

耦合调和振子网络系统的联合连通同步*

张华^{1,2†} 万明非¹ 颜青¹ 杨伟¹

(1.重庆理工大学 理学院, 重庆 400054) (2.铜仁学院 大数据学院, 铜仁 554300)

摘要 论文分析了耦合调和振子网络系统在联合连通网络拓扑结构下的引导-跟随同步问题.假定每个网络拓扑结构图不连通,但它们在有限时间内能够联合连通,利用代数图论,李雅普诺夫稳定性理论和 LaSalle 不变原理,证明了该系统的同步稳定性.最后,数值模拟进一步验证了所得理论结果的正确性和有效性.

关键词 耦合调和振子, 联合连通, 李雅普诺夫稳定性, 同步, 引导-跟随

DOI: 10.6052/1672-6553-2017-077

引言

网络型调和振子系统来源于由阻尼、弹簧和质量构成的一种耦合力学模型.二阶网络型调和振子模型如下所示^[1]:

$$\ddot{x}_i + \alpha x_i + \sum_{j=1}^n a_{ij}(t)(x_i - x_j) = 0 \quad (1)$$

其中 $x_i \in R(i=1, 2, \dots, N)$ 表示第 i 个振子的位移, $\alpha > 0$ 为单个振子的位移增益或者振动频率, $a_{ij}(t)$ 是 i, j 两个振子的相互作用.若令 $r_i = x_i, v_i = \dot{x}_i$, 则该方程可以写成如下一阶微分方程组形式:

$$\begin{cases} \dot{r}_i(t) = v_i(t) \\ \dot{v}_i(t) = -\alpha r_i(t) + u_i(t) \end{cases} \quad (2)$$

其中 $u_i(t) = -a_{ij}(v_i(t) - v_j(t))$, $i=1, 2, \dots, N$, 表示对第 i 个振子的控制输入. Ballard 等对模型(2)进行了离散模化处理,并提出了一个离散时间下的控制输入协议^[2]. Su 等利用振子间感应距离的概念,通过建立适当的控制输入使得每个振子在没有任何连通假设下仍能达到同步^[3]. Zhang 等利用平均速度的概念在无法测量速度的情况下用位移耦合代替速度耦合分析了调和振子系统的同步^[4].

在现实世界复杂的网络环境中,系统的网络结构不可能一直都保持不变,并且不是所有的系统都是同构系统.此外,外界各种因素对系统的干扰可能造成诸如通信阻隔、通信延迟、控制输入缺失、参数扰动以及传输误差等多方面的问题.为此,孙一

杰等分析了异构多智能体在有向图下的广义平均一致性,利用非负矩阵理论和特征值扰动等方法,提出了一种基于辅助变量的线性一致性协议使得系统能在任意强连通有向结构下达到一致^[5]. Zhang 等利用采样控制技术研究了耦合调和振子系统具有控制输入缺失的情况,通过建立误差系统求出系统的迭代解,然后通过分析迭代矩阵的范数得到了系统一致的充分条件^[6]. Zhou 等利用脉冲控制技术分析了二阶调和振子系统的脉冲一致性,通过建立相应的误差系统,利用矩阵谱分析的方法得到了系统的稳定所需要满足的充分条件^[7]. Zhou 在文献[6]的基础上分析了具有输入时滞的网络型调和振子系统的采样同步问题^[8]. Sun 等在不考虑控制输入缺失的情况下将文献[6]中的无向图推广到有向图情形,并分析了时滞对系统同步性能的影响^[9]. 此外, Sun 等还分析了具有随机扰动的阻尼器的调和振子系统^[10],通过建立随机李雅普诺夫方程来得到系统稳定的充分条件. Wang 基于脉冲控制技术,在振子耦合瞬间加入了测量误差,利用均方收敛的概念得到了系统同步的充分条件,并给出了系统的收敛域^[11].

值得注意的是以上研究都是基于系统拓扑结构图是连通的(拓扑结构为无向图)或是有一棵有向生成树(拓扑结构为有向图)的假设条件下讨论的.然而,在实际应用中由于各种外界因素的影响,系统的拓扑结构无法固定不变,并且每一时刻都能

2017-01-05 收到第1稿,2017-07-15 收到修改稿.

* 国家自然科学基金资助项目(61364003),重庆市教委科学技术研究项目(KJ1500915),重庆理工大学科研启动基金(2013ZD22)

† 通讯作者 E-mail: zhanghwua@163.com, zhanghwua@cqut.edu.cn

保持网络连通的条件也十分苛刻.所以在网络结构为切换拓扑或联合连通的情况下分析系统的同步性是有科学意义的.例如,唐朝君分析了切换拓扑下离散时间多智能体系统的包含控制^[12].Hong等分析了二阶多智能体系统在联合连通下的引导跟随同步问题^[13].Lin等在没有引导者的情况下分析了二阶多智能体的同步问题,并考虑了时间延迟对系统的影响^[14].Mo等分析了异构的多智能体系统在联合连通下的引导跟随同步^[15].Yu和Mu在自适应控制的情况下考虑了多智能体系统在联合连通下的引导跟随同步^[16,17].Wang在具有层次结构的系统中分析了联合连通下的引导跟随同步^[18].然而,迄今就作者所知鲜有关于网络型调和振子系统在联合连通下的同步问题的研究报道.为此,我们在本文中分析了网络型调和振子在联合连通下的引导跟随同步动力学.

1 预备知识

1.1 符号说明

R^N 表示 N 维实向量空间, $\mathbf{1}_N$ 表示所有元素为 1 的 N 维列向量, $\mathbf{0}_N$ 表示所有元素为 0 的 N 维列向量, $\|\cdot\|$ 表示向量的欧式范数. I_N 表示 N 阶单位矩阵, O_N 表示所有元素为 0 的 N 阶零矩阵.

1.2 代数图论

令 $\mathcal{G} = (\nu, \varepsilon, A)$ 表示一个图, $\nu = \{1, 2, \dots, N\}$ 代表图的顶点集, $\varepsilon \subseteq \nu \times \nu$ 是图的边集. 如果对 $i \neq j$, $(i, j) \in \varepsilon$ 都有 $(j, i) \in \varepsilon$, 则图 \mathcal{G} 称为无向图, 反之则为有向图. 矩阵 $A = [a_{ij}]_{N \times N}$ 表示图的邻接矩阵, 其中 $a_{ij} > 0$ 当且仅当 $(i, j) \in \varepsilon$. 称一个由图中边构成的序列 $(i, i_1), (i_1, i_2), \dots, (i_j, j)$ 为点 i 到 j 的一条路径. 如果图中任意两个不同的节点之间至少存在一条路径则称该图为连通图.

定义 $d_i \triangleq \sum_{j=1}^N a_{ij}$ 为点 i 的度. 记对角矩阵 $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_N)$. 图的拉普拉斯矩阵定义为 $L = D - A$. 点 0 表示引导者, 图 $\bar{\mathcal{G}} = (\bar{\nu}, \bar{\varepsilon}, \bar{A})$ 表示在图 \mathcal{G} 中加入了引导者的图, 其中 $\bar{\nu} = \nu \cup \{0\}$, 记 $B = \text{diag}(b_1, b_2, \dots, b_N)$, 其中当 $(i, 0) \notin \bar{\varepsilon}$ 时 $b_i = 0$. 当 $(i, 0) \in \bar{\varepsilon}$ 时 $b_i > 0$. 在图 $\bar{\mathcal{G}}$ 中定义矩阵 $H = L + B$, L 为 \mathcal{G} 的拉普拉斯矩阵. 如果对 \mathcal{G} 中的每个点 i 都有一条到引导者的有向路径, 则称图 $\bar{\mathcal{G}}$ 的引导者是全局可达的. 对一个具有 K 个时变拓扑结构的网络系统,

$\mathcal{G}_i (i \in p)$ 表示第 i 个拓扑结构的图, 其中 $p = \{1, 2, \dots, K\}$. 映射 $\sigma: R \rightarrow p$ 表示随机切换信号, 于是 t 时刻系统的拓扑结构图可记成 $\mathcal{G}_{\sigma(t)}$, 其相应的邻接矩阵和拉普拉斯矩阵分别记为 $A_{\sigma(t)}$ 和 $L_{\sigma(t)}$. 相应的带有引导者的切换系统有矩阵 $B_{\sigma(t)}, H_{\sigma(t)}$. 对任意 m 个具有相同顶点的无向图 $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \dots, \mathcal{G}_m$, 记 $\mathcal{G}_{1, \dots, m} = (\nu, \varepsilon_{1, \dots, m}, A_{1, \dots, m})$, 其中 $\varepsilon_{1, \dots, m} = \bigcup_{i=1}^m \varepsilon_i$, $A_{1, \dots, m}$ 为相应邻接矩阵. 如果图 $\mathcal{G}_{1, \dots, m}$ 是连通的, 则称 $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \dots, \mathcal{G}_m$ 是联合连通的. 对加入引导者后的无向图 $\bar{\mathcal{G}}_1, \bar{\mathcal{G}}_2, \dots, \bar{\mathcal{G}}_m$, 如果 $\bar{\mathcal{G}}_{1, \dots, m}$ 是连通的, 则 $\bar{\mathcal{G}}_1, \bar{\mathcal{G}}_2, \dots, \bar{\mathcal{G}}_m$ 是联合连通的.

2 联合连通下耦合调和振子网络系统的引导-跟随同步

令 $r_0(t), v_0(t)$ 分别表示引导者的位置和速度, 其动力学方程如下:

$$\dot{r}_0(t) = v_0(t), \dot{v}_0(t) = -\alpha r_0(t) \quad (3)$$

下面对系统(2)考虑如下控制输入协议:

$$u_i(t) = \sum_{j=1}^N a_{ij}^{(\sigma(t))} (v_j(t) - v_i(t)) + b_i^{(\sigma(t))} (v_0(t) - v_i(t)) \quad (4)$$

令 $\mathbf{r}(t) = [r_1(t), r_2(t), \dots, r_N(t)]^T$,

$$\mathbf{v}(t) = [v_1(t), v_2(t), \dots, v_N(t)]^T,$$

则系统(2)可以写成如下微分方程组形式:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{v}(t) \\ \dot{\mathbf{v}}(t) = -\alpha \mathbf{r}(t) - L_{\sigma(t)} \mathbf{v}(t) - B_{\sigma(t)} (\mathbf{v}(t) - v_0(t) \mathbf{1}_N) \end{cases} \quad (5)$$

定义 1 调和振子系统(2)达到完全同步, 如果对任意初值 $r_i(0), v_i(0), i = 0, 1, 2, \dots, N$, 都有 $\lim_{t \rightarrow \infty} \|r_i(t) - r_j(t)\| = 0, \lim_{t \rightarrow \infty} \|v_i(t) - v_j(t)\| = 0, i, j = 1, 2, \dots, N$. 同理, 带有引导者的调和振子系统达到同步需满足: $\lim_{t \rightarrow \infty} \|r_i(t) - r_0(t)\| = 0, \lim_{t \rightarrow \infty} \|v_i(t) - v_0(t)\| = 0, i = 1, 2, \dots, N$.

假设 1 存在一个非空有界且有限的互不交叉的连续时间序列 $[t_k, t_{k+1}), k = 0, 1, \dots, t_0 = 0$, 对某一特定常数 $T > 0$, 有 $t_{k+1} - t_k \leq T$. 对每个区间 $[t_k, t_{k+1})$, 都存在一个互不交叉的子区间列 $[t_{k_0}, t_{k_1}), [t_{k_1}, t_{k_2}), \dots, [t_{k_{j-1}}, t_{k_j}), t_{k_0} = t_k, t_{k_j} = t_{k+1}$ 满足 $t_{k_i} - t_{k_{i-1}} \geq \tau, i = 1, 2, \dots, j$, 在每个 $[t_{k_{i-1}}, t_{k_i})$ 子区间上系统拓扑结构不变, 只在在 t_{k_i} 时刻改变. 即切换信号 σ 满

足当 $t \in [t_{k_{i-1}}, t_{k_i}]$, 存在 $p \in p$, 使得

$$\sigma(t) \equiv p \text{ 且 } \sigma(t_{k_i}) \neq \sigma(t_{k_{i-1}}).$$

假设 2 在每一个区间 $[t_k, t_{k+1})$ 上系统所有可能的拓扑结构是联合连通的。

引理 1 (LaSalle 不变集原理)^[19] 对于定义在 R^n 上的动态系统 $\dot{x} = f(x)$, 这里 $f(x)$ 是连续函数, 设 $V(x)$ 为带有连续一阶偏导数的标量函数, 并且

$$(i) V(x) \rightarrow \infty (\|x\| \rightarrow \infty \text{ 时});$$

$$(ii) \dot{V}(x) \leq 0 \text{ 对所有 } x \text{ 成立}.$$

记 S 为所有使 $\dot{V}(x) = 0$ 的点的集合, M 为 S 中最大不变集, 那么, 当 $t \rightarrow \infty$ 时, $x = f(x)$ 的所有解全局渐近收敛于 M .

引理 2^[13] 如果图 \bar{G}_p 是连通的, 那么 H_p 是正定的. 如果图 $\bar{G}_{i_1}, \bar{G}_{i_2}, \dots, \bar{G}_{i_m}$ 是联合连通的, 那么 $\sum_{j=1}^m H_{i_j}$ 是正定的.

定理 1 带有引导者的调和振子系统在控制输入(4)下能够达到同步, 如果假设 1 和假设 2 成立.

证明 令误差函数 $e(t) = r(t) - r_0(t) \mathbf{1}_N, s(t) = v(t) - v_0(t) \mathbf{1}_N, x(t) = [e^T(t), s^T(t)]^T$, 则:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{O}_N & \mathbf{I}_N \\ -\alpha \mathbf{I}_N & \mathbf{L}_{\sigma(t)} + \mathbf{B}_{\sigma(t)} \end{bmatrix} x(t) \quad (6)$$

记:

$$\mathbf{W}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{O}_N & \mathbf{I}_N \\ -\alpha \mathbf{I}_N & \mathbf{L}_{\sigma(t)} + \mathbf{B}_{\sigma(t)} \end{bmatrix} \quad (7)$$

根据同步的定义, 系统(5)同步等价于系统(6)的零解是渐近稳定的.

构造如下 Lyapunov 函数:

$$V(x(t)) = x^T(t) Q x(t) \quad (8)$$

其中 $Q = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_N & \mathbf{O}_N \\ \mathbf{O}_N & \frac{1}{\alpha} \mathbf{I}_N \end{bmatrix}$. 根据假设 1, 对 $V(x)$ 沿系统

(6)的轨线在区间 $[t_{k_i}, t_{k_{i+1}})$ 上求导有:

$$\begin{aligned} \dot{V}(x(t)) &= \dot{x}^T Q x + x^T Q \dot{x} = x^T W^T Q x + x^T Q W x \\ &= -s^T e - e^T s - \frac{1}{\alpha} s^T H s + s^T e - e^T s - \frac{1}{\alpha} s^T H s \\ &= -\frac{2}{\alpha} s^T H_{\sigma(t_{k_i})} s \leq 0 \end{aligned}$$

令 $S = \{x(t) \mid \dot{V}(x(t)) = 0\}$, M 为 S 中的最大不变集, 由引理 2, 在 $t \in [t_k, t_{k+1})$ 上每个子图联合连通, 所以:

$$H_{\sigma(t_{k_1})} + H_{\sigma(t_{k_2})} + \dots + H_{\sigma(t_{k_j})} > 0$$

如果:

$$\dot{V} = -s^T H_{\sigma(t)} s = 0, \quad t \in [t_k, t_{k+1}),$$

则有:

$$s^T (H_{\sigma(t_{k_1})} + H_{\sigma(t_{k_2})} + \dots + H_{\sigma(t_{k_j})}) s = 0,$$

即:

$$H_{\sigma(t)} s(t) = 0, \quad t \in [t_k, t_{k+1}).$$

下面证明 M 中只有(6)的零解. 由于 M 为系统(6)的不变集, 即 M 中的元素为(6)的解, 且 $M \subset S$, 则 $\forall x(t) \in M$, 有:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{O}_N & \mathbf{I}_N \\ -\alpha \mathbf{I}_N & \mathbf{O}_N \end{bmatrix} x(t),$$

该系统通解为:

$$x(t) = \begin{bmatrix} \cos(\sqrt{\alpha} t) & \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \sin(\sqrt{\alpha} t) \\ -\sqrt{\alpha} \sin(\sqrt{\alpha} t) & \cos(\sqrt{\alpha} t) \end{bmatrix} x(0) \quad (9)$$

由 $H_{\sigma(t_{k_1})} + H_{\sigma(t_{k_2})} + \dots + H_{\sigma(t_{k_j})}$ 的正定性, 要使 $s^T (H_{\sigma(t_{k_1})} + H_{\sigma(t_{k_2})} + \dots + H_{\sigma(t_{k_j})}) s = 0$ 恒成立, 需 $s(t) \equiv 0$. 所以要使 $x(t) \in M$, 需有 $s(0) = 0$.

不妨设 $e(0) \neq 0$, 那么存在一个 $1 \leq q \leq N$ 使得 $e_q(0) = c \neq 0$, 那么方程(7)的第 q 个系统有如下解:

$$\begin{cases} e_q(t) = \cos(\sqrt{\alpha} t) e_q(0) + \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \sin(\sqrt{\alpha} t) s_q(0) \\ s_q(t) = -\sqrt{\alpha} \sin(\sqrt{\alpha} t) e_q(0) + \cos(\sqrt{\alpha} t) s_q(0) \end{cases} \quad (10)$$

即 $e_q(t) = c \cos(\sqrt{\alpha} t), s_q(t) = -c \sqrt{\alpha} \sin(\sqrt{\alpha} t)$.

由 $\alpha > 0$ 和 s_q 的表达式可知, 如果 $c \neq 0$ 必存在 $\hat{t} > 0$, 使得 $s_q(\hat{t}) \neq 0$. 这与 $s(t) \equiv 0$ 矛盾, 故 $e(0) = 0$. 可知 M 中只有系统的零解, 由引理 2 系统(6)的零解渐近稳定, 即耦合调和振子系统(5)能够达到同步.

3 数值模拟

假定系统(5)含有 5 个跟随者和 1 个引导者, 该系统的三种不连通的拓扑结构见图 1. 本文实验中, 对跟随者之间的耦合关系, 如果 i 与 j 存在信息交换, 则 $a_{ij} = 2$. 在拓扑结构图 $\bar{\mathcal{G}}_1$ 中 $b_1^{(1)} = 1$, 在 $\bar{\mathcal{G}}_2$ 中 $b_5^{(3)} = 3$, 并假设系统按照如下 3 种方式任意切换:

$$i) \bar{\mathcal{G}}_1 \rightarrow \bar{\mathcal{G}}_2 \rightarrow \bar{\mathcal{G}}_3;$$

- ii) $\bar{\mathcal{G}}_3 \rightarrow \bar{\mathcal{G}}_1 \rightarrow \bar{\mathcal{G}}_2$;
- iii) $\bar{\mathcal{G}}_2 \rightarrow \bar{\mathcal{G}}_3 \rightarrow \bar{\mathcal{G}}_1$.

固定 $t_{k_i} - t_{k_{i-1}} = 1$, 即切换间隔为 1, 则此切换方式满足假设 1, 其中 $\tau = 1, T = 3$. 取 $\alpha = 0.8$, 跟随者初值 $r(0) = [1, 2, 3, 4, 5]^T, v(0) = -[5, 4, 3, 2, 1]^T$.

引导者初值 $r_0(0) = 1, v_0(0) = 1$. 系统在这 3 种切换方式下随机切换情况下, 系统的位移和速度状态的时间历程仿真结果如图 2、图 3 所示.

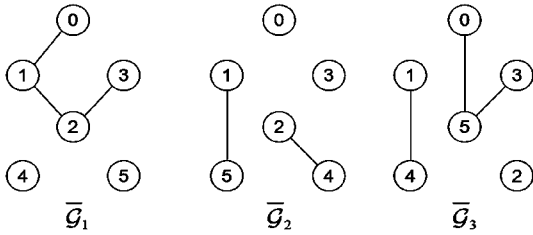


图 1 三个联合连通网络拓扑结构

Fig.1 Three jointly-connected network topologies

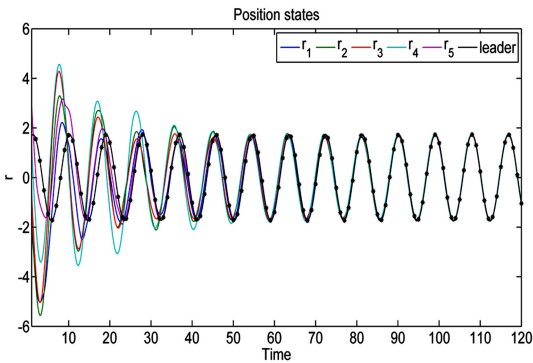


图 2 引导者-跟随者的位移状态时间历程曲线图, * 表示切换时刻引导者的位置

Fig.2 Time response of the position states of the leader-follower system, where the asterisks * show the position states of the leader at the switching instants

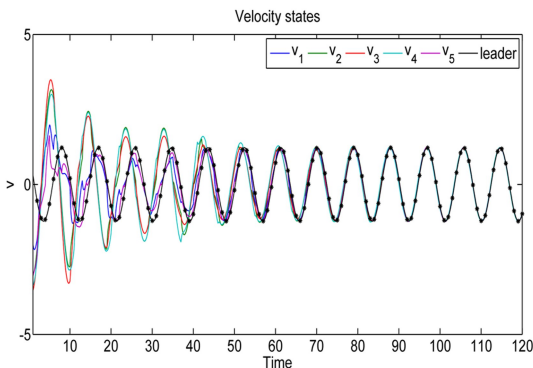


图 3 引导者-跟随者的速度状态的时间历程曲线, * 表示切换时刻引导者的速度状态

Fig.3 Time response of the velocity states of the leader-follower system, where the asterisks * show the velocity states of the leader at the switching instants

4 结论

本文在系统通信拓扑结构具有联合连通特性这一假设条件下, 分析了网络型调和振子系统的引导-跟随同步问题, 在无向网络拓扑结构下证明了所有的跟随者状态最终与引导者保持一致. 数值模拟也进一步验证了理论结果的正确性. 对于没有引导者的网络系统, 其同步轨道与拓扑结构的切换方式有关系, 其准确解析表达式目前我们还没有一个确切的算法能够算出, 希望在后续研究中给出相关结果.

参 考 文 献

- 1 Ren W. Synchronization of coupled harmonic oscillators with local interaction. *Automatica*, 2008, 44(12): 3195~3200
- 2 Ballard L, Cao Y C, Ren W. Distributed discrete-time coupled harmonic oscillators with application to synchronised motion coordination. *IET Control Theory and Applications*, 2010, 4(5): 806~816
- 3 Su H S, Wang X F, Lin Z L. Synchronization of coupled harmonic oscillators in a dynamic proximity network. *Automatica*, 2009, 45(10): 2286~2291
- 4 Zhang H, Yan Q, Wu Q, et al. Synchronization of impulsive coupled harmonic oscillators based on sampled position data. In: Chinese Control Conference, 2016: 7867~7872
- 5 孙一杰, 张国良, 张胜修. 一类异构多智能体系统有向图下的广义平均一致性分析. *动力学与控制学报*, 2015, 22(2): 154~160 (Sun Y J, Zhang G L, Zhang S X. Generalized average consensus analysis for a class of heterogeneous multi agent system on digraphs. *Journal of Dynamics and Control*, 2015, 22(2): 154~160 (in Chinese))
- 6 Zhang H, Zhou J. Synchronization of sampled-data coupled harmonic oscillators with control inputs missing. *Systems and Control Letters*, 2012, 61(12): 1277~1285
- 7 Zhou J, Zhang H. Synchronization of coupled harmonic oscillators with local interaction. *Automatica*, 2012, 48(8): 1715~1721
- 8 Zhou J, Zhang H, Xiang L, et al. Sampled-data synchronization of coupled harmonic oscillators with controller failure and communication delays. *Theoretical and Applied*

- Mechanics Letters*, 2013, 3(6):15~19
- 9 Sun W, Lü J, Chen S, et al. Synchronisation of directed coupled harmonic oscillators with sampled-data. *IET Control Theory and Applications*, 2014, 8(11):937~947
 - 10 Sun W, Yu X, Lü J, et al. Synchronization of coupled harmonic oscillators with random noises. *Nonlinear Dynamics*, 2015, 79(1):473~484
 - 11 Wang J Y, Feng J W, Xu C. The synchronization of instantaneously coupled harmonic oscillators using sampled data with measurement noise. *Automatica*, 2016, 66:155~162
 - 12 唐朝君. 切换拓扑下离散时间多智能体系统的包含控制. 重庆理工大学学报:自然科学, 2017, 31(5):143~147 (Tang C J. Containment control of discrete-time multi-agent systems with switching topologies. *Journal of Chongqing University of Technology: Natural Science*, 2017, 31(5):143~147 (in Chinese))
 - 13 Hong Y, Gao L, Cheng D, et al. Lyapunov-based approach to multiagent systems with Switching Jointly Connected Interconnection. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2007, 52(5):943~948
 - 14 Lin P, Jia Y. Consensus of a class of second-order multi-agent systems with time-delay and jointly-connected topologies. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2010, 55(3):778~784
 - 15 Mo L, Niu Y, Pan T. Consensus of heterogeneous multi-agent systems with switching jointly-connected interconnection. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 2015, 427:132~140
 - 16 Yu H, Xia X. Adaptive consensus of multi-agents in networks with jointly connected topologies. *Automatica*, 2012, 48(8):1783~1790
 - 17 Mu X, Xiao X, Liu K, et al. Leader-following consensus of multi-agent systems with jointly connected topology using distributed adaptive protocols. *Journal of the Franklin Institute*, 2014, 351(12):5399~5410
 - 18 Wang B, Wang J, Zhang B, et al. Leader - follower consensus for multi-agent systems with three-layer network framework and dynamic interaction jointly connected topology. *Neurocomputing*, 2016, 207(C):231~239
 - 19 Slotine J J E, Li W. Applied nonlinear control. New Jersey:Prentice Hall, 1991

SYNCHRONIZATION OF COUPLED HARMONIC OSCILLATORS OVER JOINTLY-CONNECTED TOPOLOGIES*

Zhang Hua^{1,2†} Wan Mingfei¹ Yan Qing¹ Yang Wei¹

(1.School of Science, Chongqing University of Technology, Chongqing 400054, China)

(2.Department of Big Data, Tongren University, Tongren 554300, China)

Abstract This paper investigates the dynamical behavior of coupled harmonic oscillators over jointly-connected topologies. It is assumed that every communication topology is not connected but jointly connected in the finite time. Some criteria for the leader-following synchronization of the coupled harmonic oscillators are established based on the linear algebra theory, Lyapunov stability theory and LaSalle invariant theory. Finally, numerical simulation further validates the correctness of the theoretical results.

Key words coupled harmonic oscillators, jointly-connected topology, Lyapunov stability, synchronization, leader-following

Received 5 January 2017, revised 15 July 2017.

* The project supported by the National Science Foundation of China(61364003), and Scientific and Technological Research Program of Chongqing Municipal Education Commission(KJ1500915) and the Science and Technology Foundation of Chongqing University of Technology (2013ZD22).

† Corresponding author E-mail: zhanghwua@163.com, zhanghwua@cqut.edu.cn