

# 叶片组的变参数环板等效建模方法\*

姜萌<sup>1</sup> 张美艳<sup>1</sup> 郭其威<sup>2</sup> 唐国安<sup>1†</sup>

(1.复旦大学 航空航天系, 上海 200433) (2.上海宇航系统工程研究所, 上海 201108)

**摘要** 复杂转子系统由多级叶盘组成,在利用有限元等方法分析时,需建立十分精细、规模巨大的三维有限元模型,即使利用叶盘的回转对称特性,单扇区的自由度数目依然庞大,计算效率有待进一步提高.为降低转子整体的自由度,可从等效单级叶盘模型出发,针对复杂叶片组部件进行等效建模.等效后的叶片组为变参数各向异性环形板,在保证等效前后模型整体的质量和惯量相等的条件下,通过调节等效环板模型的几何和材料参数,使得主要固有频率和模态具有相似的特征.文章以航空发动机带叶冠的低压涡轮叶盘模型为应用对象,将其精细的三维有限元模型作为初始模型,选择三维实体单元作为等效环板的单元类型,通过理论推导和数值计算得到建立等效模型所需的几何和材料参数,验证了等效方法的可行性和高效性.

**关键词** 振动, 叶片, 轮盘, 转子, 模型缩聚

DOI: 10.6052/1672-6553-2018-030

## 引言

转子的振动特性长期受到学者关注,从最初经典的两端简支、带刚性圆盘弹性转轴的 Jeffcott 转子<sup>[1]</sup>,到单盘转子<sup>[2]</sup>,再到含多个轮盘的多盘转子<sup>[3]</sup>,研究理论和分析方法不断丰富完善.张文<sup>[4]</sup>指出,高转速转子中应将叶盘看作弹性体,建立柔盘-柔轴的全弹性转子模型进行处理.但是,如果叶片-轮盘-轴各部件都采用有限元模型描述,那么完整的转子模型自由度将十分庞大,计算中须耗费大量时间,在结构优化等应用中存在困难.因此,对叶片-轮盘这一转子中的基本构件进行模型降阶依然具有重要意义,通过降低单级弹性叶-盘模型的自由度可有效提高整体计算的效率.

有限单元法是一种普遍应用的数值方法,也成为许多商用计算程序分析叶盘动力学特性的基本算法.Hsieh 和 Abel<sup>[5]</sup>综合考虑旋转叶-盘的转动非线性,分别利用分布和集中质量方法建立有限元模型.Genta 和 Tonoli<sup>[6]</sup>将叶片组的陀螺效应和离心载荷考虑在内,建立叶盘组合体的有限元模型.周传月等<sup>[7]</sup>将 Nastran 应用于某型叶盘组合体的固有振动特性分析中.

为缩减模型总自由度、提高计算效率,一些基于有限元模型的简化数值算法也日益成熟.常见的简化算法有三类:利用叶盘回转对称特性的矩阵变换<sup>[8,9]</sup>、假设模态法<sup>[10]</sup>和模态综合法<sup>[11,12]</sup>.有学者则根据叶-盘结构的特点,采用等效的少量自由度模型进行建模,提高计算效率.如 Kaza 和 Kiell<sup>[13]</sup>等将叶片等效为弹性梁模型,Turhan 和 Bulut<sup>[14]</sup>建立了以欧拉-伯努利梁来代替叶片的理想模型.

在优化设计等应用中,含多级叶盘的转子以及定子、机匣等组件的发动机系统模型的规模庞大,需进一步发展面向多级叶片-轮盘系统的动力学分析的方法.一些学者提出了相应的分析模型和算法<sup>[15,16]</sup>.Pan 等<sup>[17]</sup>建立了叶盘轴结构混合维度的有限元模型,实现三维实体叶片与二维轴对称盘轴的耦合模态分析,能够较大地提高叶轮类结构的分析效率而不失分析精度.本文作者根据周向环绕的单级叶片组的物理参数和模态分析结果,将叶片组等效为固有特性相近的正交异性环形板<sup>[18]</sup>,用轴对称模型表示单级叶盘组合体,从而降低模型的自由度.

本文基于之前的研究,提出了新的正交各向异性轴对称叶盘组合体模型,能表现出组合体轴向弯曲与周向扭转的振动耦合特性.采用的方法是通过

2017-09-25 收到第 1 稿,2017-11-02 收到修改稿.

\* 国家自然科学基金(11572089)资助项目和上海市科技启明星计划(15QB1404600)资助项目

† 通讯作者 E-mail:tangguoan@fudan.edu.cn

多个工况条件下的静力学等效估算正交异性弹性参数的初值,再以固有频率的误差作为目标函数,由极小化过程确定弹性参数的终值.

## 1 叶片组的各向异性环板等效模型

图1示意的是具体的研究对象,一个带叶冠的叶盘组合体,外围叶冠和中部轮盘均可以作为回转体建模,不需缩聚.周向排列的多条叶片将被等效成正交异性环形板,如图2所示.

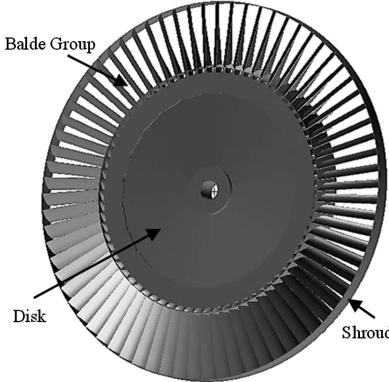


图1 研究对象:带冠叶盘组合体模型

Fig.1 Object: Bladed disk model with shroud

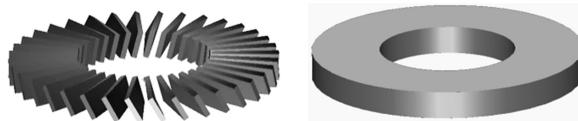


图2 叶片组等效前后模型

Fig.2 Initial and equivalent model of blade group

### 1.1 环板的厚度函数

记叶片组总质量为  $M_b$ , 绕转轴的转动惯量为  $I_b$ , 材料密度为  $\rho_b$ . 叶片内外缘距转轴的半径分别是  $R_0$  和  $R_1$ . 由于模型等效并不需要唯一性, 因此不妨假设环形板密度与初始叶片组相等, 即  $\rho=\rho_b$ , 而厚度沿径向呈线性变化. 因此厚度函数的表达式为:

$$\hat{h}(r)=h_0 \frac{R_1-r}{R_1-R_0}+h_1 \frac{r-R_0}{R_1-R_0} \quad (1)$$

其中,  $h_0$  和  $h_1$  是环板内外缘的待定厚度值.

根据厚度函数  $\hat{h}(r)$ , 通过积分得到环板的质量和转动惯量分别为:

$$\begin{cases} \hat{M}=\rho \int_{R_0}^{R_1} \int_0^{2\pi} \hat{h}(r) r d\theta dr = \frac{\pi \hat{\rho}}{3} (h_0 \hat{M}_0 + h_1 \hat{M}_1) \\ \hat{I}=\hat{\rho} \int_{R_0}^{R_1} \int_0^{2\pi} \hat{h}(r) r^3 d\theta dr = \frac{\pi \hat{\rho}}{10} (h_0 \hat{I}_0 + h_1 \hat{I}_1) \end{cases} \quad (2)$$

其中:

$$\begin{cases} \hat{M}_0=R_1^2+R_1 R_0-2 R_0^2 \\ \hat{M}_1=2 R_1^2-R_0^2-R_1 R_0 \\ \hat{I}_0=R_1^4+R_0^3 R_1+R_0 R_1^3+R_1^2 R_0^2-4 R_0^4 \\ \hat{I}_1=4 R_1^4-R_1^3 R_0-R_1^2 R_0^2-R_1 R_0^3-R_0^4 \end{cases}$$

等效环板与初始叶片组必须具有相同的质量和转动惯量, 即  $\hat{M}=M_b$ ,  $\hat{I}=I_b$ . 由(2)式可以建立关于  $h_0$  和  $h_1$  的线性方程组:

$$\begin{cases} \frac{\pi \hat{\rho}}{3} (h_0 \hat{M}_0 + h_1 \hat{M}_1) = M_b \\ \frac{\pi \hat{\rho}}{20} (h_0 \hat{I}_0 + h_1 \hat{I}_1) = I_b \end{cases} \quad (3)$$

求解(3)可得  $h_0$  和  $h_1$ , 确定厚度分布函数  $\hat{h}(r)$ .

### 1.2 环板的弹性参数

由于初始带冠叶片在受到轴向力的作用时, 不仅会产生轴向位移, 同时发生周向扭转. 在估算环板弹性参数前, 需对其选定一个材料主轴坐标系, 使得等效环板在受相同外力作用时, 位移的大小和方向能够保持和初始叶片一致. 为简便起见, 文中采用单一的角度, 在总体上模拟出轴向的加载可产生周向位移的情形.

如图3所示, 分别将各向异性环板的材料主轴坐标系和总体坐标系记为  $o_1-x_1y_1z_1$ 、 $o-xyz$ , 其各个子午面上材料的主轴  $y_1$  总是指向环板的径向, 而  $x_1$  与环板所在平面法线  $x$  有一个夹角  $\alpha$ . 可对初始带冠叶片和等效环板施加相同的外力, 通过调节  $\alpha$  的大小, 保证二者位移效果的一致性, 以此确定  $\alpha$  和材料主轴坐标系.

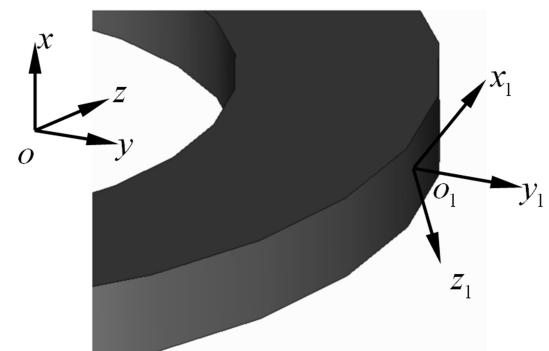


图3 环板材料主轴方向示意图

Fig.3 Material principle axis diagram of annular plate

在材料主轴坐标系下, 等效环板的正交各向异

性本构关系为:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}_0 \boldsymbol{\epsilon} \quad (4)$$

其中,弹性矩阵  $\mathbf{D}_0$  为:

$$\mathbf{D}_0 = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & & & \\ d_{12} & d_{22} & d_{23} & & & \\ d_{13} & d_{23} & d_{33} & & & \\ & & & d_{44} & 0 & 0 \\ & & & 0 & d_{55} & 0 \\ & & & 0 & 0 & d_{66} \end{pmatrix} \quad (5)$$

含有  $d_{11}, d_{12}, \dots, d_{66}$  共 9 个待定的弹性参数. 利用转轴公式<sup>[19]</sup>可将上述主轴坐标系下的弹性矩阵转换到总体坐标系下:

$$\mathbf{D} = \mathbf{T}_\sigma \mathbf{D}_0 \mathbf{T}_\sigma^T \quad (6)$$

其中,  $\mathbf{T}_\sigma$  为应力转换矩阵, 与夹角  $\alpha$  有关.

用各向异性弹性环板等效叶片组, 再装上叶冠后的模型如图 4 所示. 该模型的固有频率可用有限元程序算得, 是弹性参数  $\mathbf{x} = \{d_{11}, \dots, d_{66}\}$  的函数, 其中第  $j$  阶固有频率记为  $\omega_j(\mathbf{x})$ . 由于模型的等效总会有一定失真, 因此  $\omega_j(\mathbf{x})$  与带冠叶片组实际的固有频率  $\omega_j$  存在误差  $\omega_j(\mathbf{x}) - \omega_j$ . 通过调节待定的弹性参数  $\mathbf{x}$  可使得误差尽可能小. 于是, 确定弹性参数就归结为非线性规划问题.

$$\min f(\mathbf{x}) = \sum_{j \in C} \left( \frac{\omega_j(\mathbf{x}) - \omega_j}{\omega_j} \right)^2$$

s.t.  $\mathbf{x} \in X$  (7)

其中,  $X$  为弹性参数的可行域集合,  $C$  为振动模态的阶次集合.

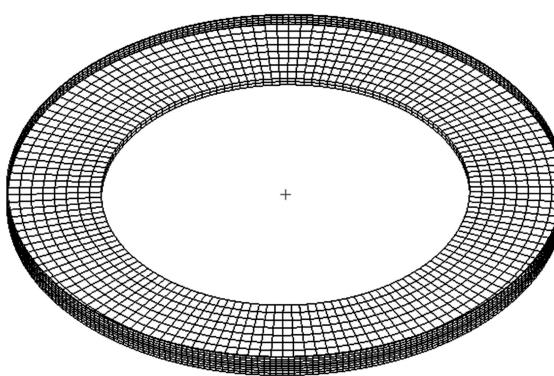


图 4 等效带冠弹性环板模型

Fig.4 Equivalent elastic annular plate model with shroud

对于非线性规划问题(7), 目标函数  $f(\mathbf{x})$  是非线性的, 可能存在多个局部解, 通常需要给出合理

的设计变量初值, 才能获得有效的极小解. 第 2 节将给出弹性参数初值的估算方法.

## 2 带叶冠环板的弹性参数估算

模型等效过程示意如图 5 所示, 其中, 深灰色实体为等效前的周期重复排列的叶片组, 浅灰色实线围成的区域(覆盖叶片组及其间隙的六面体)为等效后的连续弹性板. 材料主轴  $o_1-x_1y_1z_1$  由总体坐标系  $o-xyz$  绕  $y$  轴旋转  $\alpha$  得到.

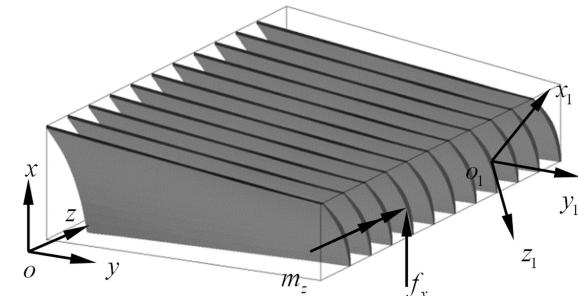


图 5 模型等效过程示意图

Fig.5 Diagram of equivalent model

等效板的最小和最大  $y$  坐标所在平面与  $xoz$  坐标面平行, 分别位于初始叶片组的叶根、叶冠处, 可设  $z$  方向的长度与叶根、叶冠处的实际圆周长相等; 最小和最大  $z$  坐标所在平面与  $xoy$  坐标面平行; 最小和最大  $x$  坐标所在平面是两张不平行的平面, 间距即为式(1)所示的厚度函数  $\hat{h}(r)$ .

### 2.1 基本假设

确定弹性参数初值时, 不必太精确, 仅为给出式(7)中设计变量的合理区间. 根据初始叶片组的实际分布和叶片间的传力特征, 如叶片沿方向  $o_1z_1$  独立分布,  $o_1z_1$  方向的正应变不能产生该方向的正应力, 可假设式(5)弹性矩阵  $\mathbf{D}_0$  中的  $d_{33}=0$ , 同理, 假设  $d_{55}=d_{23}=d_{13}=0$ . 考虑到  $d_{11}$  与三维板的横向振动有关, 在后续 0、1 节径的模态中影响不显著, 优化时, 可暂将初值假设为:

$$d_{11} \approx d_{22} \quad (8)$$

$d_{12}$  是  $x$  方向应变与其引起的  $y$  方向的应力之比, 改变  $d_{12}$  的大小, 对最终频率的影响亦不显著, 优化前可将其初值设为:

$$d_{12} \approx \frac{d_{11}}{2(1+\mu)} \quad (9)$$

故仅剩三个待定的弹性参数  $d_{22}$ 、 $d_{44}$  和  $d_{66}$ , 可通过不同工况下的静力学等效估算其初值, 静力学等效

原则为:等效前后的模型受相同外力,产生相同的变形.算例中通过施加外力 $f_x$ 和外力矩 $m_z$ ,依据上述等效原则可求得初值,等效时基于单条叶片,实现过程基于最小势能原理.

公式推导中,可将回转排列的叶片组近似看作平行排列,那么单条叶片的等效及弹性参数初值的计算公式推导均可在直角坐标系下完成.将等效单条叶片的弹性板沿周向复制若干次即可得到整体的等效环板模型.

## 2.2 等效环板弹性参数估算公式

假定等效叶片组的三维板,在受到一定外力(包含弯矩、拉力、剪力)作用下的变形位移 $u$ 是关于未知系数 $a$ 的线性函数,关系式为:

$$u = N(x, y, z) a \quad (10)$$

其中:

$$u = \{u, v, w\}^T, a = \{a_1, a_2, a_3\}^T$$

$$N(x, y, z) = \begin{bmatrix} N_{11}(x, y, z) & N_{12}(x, y, z) & N_{13}(x, y, z) \\ N_{21}(x, y, z) & N_{22}(x, y, z) & N_{23}(x, y, z) \\ N_{31}(x, y, z) & N_{32}(x, y, z) & N_{33}(x, y, z) \end{bmatrix}$$

$N(x, y, z)$ 的形式可根据初始叶片受力后的实际变形设定.根据几何方程,得应变场:

$$\varepsilon = Pa \quad (11)$$

利用本构方程可得应力场,由于刚度矩阵中包含待定的弹性参数,故将应力场表达为关于弹性参数的函数形式,如下:

$$\sigma(d_{11}, d_{12}, \dots, d_{66}) = D\varepsilon \quad (12)$$

积分可得到弹性应变能:

$$V(d_{11}, d_{12}, \dots, d_{66}) = \frac{1}{2} \iiint_{\Omega} \sigma^T \varepsilon d\Omega \quad (13)$$

体积分域 $\Omega$ 根据等效三维板的实际体积决定.将式(11)、(12)代入式(13)中,可进一步将弹性应变能整理成关于未知系数 $a$ 的二次型形式:

$$V(d_{11}, d_{12}, \dots, d_{66}) = \frac{1}{2} a^T A a \quad (14)$$

其中:

$$A = \iiint_{\Omega} P^T D^T P d\Omega \quad (15)$$

$$P = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_{11}}{\partial x} & \frac{\partial N_{12}}{\partial x} & \frac{\partial N_{13}}{\partial x} \\ \frac{\partial N_{21}}{\partial y} & \frac{\partial N_{22}}{\partial y} & \frac{\partial N_{23}}{\partial y} \\ \frac{\partial N_{31}}{\partial z} & \frac{\partial N_{32}}{\partial z} & \frac{\partial N_{33}}{\partial z} \\ \frac{\partial N_{21}}{\partial z} + \frac{\partial N_{31}}{\partial y} & \frac{\partial N_{22}}{\partial z} + \frac{\partial N_{32}}{\partial y} & \frac{\partial N_{23}}{\partial z} + \frac{\partial N_{33}}{\partial y} \\ \frac{\partial N_{11}}{\partial z} + \frac{\partial N_{31}}{\partial x} & \frac{\partial N_{12}}{\partial z} + \frac{\partial N_{32}}{\partial x} & \frac{\partial N_{13}}{\partial z} + \frac{\partial N_{33}}{\partial x} \\ \frac{\partial N_{11}}{\partial y} + \frac{\partial N_{21}}{\partial x} & \frac{\partial N_{12}}{\partial y} + \frac{\partial N_{22}}{\partial x} & \frac{\partial N_{13}}{\partial y} + \frac{\partial N_{23}}{\partial x} \end{bmatrix} (x, y, z)$$

若在与叶片与叶冠相连的面上施加外力 $f$ ,产生位移 $u$ ,则外力对等效三维板的做功大小为:

$$W = \iint_S u^T f dS = b^T a \quad (16)$$

其中:

$$b = \iint_S N(x, y, z)^T f dS \quad (17)$$

面积分域 $S$ 由等效三维板受力面的实际大小决定.若在与叶片与叶冠相连的面上施加外力矩 $m$ ,产生转角 $\theta$ ,则在计算做功时,分别用 $m, \theta$ 替换式(16)中的 $f, u$ 即可.

综上,可得环板受外力作用变形后的总势能表达式如下:

$$\Pi(d_{11}, d_{12}, \dots, d_{66}) = V - W = \frac{1}{2} a^T A a - b^T a \quad (18)$$

依据最小势能原理的驻值条件<sup>[19]</sup>,可求得:

$$a(d_{11}, d_{12}, \dots, d_{66}) = A^{-1} b \quad (19)$$

将式(19)代入(10)中,得到仅含有未知弹性参数的位移表达式:

$$u(d_{11}, d_{12}, \dots, d_{66}) = N(x, y, z) A^{-1} b \quad (20)$$

初始叶片组模型受相同外力后的变形位移数值可经过有限元静力分析得到,提取典型节点的位移向量,记为 $\bar{u}$ ,令:

$$u(d_{11}, d_{12}, \dots, d_{66}) = \bar{u} \quad (21)$$

即可构造方程组,求解后得到待定弹性参数值,以此作为三维环板弹性参数的初值.

## 3 算例

算例的初始叶片组模型如图1,共含有72条叶片,每隔5°均匀分布.等效时,将每隔5°分布的单条叶片等效为占据5°的弹性板,如图6中所示环板

上标注的 $5^\circ$ 扇区阴影区域.完成单个扇区的等效建模后,绕轴旋转复制71次即得到叶片组等效后的三维环板模型.

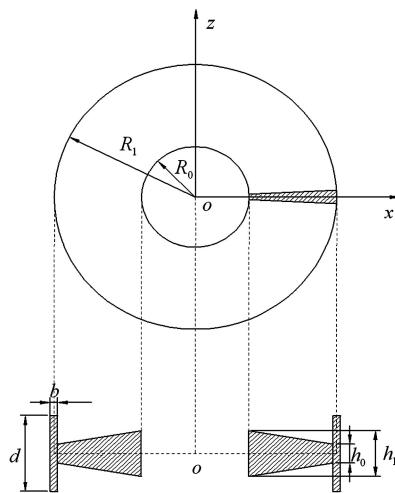


图6 等效叶片组的三维带冠环板几何尺寸示意图

Fig.6 Geometric size diagram of three-dimensional annular plate of equivalent blade group

初始叶片组模型的几何与材料等物理参数值见表1,均采用国际单位制.

表1 叶片组模型物理参数表

Table 1 Parameters of blade group

Parameter	Value
Inner Semi Diameter $R_0/\text{m}$	0.2351
External Semi Diameter $R_1/\text{m}$	0.3542
Mass $M_b/\text{kg}$	8.9402
Moment Inertia $I_b/\text{m}^4$	0.3596
Mass Density $\rho_b/(\text{kg}/\text{m}^3)$	7800

叶冠为各向同性的轴对称柱壳,几何与材料等物理参数值见表2,模型不需等效.

表2 叶冠模型参数表

Table 2 Parameters of shroud

Parameter	Value
Height $b/\text{m}$	0.0295
Width $d/\text{m}$	0.0013
Mass Density $\rho^{(s)}/(\text{kg}/\text{m}^3)$	7800
Young Modulus $E/\text{GPa}$	211
Poisson Ratio $\mu$	0.3

### 3.1 等效环板的厚度、密度

等效单条叶片的三维弹性板,密度 $\rho$ 取为与初始叶片组相等,即 $\rho=\rho_b$ , $y$ 方向(径向)的长度 $Y$ 为叶片内、外径之差,外缘 $z$ 方向的长度 $Z$ 可用弧长近似,即:

$$Y=R_1-R_0=0.1191\text{m}$$

$$Z\approx R_1\theta=0.031\text{m} \quad (22)$$

式中 $\theta=\pi/36$ ,将表1数据代入公式(1)~(3)中,经计算可得等效环板的厚度分布函数为:

$$h(r)=0.0275-0.0747r \quad (23)$$

### 3.2 等效环板的弹性参数

基于第2节分析思路,首先确定材料坐标系与总体坐标系间的夹角 $\alpha=66^\circ$ .将 $\alpha=66^\circ$ 代入转轴公式中,计算得总体坐标系下的刚度矩阵 $D$ 为:

$$D=\begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{12}^T & D_{22} \end{bmatrix} \quad (24)$$

其中:

$$D_{11}=\begin{bmatrix} 0.03d_{11} & 0.17d_{12} & 0.14d_{11} \\ 0.17d_{12} & d_{22} & 0.83d_{12} \\ 0.14d_{11} & 0.83d_{12} & 0.70d_{11} \end{bmatrix}$$

$$D_{12}=\begin{bmatrix} 0 & 0.06d_{11} & 0 \\ 0 & 0.37d_{12} & 0 \\ 0 & 0.31d_{11} & 0 \end{bmatrix}$$

$$D_{22}=\begin{bmatrix} 0.16d_{44}+0.83d_{66} & 0 & 0.37(d_{66}-d_{44}) \\ 0 & 0.14d_{11} & 0 \\ 0.37(d_{66}-d_{44}) & 0 & 0.83d_{44}+0.17d_{66} \end{bmatrix}$$

以下分别施加外力矩 $m_z$ 和外力 $f_x$ ,通过静力学等效求得 $d_{22}$ 、 $d_{44}$ 和 $d_{66}$ 的初值.

第一步,构造纯弯曲变形,确定 $d_{22}$ .叶根固定,叶冠处受沿 $z$ 方向的力矩:

$$m_z=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ m_z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (25)$$

静力分析后,初始单条叶片在 $xoy$ 和 $yoz$ 平面的变形如图7所示.黑色虚线为变形前叶片组位置,蓝色实线为变形后叶片组位置.可见,叶片 $x$ 方向几乎无变形位移,在 $yoz$ 平面的变形可近似看成欧拉梁,其中 $z$ 方向的变形可用二次函数模拟,因此可设等效三维板的位移场为:

$$\begin{cases} u_{M_z}=0 \\ v_{M_z}=-z \frac{\partial w_{M_z}}{\partial y} \\ w_{M_z}=b_1y^2 \end{cases} \quad (26)$$

将式(25)、(26)代入(10)~(20)可得等效板的位移场表达式,其中包含了待定弹性参数 $d_{22}$ .

$$\begin{cases} u_{M_z} = 0 \\ v_{M_z} = \frac{8yz}{(0.185-0.251Y)Z^3 d_{22}} \\ w_{M_z} = -\frac{4y^2}{(0.185-0.251Y)Z^3 d_{22}} \end{cases} \quad (27)$$

将等效环板最大  $y$  坐标所在平面上的中心点坐标和位移数值代入(27), 可求解出  $d_{22}$ , 结果为:

$$d_{22} = 2.9 \times 10^{12} \text{ Pa} \quad (28)$$

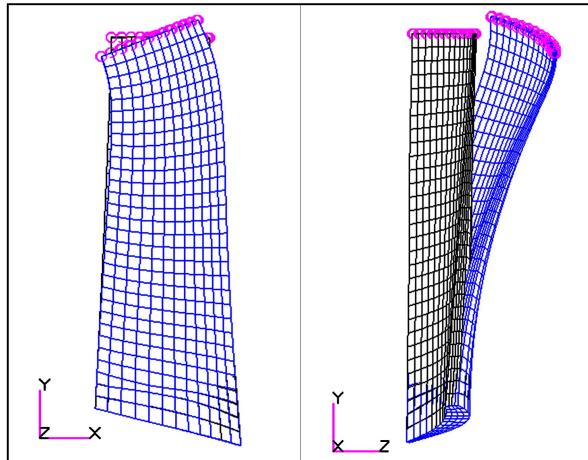


图 7 受外力矩作用的叶片  $xoy$  和  $yoz$  平面变形图

Fig.7 Deformation diagram of blade under moment in the plane of  $xoy$  and  $yoz$

第二步, 构造纯剪变形, 确定  $d_{44}$  和  $d_{66}$ . 叶根固定, 叶冠处受沿  $x$  方向的外力:

$$f_x = \begin{cases} f_x \\ 0 \\ 0 \end{cases} = \begin{cases} 1 \\ 0 \\ 0 \end{cases} \quad (29)$$

静力分析后, 初始单条叶片在  $xoy$  和  $yoz$  平面的变形如图 8 所示. 黑色虚线为变形前叶片组位置, 蓝色实线为变形后叶片组位置.

可见, 叶片在  $y$  方向无位移,  $x, z$  方向的变形可用三次函数模拟, 故设等效板的位移场为:

$$\begin{cases} u_{F_x} = -a_1 y^2 (2y - 3Y) \\ v_{F_x} = 0 \\ w_{F_x} = -a_2 y^2 (2y - 3Y) \end{cases} \quad (30)$$

将式(29)、(30)代入式(10)~(20)可得关于  $d_{44}, d_{66}$  的位移表达式, 将等效环板最大  $y$  坐标所在平面上的中心点坐标和位移数值代入可求得:

$$\begin{cases} d_{44} = 6.5 \times 10^{14} \text{ Pa} \\ d_{66} = 1.9 \times 10^7 \text{ Pa} \end{cases} \quad (31)$$

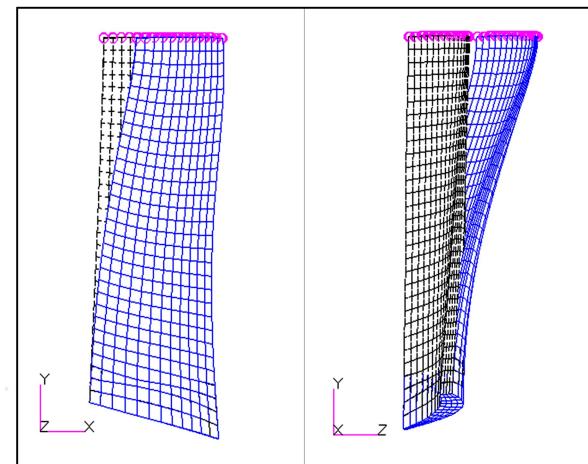


图 8 受外力矩作用的叶片  $xoy$  和  $yoz$  平面变形图

Fig.8 Deformation diagram of blade under moment in the plane of  $xoy$  and  $yoz$

参见第 2.1 节式(8)、(9), 可将  $d_{11}, d_{12}$  的初值取为:

$$\begin{aligned} d_{11} &= d_{22} = 2.9 \times 10^{12} \text{ Pa} \\ d_{12} &= 1.1 \times 10^{12} \text{ Pa} \end{aligned} \quad (32)$$

根据式(7)、设置设计变量的可行域, 建立数学规划模型.

$$\begin{aligned} \min & \left( \frac{\omega_0(\mathbf{d}) - \omega_0}{\omega_0} \right)^2 + \left( \frac{\omega_1(\mathbf{d}) - \omega_1}{\omega_1} \right)^2 \\ \text{s.t. } & \mathbf{d} \in [10^6, 10^{15}] \times [10^6, 10^{15}] \times \\ & [10^6, 10^{15}] \times [10^6, 10^{15}] \times [10^6, 10^{15}] \end{aligned} \quad (33)$$

其中,  $\mathbf{d} = \{d_{11}, d_{12}, d_{22}, d_{44}, d_{66}\}$ , 将式(28)、(31)和(32)中的数据作为初值, 利用 MSC.Nastran 的动力优化功能<sup>[20]</sup>得弹性参数终值. 迭代计算后可确定环板弹性参数的终值为:

$$\begin{aligned} d_{11} &= d_{22} = 4.1 \times 10^{12} \text{ Pa} \\ d_{12} &= 3.5 \times 10^{10} \text{ Pa} \\ d_{44} &= 8.2 \times 10^{14} \text{ Pa} \\ d_{66} &= 6.1 \times 10^7 \text{ Pa} \end{aligned} \quad (34)$$

利用上述方法求得三维环板建模所需的全部几何、材料参数后, 可在 Patran 中建立环板的有限元模型, 将等效三维环板模型与初始轮盘组合后可得到三维叶盘缩聚模型.

### 3.3 等效结果与分析

模态分析后得到的叶盘缩聚模型与初始叶盘模型的 0、1 节径模态变形云图如图 9, 可见模态变形的横向等位移线基本一致.

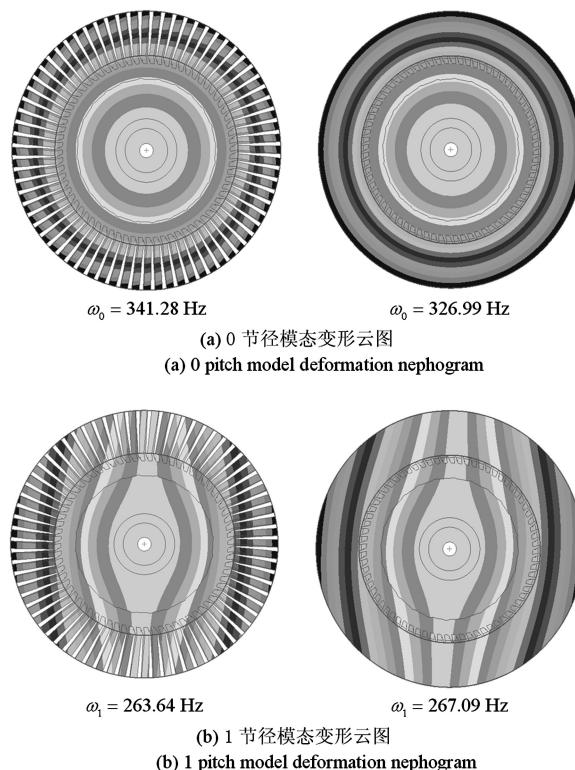


图 9 初始与三维叶盘缩聚模型模态云图对比

Fig.9 Comparison of modal deformation nephogram for initial and reduced bladed disk

利用两种模型计算得到的固有频率结果如表 3,其中 0 节径和 1 节径的固有频率相差分别为 -4.18% 和 1.31%。算例中,初始叶盘模型为回转周期结构,模态分析需用到单个扇区的模型,节点数目约为 3100;等效后的缩聚模型为轴对称分布,模态分析时仅需用到子午面的模型,节点数目不足 350,可大大降低模型动力学分析时的自由度数目,达到高效计算的目的。

表 3 初始与三维板缩聚模型固有频率数据结果

Table 3 Natural frequencies of initial and reduced model

Natural frequency comparison	0 Diameter	1 Diameter
Frequency of Initial Model	341.28Hz	263.64Hz
Frequency of 3D Reduced Model	326.89Hz	267.09Hz
Relative Error	-4.18%	1.31%

文章<sup>[18]</sup>建立的二维叶盘缩聚模型与本文建立三维叶盘缩聚模型模态变形后的单元轮廓对比图如图 10 所示,黑色线条和蓝色线条分别为模态变形前、后的单元轮廓线,可见,三维叶盘缩聚模型与二维叶盘缩聚模型相比,更能正确表现叶片-轮盘的轴向-周向振动耦合效应。分析表明,文中的等效建模方法能相当可观的降低叶盘整体有限元分析

的自由度数目,且用缩聚模型计算得到的低阶振动固有频率具有的足够精度。

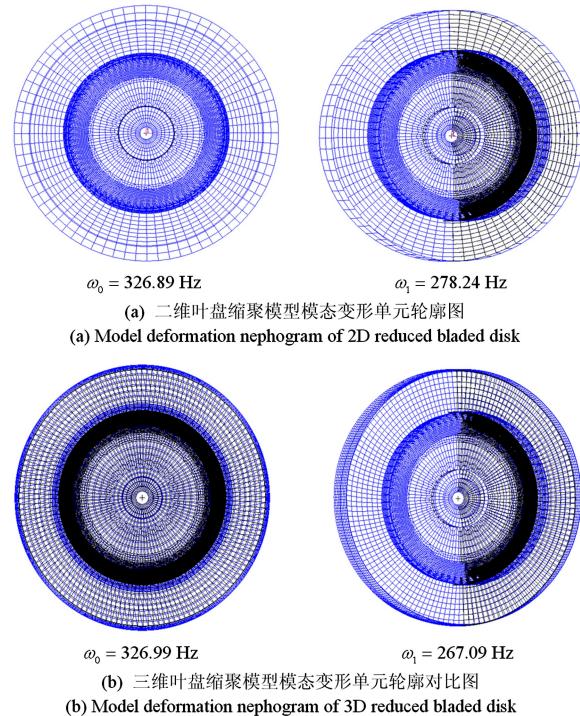


图 10 二维与三维叶盘缩聚模型模态变形单元轮廓图

Fig.10 Comparison of modal deformation nephogram for 2D &amp; 3D reduced bladed disk

#### 4 结语

在较小的尺度上,叶片组是由叶片按照固定回转角度沿周向对称排列的周期性重复结构。在较大的尺度上,这种周期性重复结构可以被近似地均质化,这样可使得分析和计算难度大大降低。对于叶片组的等效建模思路,本文选用各项异性环形板等效周期性重复的叶片组三维有限元模型,在保证两种模型外观特征尺寸一致、整体质量和惯量相同的条件下,通过调节等效环板模型的弹性模量等参数,使得初始模型和等效模型的主要固有频率和模态具有相似的特征。

实现模型的等效时,综合运用了弹性力学中的最小势能等原理,给出了具有可操作性的确定等效模型参数的方法,并以航空发动机带叶冠的低压涡轮叶片-轮盘模型为具体应用实例,展示了模型等效的步骤。对于设计状态已确定的单级叶盘,等效的环板和轮盘组合体具有轴对称特点,故计算效率高,可直接应用于转子的整体动力学计算,也可为转子系统的优化设计等应用提供精度和效率兼顾

的弹性叶盘缩聚模型.

## 参 考 文 献

- 1 张文. 转子动力学理论基础. 北京: 科学出版社, 1990:1~7 (Zhang W. Rotor dynamics. Beijing: China Science Publishing and Media Ltd, 1990:1~7 (in Chinese))
- 2 王文亮, 张锦, 陈向钧. 盘-叶耦合系统的固有模态分析—C\_N群上对称结构的模态综合. 固体力学学报, 1988(1):17~25 (Wang W L, Zhang J, Chen X J. Modal analysis of coupled vibration of blade and disk-modal synthesis of symmetric structures in C\_N group theory. *Journal of Solid Mechanics*, 1988(1):17~25 (in Chinese))
- 3 陈毓迪, 王延荣, 许柱山. 多级叶盘结构动力特性分析的一种方法. 航空动力学报, 2015, 30(6):1507~1511 (Chen Y D, Wang Y R, Xu Z S. A method of structural dynamic characteristics analysis multistage bladed disks. *Journal of Aerospace Power*, 2015, 30(6):1507~1511 (in Chinese))
- 4 张文. 转子动力学中的若干近代力学问题. 中国科学基金, 1994(3):75~77 (Zhang W. Some problems of modern mechanics in rotor dynamics. *Science Foundation in China*, 1994(3):75~77 (in Chinese))
- 5 Hsieh S H, Abel J F. Comparison of two finite element approaches for analysis of rotating bladed-disk assemblies. *Journal of Sound and Vibration*, 1995, 182:91~107
- 6 Genta G, Tonoli A. A harmonic finite element for the analysis of flexural, torsional and axial rotordynamic behavior of blade arrays. *Journal of Sound and Vibration*, 1997, 207(5):693~720
- 7 周传月, 邹经湘, 闻雪友等. 燃气轮机叶片-轮盘耦合系统振动特性计算. 燃气涡轮试验与研究, 2000, 13(2):36~39 (Zhou C Y, Zou J X, Wen X Y, et al. Calculation of the blade disk coupled vibration characteristics of gas turbine. *Gas Turbine Experiment and Research*, 2000, 13(2):36~39 (in Chinese))
- 8 Srinivasan A V. Vibrations of bladed-disk assemblies-a selected survey. *Journal of Vibration Acoustics Stress and Reliability in Design-Transactions of the ASME*, 1984, 106(2):165~168
- 9 Tang G A, Ding J, Xu X F. A new method for stress analysis of a cyclically symmetric structure. *Applied Mathematics and Mechanics-English Edition*, 2000, 21(1):87~94
- 10 Huang S C, Chiu Y J. Shaft-torsion and blade-bending coupling vibrations in a rotor system with grouped blades. *Journal of System Design & Dynamics*, 2007, 1(4):748~759
- 11 刘廷毅, 张锦, 王建明. 叶片-轮盘-轴系统的耦合振动分析. 燃气涡轮试验与研究, 1996(1):30~34 (Liu T Y, Zhang J, Wang J M. Blade-disk-shaft coupled vibration analysis. *Gas Turbine Experiment and Research*, 1996(1):30~34 (in Chinese))
- 12 左彦飞, 王建军. 3-D有限元转子系统动力减缩的部件模态综合方法及应用. 航空动力学报, 2016, 31(8):1929~1934 (Zuo Y F, Wang J J. Component mode synthesis for dynamic reduction of 3-D finite element rotor system and its application. *Journal of Aerospace Power*, 2016, 31(8):1929~1934 (in Chinese))
- 13 Kielb R E, Kaza K R V. Effects of structural coupling on mistuned cascade flutter and response. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power-Transactions of the ASME*, 1984, 106(1):17~24
- 14 Turhan O, Bulut G. Linearly coupled shaft-torsional and blade-bending vibrations in multi-stage rotor-blade system. *Journal of Sound and Vibration*, 2006, 296(1-2):292~318
- 15 Bladh R, Castanieri M P, Pierre C. Effects of multistage coupling and disk flexibility on mistuned bladed disk dynamics. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power-Transactions of the ASME*, 2003, 125(1):121~130
- 16 Bhartiya Y, Sinha A. Reduced order model of a multistage bladed rotor with geometric mistuning via modal analyses of finite element sectors. *Journal of Turbomachinery-Transactions of the ASME*, 2012, 134:0410014
- 17 Pan W, Tang G, Zhang M. Modal analysis method for bladed disks based on 3D blade and 2D axisymmetric disk finite element model. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 2017, 139(5):52504
- 18 姜萌, 张美艳, 唐国安. 基于变参数环板等效叶片组的叶盘模型耦合振动分析方法. 动力学与控制学报, 2016, 14(6):526~532 (Jiang M, Zhang M Y, Tang G A. A coupled vibration analysis method of bladed disk model based on equivalent blade group of annular plate with variable parameters. *Journal of Dynamics and Control*, 2016, 14(6):526~532 (in Chinese))
- 19 陆明万, 张雄, 葛东云. 工程弹性力学与有限元法. 北京: 清华大学出版社, 2005:131~142 (Lu M W, Zhang X, Ge D Y. *Engineering Elasticity Mechanics and Finite Element Method*. Beijing: Tsinghua University Press, 2005:131~142 (in Chinese))

- X, Ge D Y. *Engineer elasticity mechanics and finite element method*. Beijing: Tsinghua University Press, 2005: 131~142 (in Chinese))
- 20 隋允康. *MSC.Nastran 有限元动力分析与优化设计实用*

- 教程
- 北京:科学出版社, 2004: 238~257 (Chen Y K. *A practical course of finite element dynamic analysis and optimization design*. Beijing: China Science Publishing and Media Ltd, 2004: 238~257 (in Chinese))

## AN EQUIVALENT MODELING METHOD BY SIMPLIFYING BLADE GROUP TO AN ANNULAR PLATE WITH VARIABLE PARAMETERS \*

Jiang Meng<sup>1</sup> Zhang Meiyang<sup>1</sup> Guo Qiwei<sup>2</sup> Tang Guoan<sup>1†</sup>

(1. Department of Aeronautics and Astronautics, Fudan University, Shanghai 200433, China)

(2. Research & Development Center, China Academy of Launch Vehicle Technology, Shanghai 201108, China)

**Abstract** Complex rotor system usually contain multistage bladed disks, which result in tremendous DOFs when leveraging FEM to analyze its dynamic characteristics. Computation efficiency also remains to be improved since the DOFs of single bladed disk is still large even though leveraging the rotation period characteristics. With the purpose of DOFs reduction, simplified and equivalent modeling of single bladed disk can be treated as a feasible way. In this paper, an equivalent modeling method is proposed to simplify the blade group into an annular plate with variable parameters based on the criterion that dynamic characteristics of annular plate can stay approximately the same as the original one. Physical parameters of annular plate including geometric and material parameters can be obtained by theoretical derivation and calculation. In the end of the paper, the equivalent modeling method is verified by taking a bladed disk model of aero engine as an example. It turns out that the equivalent modeling method can not only ensure precision but also improve computational efficiency.

**Key words** vibration, blade, disk, rotor, model reduction

Received 25 September 2017, revised 2 November 2017.

\* The project supported by the National Natural Science Foundation of China (11572089), Shanghai Science and Technology Development Funds (15QB1404600).

† Corresponding author E-mail: tangguoan@fudan.edu.cn