的影响. 图 6 给出了加性噪声强度  $D$  不同时,  $(\epsilon, Q)$  参数平面内分岔临界边界. 随着  $D$  的增加, 系统出现双稳态所对应的参数区域明显减小, 发生 P-分岔所需的阻尼值也不断增大, 说明  $D$  的增大在一定程度上可以抑制系统随机 P-分岔的发生, 同时也说明较小的  $D$  更容易激发出系统的双稳态响应. 图 7 给出了阻尼系数不同时,  $(D, Q)$  参数平面内三组分岔临界边界. 当阻尼系数取较小值时, 系统的分岔边界是一条单一的曲线;

增大阻尼系数, 分岔边界变成两条曲线; 继续增大阻尼, 系统的分岔边界将变成一个类似三角形的区域. 可以看出, 阻尼对分岔区域的影响很大.

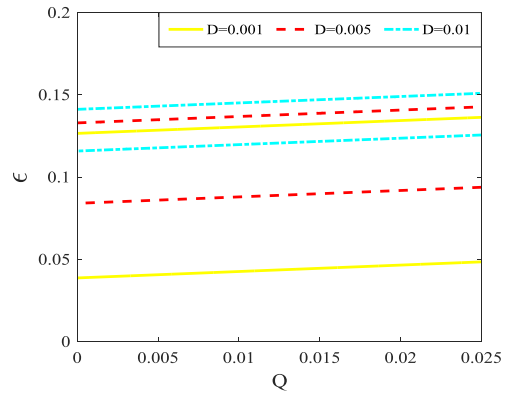


图 6 不同  $D$  下  $(\epsilon, Q)$  平面内的分岔参数区间图

Fig.6 Bifurcation region diagram in the plane  $(\epsilon, Q)$  for different  $D$

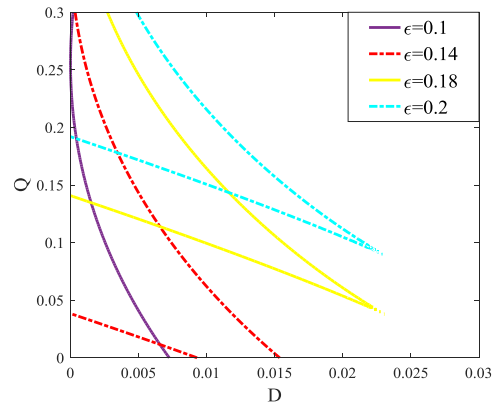


图 7 不同  $\epsilon$  下  $(D, Q)$  平面内的分岔参数区间图

Fig.7 Bifurcation region diagram in the plane  $(D, Q)$  for different  $\epsilon$

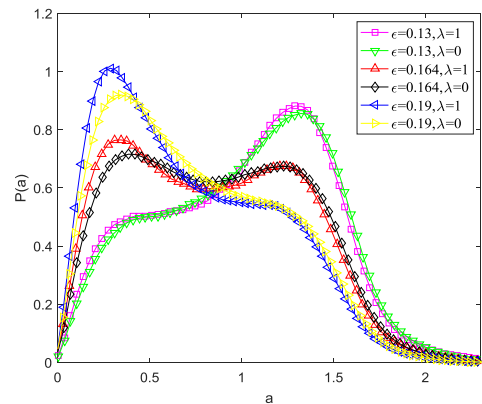


图 8 幅值稳态 PDF 随  $\lambda$  变化的曲线

Fig.8 Curves of stationary probability density function of amplitude for different  $\lambda$

利用随机平均法计算稳态概率密度式 (10) 时, 噪声关联系数  $\lambda$  被平均掉了, 故式 (10) 不含有  $\lambda$ . 图 8 中, 我们通过 Monte-Carlo 数值模拟讨论  $\lambda$  对随机 P-分岔的影响. 固定  $D = 0.005, Q = 0.08$  和  $\omega = 1$ .



由图8可见,在不同的噪声互关联系数作用下,稳态概率密度曲线基本上重合在一起,有着相同的变化趋势,峰的个数没有改变,说明噪声互关联系数不能诱导随机P-分岔的发生.

### 3.2 随机D-分岔

利用Oseledec乘法定理<sup>[29]</sup>,Lyapunov指数 $LE$ 的数学表达式可以写成

$$LE = \lim_{t \rightarrow \infty} \ln \frac{\|\mathbf{u}(t)\|}{\|\mathbf{u}(0)\|} \quad (14)$$

其中, $\mathbf{u}(t)$ 表征原方程解轨迹相邻两点间在 $t$ 时刻的距离, $\|\cdot\|$ 为欧几里德向量范数.通过(16)式可计算出系统的最大Lyapunov指数 $LE_{\max}$ .当 $LE_{\max} > 0$ 时,系统是不稳定的;当 $LE_{\max} < 0$ 时,系统是稳定的.可以根据 $LE_{\max}$ 的符号变化判断系统随机D-分岔的发生.利用Wolf算法<sup>[15,16]</sup>计算得到系统(1)的最大Lyapunov指数.

在图9中固定 $Q = 0.01, \alpha_1 = 1, \omega = 0.8$ ,作出了最大Lyapunov指数随加性噪声强度 $D$ 的变化曲线.由图可见,随着 $\varepsilon$ 和 $\alpha_2$ 的增大,对于较小的 $D$ , $LE_{\max}$ 由正变负,可以通过取较大的 $\varepsilon$ 和 $\alpha_2$ 使系统由不稳定变为稳定;但是对于较大的 $D$ , $LE_{\max}$ 恒为正,系统不稳定.图10中固定 $D = 0.001, \alpha_2 = 1, \omega = 0.8$ ,画出最大Lyapunov指数随 $Q$ 的变化曲线.当 $Q$ 较小时,我们发现 $\alpha_1$ 的增大会使 $LE_{\max}$ 由负变正,即系统由稳定变为不稳定.

图11和图12中选取 $\varepsilon = 0.2, \alpha_1 = \alpha_2 = 1, \omega = 0.8$ ,研究了不同关联系数 $\lambda$ 下最大Lyapunov指数随 $Q$ 的变化.在图11中固定 $D = 0.02$ ,我们发现 $\lambda$ 取不同值时 $LE_{\max}$ 随 $Q$ 的变化曲线基本上相同,随着乘性噪声强度 $Q$ 的增加,系统由稳定逐渐变为不稳定.当 $D = 0.2$ 时,由图12可以看出,增大 $\lambda$ 的值可以减缓系统向不稳定发展的速度.因此,在较大乘性和加性噪声强度的激励下,噪声互关联系数对系统的稳定性有较大影响.由图9-12可以看出,系统阻尼系数 $\varepsilon, \alpha_1$ 和 $\alpha_2$ 以及噪声强度均可以诱导系统出现随机D-分岔.

## 4 结论

本文主要研究了相关乘性和加性高斯白噪声激励下双稳态Duffing-Van der Pol系统的随机分岔.利用随机平均法求解系统振幅的稳态概率密度,并用Monte-Carlo数值模拟验证了理论分析的

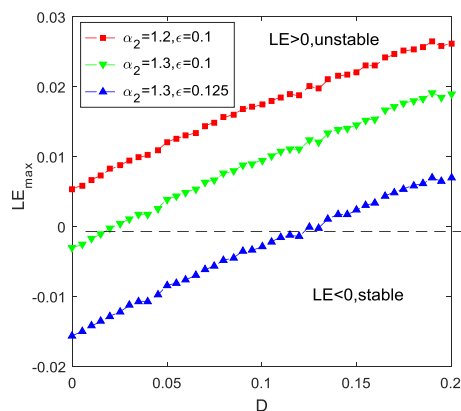


图9  $Q = 0.01, \lambda = 0.1$ 时最大Lyapunov指数作为 $D$ 的函数随 $\alpha_2$ 和阻尼系数 $\varepsilon$ 变化的曲线

Fig.9 Largest Lyapunov exponent as a function of  $D$  with different  $\alpha_2$  and  $\varepsilon$  when  $Q = 0.01, \lambda = 0.1$

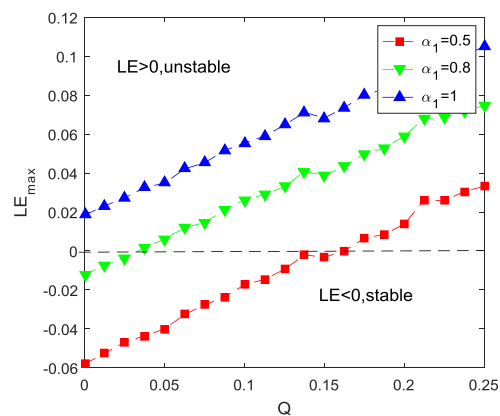


图10  $D = 0.001, \lambda = 0.1$ 时最大Lyapunov指数作为 $Q$ 的函数随 $\alpha_1$ 变化的曲线

Fig.10 Largest Lyapunov exponent as a function of  $Q$  with different  $\alpha_1$  and  $D = 0.001, \lambda = 0.1$

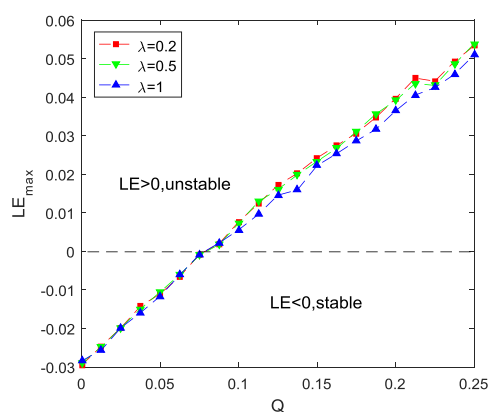


图11  $D = 0.02$ 时最大Lyapunov指数作为 $Q$ 的函数随 $\lambda$ 变化的曲线

Fig.11 Largest Lyapunov exponent as a function of multiplicative noise intensity with different  $\lambda$  and  $D = 0.02$

有效性,同时利用Wolf算法计算得到了系统的最大Lyapunov指数,并对系统的稳定性作出分析.研究结果表明:系统阻尼系数、加性和乘性噪声强度

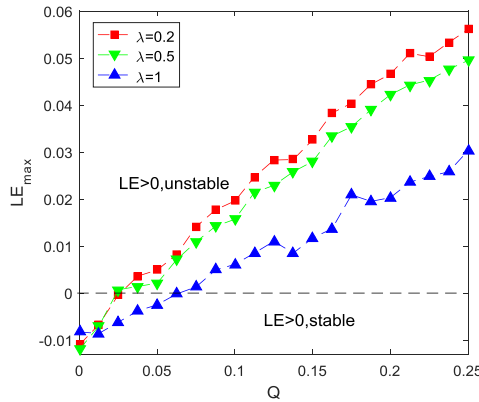


图12  $D = 0.2$ 时最大Lyapunov指数作为 $Q$ 的函数随 $\lambda$ 变化的曲线

Fig.12 Largest Lyapunov exponent as a function of multiplicative noise intensity with different  $\lambda$  and  $D = 0.2$

对系统分岔参数区域的影响有着明显的不同,且均能诱导系统发生随机P-分岔;增大加性和乘性噪声强度,均会使系统由稳定趋于不稳定,并诱发随机D-分岔;增大阻尼系数 $\varepsilon$ 和 $\alpha_2$ ,可以增强系统的稳定性,而 $\alpha_1$ 的增大会削弱系统的稳定性.改变噪声互关联系数对稳态概率密度的影响很小,但在较大强度的噪声激励下,噪声互关联系数对系统的稳定性影响较大.

### 参 考 文 献

- Namachchivaya N S. Stochastic bifurcation. *Applied Mathematics & Computation*, 1990, 39(3): 37~95
- Meunier C, Verga A D. Noise and bifurcation. *Journal of Statistical Physics*, 1988, 50 (1-2): 345~375
- 刘先斌,陈虬.实噪声参激Hopf分叉系统研究.力学学报,1997,29(2):158~166(Liu X B, Chen Q. On the hopf bifurcation system in the presence of parametric real noises. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 1997, 29(2):158~166 (in Chinese))
- Naess A. Chaos and nonlinear stochastic dynamics. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 2000, 15(1): 37~47
- 吴志强,郝颖.乘性色噪声激励下三稳态 Van der Pol-Duffing 振子随机 P-分岔.物理学报,2015,64(6): 60501~060501 (Wu Z Q, Hao Y. Stochastic P-bifurcations in tristable Van der Pol-Duffing oscillator with multiplicative colored noise. *Acta Physica Sinica*, 2015, 64(6):60501~060501 (in Chinese))
- 郝颖,吴志强.三稳态 Van der Pol-Duffing 振子的随机 P-分岔.力学学报,2013,45(2): 257~264(Hao Y, Wu Z Q. Stochastic P-bifurcations of tristable Van der Pol-Duffing oscillator. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2013, 45(2): 257 ~264 (in Chinese))
- Xu Y, Gu R C, Zhang H Q. Stochastic bifurcations in a bistable Duffing-Van der Pol oscillator with colored noise. *Physical Review E*, 2011, 83(2):056215
- 顾仁财,许勇,郝孟丽. Lévy 稳定噪声激励下的 Duffing-Van der Pol 振子的随机分岔.物理学报,2011,60(6): 157~161 (Gu R C, Xu Y, Hao M L. Stochastic bifurcations in a bistable Duffing-Van der Pol oscillator with Lévy stable noise. *Acta Physica Sinica*, 2011, 60(6):157~161 (in Chinese))
- Arnold L. Random dynamical systems. Random dynamical systems, Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 1991
- Arnold L, Namachchivaya N S, Schenk-Hoppe K R. Toward an understanding of stochastic Hopf bifurcation: a case study. *International Journal of Bifurcation & Chaos*, 1996, 6(11):1947~1975
- Arnold L, Schmalfuss B. Lyapunov's second method for random dynamical systems. *Journal of Differential Equations*, 2001, 177(1):235~265
- Schenk-Hoppe K R. Bifurcation scenarios of the noisy Duffing-Van der Pol oscillator. *Nonlinear Dynamics*, 1996, 11(3):255~274
- Baxendale P H. A stochastic hopf bifurcation. *Probability Theory & Related Fields*, 1994, 99(4):581~616
- Wei J G, Leng G. Lyapunov exponent and chaos of Duffing's equation perturbed by white noise. *Applied Mathematics & Computation*, 1997, 88(1):77~93
- Wolf A, Swift J B, Swinney H L, et al. Determining Lyapunov exponents from a time series. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 1985, 16(3):285~317
- Wolf A, Vastano J A. Intermediate length scale effects in Lyapunov exponent estimation. Berlin, Heidelberg: Springer, 1986
- Feng C S, Chen S L. Stochastic stability of duffing-mathieu system with delayed feedback control under white noise excitation, *Communications in Nonlinear Science & Numerical Simulation*, 2012, 17(10):3763~3771
- Qiao Y, Xu W, Jia W T, et al. Stochastic stability of variable-mass Duffing oscillator with mass disturbance modeled as Gaussian white noise. *Nonlinear Dynamics*, 2017, 89(1):607~616
- Cao L, Wu D J. Bistable kinetic model driven by correlated noises: unified colored-noise approximation. *Physical Review E*, 1995, 52(3):3228~3231
- Li J H, Huang Z Q. Nonequilibrium phase transition in the case of correlated noises. *Physical Review E*, 1996, 53(4):3315~3318
- Xie C W, Mei D C. Effects of cross-correlated noises on the relaxation time of the bistable system. *Chinese Physics Letters*, 2003, 12(11):1208~1212
- Xie C W, Mei D C. Effects of correlated noises on the in-

- tensity fluctuation of a single-mode laser system. *Physics Letters A*, 2004, 323(5): 421~426
- 23 Mei D C, Xie C W. Effects of cross correlation on the relaxation time of a bistable system driven by cross-correlated noise. *Physical Review E*, 2003, 68 (5) : 051102~051108
- 24 靳艳飞, 徐伟, 李伟, 等. 具有周期信号调制噪声的线性模型的随机共振. 物理学报, 2005, 54(6): 96~101 (Jin Y F, Xu W, Li W, et al. Stochastic resonance for periodically modulated noise in a linear system. *Acta Physica Sinica*, 2005, 54(6):96~101(in Chinese))
- 25 Jin Y F, Xu W, Xu M, et al. Stochastic resonance in linear system due to dichotomous noise modulated by bias signal. *Journal of Physics A: Mathematical General Physics*, 2005, 38(17):3733~3742
- 26 Budini A A, Caceres M O. Functional characterization of linear delay langevin equations. *Physical Review E*, 2004, 70(4): 046104
- 27 Roberts J B, Spanos P D. Stochastic averaging: an approximate method of solving random vibration problems. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 1986, 21 (2):111~134
- 28 Zhu W Q, Cai G Q. A generalization of the stochastic averaging method. *Zhejiang Daxue Xuebao*, 1986 (2) : 71~82
- 29 Elskens Y. Invariance of stretching and expansion spectra, and Oseledec' multiplicative ergodic theorem. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 1997, 100(1): 142~144

## STOCHASTIC BIFURCATION IN BISTABLE DUFFING-VAN DER POL SYSTEM DRIVEN BY CORRELATED WHITE NOISES \*

Liu Kunfeng JinYanfei †

(Department of Mechanics, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, China)

**Abstract** In this paper, the stochastic bifurcation in a bistable Duffing-Van der Pol oscillator driven by correlated multiplicative and additive Gaussian white noises was studied. By using the stochastic averaging method, the stationary probability density function of amplitude for the Duffing-Van der Pol oscillator and the critical parameter condition for stochastic P-bifurcation were obtained. Through the changes in the shape of stationary probability density function, it was found that both the damping coefficients and intensity of the multiplicative and additive noise may induce the stochastic P-bifurcation, but they have significantly different effects on the bifurcation regions. Meanwhile, the theoretical results were verified by Monte-Carlo simulations. Moreover, the largest Lyapunov exponent was calculated by the Wolf's algorithm to evaluate the system stability. The results showed that both the increases of the coefficient of negative damping and the noise intensity can drive the system into an unstable state and induce D-bifurcation, and the system stability can be enhanced with increasing the coefficients of positive damping.

**Key words** stochastic bifurcation, correlated noises, stochastic averaging method, largest Lyapunov exponent

Received 28 May 2018, revised 17 December 2018.

\* The project supported by the National Natural Science Foundation of China (11772048)

† Corresponding author E-mail: jinyf@bit.edu.cn