

# 论线性系统的反共振问题

胡海岩<sup>†</sup>

(北京理工大学宇航学院 飞行器动力学与控制教育部重点实验室, 北京 100081)

**摘要** 本文指出,现有文献对反共振现象的机理解释有若干不妥之处.针对简谐激励下的两自由度系统稳态振动,分析其反共振的机理,阐述了原点反共振、跨点反共振的机理差异,以及反共振与固有振型节点之间的关系.以两个相同弹簧支撑的刚性杆简谐受迫振动为例,详细说明了上述机理和关系.

**关键词** 反共振, 机理, 振型节点, 两自由度系统

DOI: 10.6052/1672-6553-2018-026

## 引言

早在19世纪末,人们就发现两自由度线性系统会呈现反共振现象,即系统某个自由度在特定频率激励下的稳态振动幅值为零.1902年,Frahm基于对反共振的认识发明了动力减振器,降低轮船在海浪作用下的晃动<sup>[1]</sup>.此后,人们成功利用反共振现象来改善隔振系统和振动机械的动态特性<sup>[2,3]</sup>,通过反共振现象来提高模型修正效果<sup>[4]</sup>.近年来,则将反共振概念引入到声学超材料的设计中<sup>[5]</sup>.

虽然不少学者致力于研究反共振,但主要关注反共振频率计算、反共振频率的灵敏度计算等问题<sup>[6-8]</sup>,对反共振现象的机理阐述还不够透彻.例如,对简谐激励下的单自由度阻尼系统(简称主系统)附加单自由度无阻尼系统(简称次系统),当激励频率与次系统固有频率重合时,主系统完全静止,导致激励对组合系统做功为零.但有些学者认为,此时次系统吸收了主系统的振动<sup>[9]</sup>,主系统的能量转移到次系统<sup>[10]</sup>.即次系统的振动能量来自主系统,亦即激励输入的能量;这无疑与激励做功为零相矛盾.本文试图澄清这类矛盾,阐述原点反共振、跨点反共振的机理差异,以及反共振与固有振型节点之间的关系.为了简洁起见,本文着重研究两自由度线性系统的反共振问题.

## 1 两自由度系统的反共振问题

考察两自由度线性时不变系统的受迫振动

问题:

$$M\ddot{\mathbf{x}}(t) + C\dot{\mathbf{x}}(t) + K\mathbf{x}(t) = \mathbf{f}(t), t \in [0, +\infty) \quad (1)$$

其中  $\mathbf{x} = [x_1(t) \ x_2(t)]^T \in \mathbb{R}^2$  是位移向量,  $\mathbf{f} = [f_1(t) \ f_2(t)] \in \mathbb{R}^2$  是激励向量,  $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  是对称正定质量矩阵,  $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  是对称正定刚度矩阵,  $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  是对称阻尼矩阵.

通过单边 Fourier 变换,将方程(1)表示为频域形式:

$$\mathbf{Z}(\omega)\mathbf{X}(\omega) = \mathbf{F}(\omega), \omega \in [0, +\infty) \quad (2)$$

其中:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(\omega) &= \begin{bmatrix} F_1(\omega) \\ F_2(\omega) \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^2, \\ \mathbf{X}(\omega) &= \begin{bmatrix} X_1(\omega) \\ X_2(\omega) \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^2, \\ \mathbf{Z}(\omega) &= \mathbf{K} + i\omega\mathbf{C} - \omega^2\mathbf{M} \\ &= \begin{bmatrix} Z_{11}(\omega) & Z_{12}(\omega) \\ Z_{21}(\omega) & Z_{22}(\omega) \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2 \times 2} \end{aligned} \quad (3)$$

分别是频域中的激励向量、响应向量和阻抗矩阵(又称动刚度矩阵),其分量均为频率  $\omega \in [0, +\infty)$  的复值函数,  $i = \sqrt{-1}$ .值得指出的是,虽然阻抗矩阵  $\mathbf{Z}(\omega)$  是对称矩阵,但未必是正定的.例如当  $\mathbf{C} = \mathbf{0}$  时,在系统的两个固有频率  $\omega_{1,2}$  处,  $\mathbf{Z}(\omega_{1,2})$  是奇异矩阵;而当  $\omega \rightarrow +\infty$  时,它是负定矩阵.

由式(2)和式(3)可得到系统的频域响应:

2017-11-26 收到第1稿,2017-12-19 收到修改稿.

<sup>†</sup> 通讯作者 E-mail: haiyan\_hu@bit.edu.cn

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(\omega) &= \mathbf{Z}^{-1}(\omega) \mathbf{F}(\omega) \\ &= \frac{1}{\det \mathbf{Z}(\omega)} \begin{bmatrix} Z_{22}(\omega) & -Z_{21}(\omega) \\ -Z_{12}(\omega) & Z_{11}(\omega) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1(\omega) \\ F_2(\omega) \end{bmatrix} \\ &\equiv \mathbf{H}(\omega) \mathbf{F}(\omega) \end{aligned} \quad (4)$$

其中  $\mathbf{H}(\omega) \equiv \mathbf{Z}^{-1}(\omega) \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$  是频响函数矩阵(又称动柔度矩阵). 鉴于反共振是系统局部行为, 对于不同的激励位置和响应测量位置, 反共振频率一般不同, 故将在  $s$  位置激励和在  $r$  位置测量响应获得的反共振频率标记为  $\omega_{rs}, r, s = 1, 2$ .

不失一般性, 考察仅对系统第 1 个自由度施加简谐激励的情况, 即  $F_1(\omega) \equiv F_1$  且  $F_2(\omega) \equiv 0$ . 此时, 若存在频率  $\omega_{11}$  使  $Z_{22}(\omega_{11}) = 0$  且  $Z_{12}(\omega_{11}) \neq 0$ , 则原点频响函数  $H_{11}(\omega_{11}) = 0$ , 即原点响应出现反共振  $Y_1(\omega_{11}) = 0$ ; 而跨点响应为  $Y_2(\omega_{11}) = H_{21}(\omega_{11}) F_1 = -F_1 Z_{12}(\omega_{11}) / \det \mathbf{Z}(\omega_{11}) \neq 0$ . 若有频率  $\omega_{21}$  使  $Z_{12}(\omega_{21}) = 0$  且  $Z_{22}(\omega_{21}) \neq 0$ , 则跨点频响函数  $H_{21}(\omega_{21}) = 0$ , 即跨点响应出现反共振  $Y_2(\omega_{21}) = 0$ ; 而原点响应为  $Y(\omega_{21}) = H_{11}(\omega_{21}) F_1 = F_1 Z_{22}(\omega_{21}) / \det \mathbf{Z}(\omega_{21}) \neq 0$ . 若仅第 2 个自由度受到激励, 也可获得与上述分析结果类似的结论.

## 2 反共振现象的力学机理

### 2.1 原点反共振问题

对于系统原点响应  $X_1(\omega_{11}) = 0$  这种反共振现象, 许多文献用“动力吸振”概念来解释. 例如, 文献<sup>[9]</sup>认为: 系统第 2 个自由度吸收了系统第 1 个自由度的振动. 由此可推断, 系统第 2 个自由度的振动源自系统第 1 个自由度的振动, 其能量来自外激励  $F_1(\omega_{11})$  输入到系统第 1 个自由度的能量. 这正是文献<sup>[10]</sup>所阐述的“能量转移”观点. 以下分析将表明, 上述观点并不正确.

(1) 当系统原点响应出现反共振时, 外激励无法向系统输入能量. 事实上, 对于系统原点响应反共振  $X_1(\omega_{11}) = 0$ , 外激励  $F_1(\omega_{11})$  在第 1 个自由度上做功为零. 更严格地看, 对应  $F_1(\omega_{11})$  的时域激励  $f_1(t) = F_1 \sin \omega_{11} t$ , 由于其作用点位移满足  $x_1(t) = 0$ , 故  $f_1(t)$  在任意周期  $[0, T]$  上做功为  $W \equiv \int_0^T x_1(t) f_1(t) dt = \int_0^{2\pi/\omega_{11}} x_1(t) (F_1 \sin \omega_{11} t) dt = 0$ . 既然外激励  $f_1(t)$  不做功, 也就不向系统输入能量, 因此能量转移之说不成立. 系统原点响应  $X_1(\omega_{11}) = 0$  的原因是  $Z_{22}(\omega_{11}) = 0$  导致  $H_{11}(\omega_{11}) = 0$ , 即原点动柔

度为零; 这可理解为此时系统原点处阻抗无限大, 导致外激励无法向系统输入能量.

(2) 当系统原点响应出现反共振时, 系统跨点响应是不耗能的简谐振动. 事实上, 系统原点响应产生反共振  $X_1(\omega_{11}) = 0$  的原因是: 外激励与作用在系统第 1 个自由度上的系统内力相互抵消, 其条件是  $Z_{22}(\omega_{11}) \equiv k_{22} + i\omega_{11} c_{22} - \omega_{11}^2 m_{22} = 0$ . 这等价于两个条件: 即  $c_{22} = 0$  和  $k_{22} - \omega_{11}^2 m_{22} = 0$ . 前者说明系统第 2 个自由度的运动能量守恒, 后者说明系统第 2 个自由度的运动是简谐振动, 其频率为  $\omega_{11} = \sqrt{k_{22}/m_{22}}$ . 正是由于该振动不消耗能量, 它才能在外激励无法向系统输入能量时仍一直保持简谐振动.

(3) 在系统原点响应达到反共振状态前, 外激励向系统输入能量; 当达到反共振时, 外激励维持跨点响应振幅. 事实上, 在系统原点响应达到反共振状态之前的瞬态响应阶段, 外激励在系统第 1 个自由度上做功, 向系统输入能量. 该能量激发起系统第 2 个自由度作不耗能的振动, 产生弹性恢复力抵消外激励对第 1 个自由度的作用. 随着第 1 个自由度振动衰减, 外激励做功趋于零. 但根据跨点响应的表达式  $X_2(\omega_{11}) = -F_1 Z_{12}(\omega_{11}) / \det \mathbf{Z}(\omega_{11})$  可知, 跨点响应所呈现的简谐振动幅值要靠外激励来维持. 此时, 若降低外激励力幅值, 系统会再次经历瞬态阶段, 第 2 个自由度的振动幅值会降低, 直至重新达到动力平衡, 形成稳态的反共振. 特别的, 若  $F_1 \rightarrow 0$ , 必导致  $X_2(\omega_{11}) \rightarrow 0$ .

以上分析表明, 现有文献中的“动力吸振”、“能量转移”观点并不正确, 而基于动力平衡分析所得到的“动力减振”观点更为恰当.

### 2.2 跨点反共振问题

对于系统跨点响应  $X_2(\omega_{21}) = 0$  这种反共振现象, 尚未见有文献讨论其力学机理. 事实上, 跨点反共振现象与原点反共振现象的力学机理有所不同. 此时, 外激励通过第 1 个自由度向系统输入能量, 导致第 1 个自由度发生受迫振动, 但输入的能量无法传递到第 2 个自由度上.

更进一步看, 跨点反共条件是存在频率  $\omega_{21}$  使  $Z_{12}(\omega_{21}) = 0$ , 进而导致跨点频响函数  $H_{21}(\omega_{21}) = 0$ . 这可理解为系统两个自由度之间的阻抗无限大, 能量传输被阻止了.

值得指出的是,  $Z_{12}(\omega_{21}) \equiv k_{12} - m_{12}\omega_{21}^2 = 0$  可包括如下三种情况:

(1) 系统同时存在惯性耦合  $m_{12}$  和弹性耦合  $k_{12}$ , 在外激励频率达到  $\omega_{21}$  时这种耦合被抵消了, 外激励通过第 1 个自由度向系统输入能量, 但该能量无法传递到第 2 个自由度.

(2) 系统仅存在惯性耦合  $m_{12}$ , 当  $\omega_{21} = 0$  时该耦合消失, 即静态外激励引起第 1 个自由度运动, 而第 2 个自由度保持静止.

(3) 系统的两个自由度之间不存在任何耦合, 外激励只引起第 1 个自由度振动.

### 3 案例分析

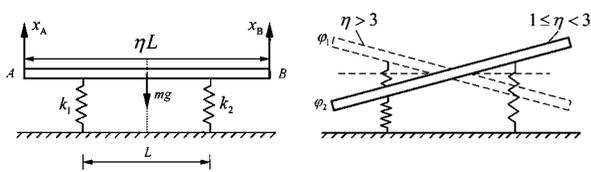


图 1 两自由度系统及其固有振型

Fig.1 A system of two degrees of freedom and its natural mode-shapes

考察图 1 所示的两自由度线性系统, 其中均质刚性杆  $AB$  的质量为  $m = 6$ , 长度为  $\eta L$ , 其中  $\eta \geq 1$  是无量纲系数; 两个弹簧的距离为  $L$ , 刚度为  $k_1 = k_2 = 1$ , 质量可忽略不计. 现取图 1 杆端部向上位移  $x_A$  和  $x_B$  为广义坐标. 在这组广义坐标描述下, 系统的动能和势能分别为:

$$\begin{cases} T = \frac{3}{4}(x_A + x_B)^2 + \frac{1}{4}(x_B - x_A)^2 \\ V = \frac{1}{2} \left[ x_A + \frac{(x_B - x_A)(\eta - 1)}{2\eta} \right]^2 + \frac{1}{2} \left[ x_A + \frac{(x_B - x_A)(\eta + 1)}{2\eta} \right]^2 \end{cases} \quad (5)$$

由此可得到系统的质量矩阵和刚度矩阵:

$$\begin{aligned} M &= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \\ K &= \frac{1}{2\eta^2} \begin{bmatrix} \eta^2 + 1 & \eta^2 - 1 \\ \eta^2 - 1 & \eta^2 + 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6)$$

#### 3.1 固有振动

对于不同的  $\eta^2$  取值, 求解广义特征值问题:

$$(K - \omega^2 M)\varphi = 0 \quad (7)$$

得到如下三种固有振动:

a. 若  $1 \leq \eta^2 < 3$ , 则系统固有频率的平方为  $\omega_1^2 =$

$1/3$  和  $\omega_2^2 = 1/\eta^2$ , 它们分别对应于对称固有振型  $\varphi_1 = [1 \ 1]^T$  和反对称固有振型  $\varphi_2 = [1 \ -1]^T$ ; 此时刚性杆中点是第 2 阶固有振型的节点.

b. 若  $3 < \eta^2 < +\infty$ , 则系统固有频率的平方为  $\omega_1^2 = 1/\eta^2$  和  $\omega_2^2 = 1/3$ , 它们分别对应于反对称固有振型  $\varphi_1 = [1 \ -1]^T$  和对称固有振型  $\varphi_2 = [1 \ 1]^T$ ; 此时刚性杆中点是第 1 阶固有振型的节点.

c. 若  $\eta^2 = 3$ , 则系统具有两个相同固有频率, 其平方为  $\omega_1^2 = \omega_2^2 = 1/3$ ; 固有振型是任意两个线性无关的向量, 可取为对称固有振型  $\varphi_1 = [1 \ 1]^T$  和反对称固有振型  $\varphi_2 = [1 \ -1]^T$ .

#### 3.2 反共振频率

系统频响函数矩阵为:

$$\begin{aligned} H(\omega) &= (K - \omega^2 M)^{-1} \\ &= \frac{1}{2(3\omega^2 - 1)(\eta^2\omega^2 - 1)} \cdot \begin{bmatrix} \eta^2 + 1 - 4\eta^2\omega^2 & 2\eta^2\omega^2 + 1 - \eta^2 \\ 2\eta^2\omega^2 + 1 - \eta^2 & \eta^2 + 1 - 4\eta^2\omega^2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (8)$$

根据式(8), 可得到原点和跨点频响函数的反共振频率分别满足:

$$\begin{aligned} \omega_{AA}^2 = \omega_{BB}^2 &= \frac{1}{4} + \frac{1}{4\eta^2} \\ \omega_{AB}^2 = \omega_{BA}^2 &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2\eta^2} \end{aligned} \quad (9)$$

参考 3.1 节对固有振动的讨论, 可绘制图 2 所示的系统固有振动频率平方和反共振频率平方关系.

a. 当  $1 \leq \eta^2 < 3$  时, 由图 2 可见: 系统第 1 阶固有频率保持恒定, 第 2 阶固有频率平方随着  $\eta^2$  增加而单调递减; 固有频率与反共振频率满足如下关系:  $0 \leq \omega_{AB}^2 = \omega_{BA}^2 < \omega_1^2 < \omega_{AA}^2 = \omega_{BB}^2 < \omega_2^2$ , 即原点反共振频率介于两个固有频率之间, 而跨点反共振频率低于第 1 阶固有频率.

b. 当  $3 < \eta^2 < +\infty$  时, 由图 2 可见: 系统第 1 阶固有频率平方随着  $\eta^2$  增加而单调递减, 第 2 阶固有频率保持恒定; 固有频率与反共振频率满足如下关系:  $0 < \omega_1^2 < \omega_{AA}^2 = \omega_{BB}^2 < \omega_2^2 < \omega_{AB}^2 = \omega_{BA}^2$ , 即原点反共振频率仍介于两个固有频率之间, 但跨点反共振频率高于第 2 阶固有频率.

c. 当  $\eta^2 = 3$  时, 系统固有频率和反共振频率均相等, 即  $\omega_1^2 = \omega_2^2 = \omega_{AA}^2 = \omega_{BB}^2 = \omega_{AB}^2 = \omega_{BA}^2 = 1/3$ . 在图 2 中, 4 条曲线相交于点  $(3, 1/3)$ , 呈现退化情况. 此

时,系统频响函数在  $\omega = 1/\sqrt{3}$  有 1 阶零点和 2 阶极点. 对于  $\omega \neq 1/\sqrt{3}$ , 将  $\eta^2 = 3$  代入式(8)得到系统频响函数矩阵:

$$H(\omega) = \frac{1}{2(3\omega^2-1)(3\omega^2-1)} \begin{bmatrix} 4-12\omega^2 & 6\omega^2-2 \\ 6\omega^2-2 & 4-12\omega^2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3\omega^2-1} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \quad (10)$$

易见,此时没有反共振现象.

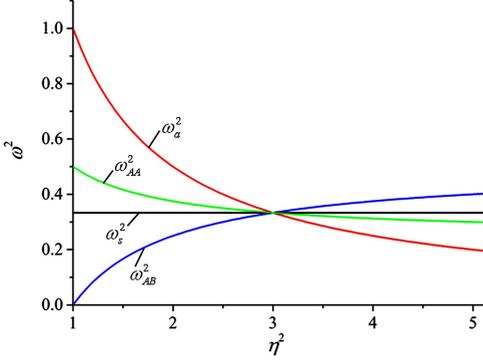


图2 对称振动固有频率平方  $\omega_s^2$ 、反对称振动固有频率平方  $\omega_a^2$ 、原点反共振频率平方  $\omega_{AA}^2$  和跨点反共振频率平方  $\omega_{AB}^2$  随  $\eta^2$  的变化.

Fig.2 Variations of the natural frequency  $\omega_s^2$  of symmetric vibration, the natural frequency  $\omega_a^2$  of anti-symmetric vibration, the anti-resonant frequencies  $\omega_{AA}^2$  and  $\omega_{AB}^2$  with an increase of  $\eta^2$

### 3.3 刚性杆上任意点的反共振

在刚性杆左端点施加沿  $x_A$  正向的正弦激励  $f_A(t) = F_A \sin \omega t$ , 根据式(4)得到刚性杆两端的频率响应向量:

$$\begin{bmatrix} X_A(\omega) \\ X_B(\omega) \end{bmatrix} = \frac{1}{2(3\omega^2-1)(\eta^2\omega^2-1)} \cdot \begin{bmatrix} \eta^2+1-4\eta^2\omega^2 & 2\eta^2\omega^2+1-\eta^2 \\ 2\eta^2\omega^2+1-\eta^2 & \eta^2+1-4\eta^2\omega^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_A \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{F_A}{2(3\omega^2-1)(\omega^2-1)} \begin{bmatrix} \eta^2+1-4\eta^2\omega^2 \\ 2\eta^2\omega^2+1-\eta^2 \end{bmatrix} \quad (11)$$

为考察刚性杆上任意点  $s$  处的频率响应, 引入无量纲参数  $\xi = s/\eta L \in [0, 1]$ , 则点  $s$  处的频率响应为:

$$X_s(\omega) = [ (1-\xi)X_A(\omega) + \xi X_B(\omega) ] = [ (1-\xi)(\eta^2+1-4\eta^2\omega^2) + \frac{\xi(2\eta^2\omega^2+1-\eta^2)}{2(3\omega^2-1)(\omega^2-1)} ] F_A \quad (12)$$

在点  $s$  处产生位移反共振的条件是, 存在频率

$\omega_{sA} \geq 0$  使得:

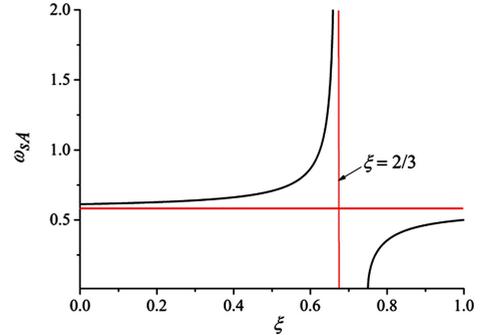
$$(1-\xi)(\eta^2+1-4\eta^2\omega^2) + \xi(2\eta^2\omega^2+1-\eta^2) = 0 \quad (13)$$

若指定无量纲位置坐标  $\xi$ , 则反共振频率  $\omega_{sA}$  满足:

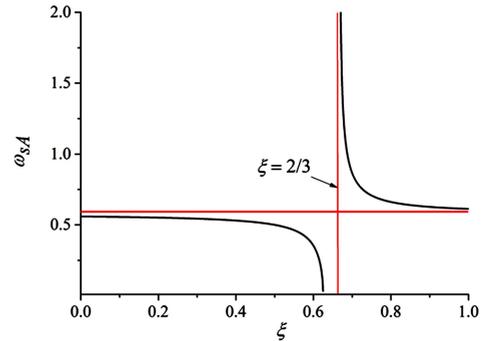
$$\omega_{sA} = \sqrt{\frac{\eta^2(1-2\xi)+1}{2\eta^2(2-3\xi)}} \quad (14)$$

当  $\eta^2 < 3$  时, 图 3(a) 给出反共振频率  $\omega_{sA}$  与无量纲位置坐标  $\xi$  的关系; 当  $\eta^2 > 3$  时, 该关系如图 3(b) 所示.

当  $\eta^2 = 3$  时, 上式退化为  $\omega_{sA} = 1/\sqrt{3}$ , 即图 3 中的红色水平线, 这正是 3.2 节中 c 款的结果.



(a)  $\eta^2 = 2$



(b)  $\eta^2 = 4$

图3 刚性杆上任意位置  $\xi$  处的反共振频率  $\omega_{sA}$

Fig.3 Anti-resonance frequency  $\omega_{sA}$  of the rigid beam at the location coordinate  $\xi$

现考察  $\eta = 1$  时的反共振问题. 此时, 系统频响函数矩阵具有原点反共振频率  $\omega_{AA} = \omega_{BB} = 1/\sqrt{2}$  和跨点反共振频率  $\omega_{AB} = \omega_{BA} = 0$ . 这样的跨点反共振频率表明, 当在刚性杆左端点施加静载荷时, 其右端点保持静止.

对于指定的无量纲位置坐标  $\xi$ , 由式(14)得到该点产生反共振的频率

$$\omega_{sA} = \sqrt{\frac{1-\xi}{2-3\xi}} \quad (15)$$

以下分别讨论原点反共振和跨点反共振问题.

a. 当  $\xi=0$  时,  $X_s(\omega) = X_A(\omega) = H_{AA}(\omega)F_A$  是原点响应, 其反共振频率为  $\omega_{AA} = 1/\sqrt{2}$ , 位于两个固有频率  $\omega_1 = 1/\sqrt{3}$  和  $\omega_2 = 1$  之间; 发生反共振时,  $X_A(\omega_{AA}) = 0$ ,  $X_B(\omega_{AA}) = -2$ , 即  $x_A(t) = 0$ ,  $x_B(t) = -2F_A \sin \sqrt{1/2}t$ . 此时, 刚性杆左端激励为  $f_A(t) = F_A \sin \sqrt{1/2}t$ , 施加在刚性杆右端的弹性力为  $-k_2 x_B(t) = 2F_A \sin \sqrt{1/2}t$ , 刚性杆质心沿  $x_A$  的惯性力为  $-m\ddot{x}_B(t)/2 = -3F_A \sin \sqrt{1/2}t$ ; 显然这三个力之和为零. 还可验证, 右端弹性力对刚性杆左端点的力矩为  $-k_2 L x_B(t) = -2F_A L \sin \sqrt{1/2}t$ , 刚性杆对左端点的惯性力矩为  $-(mL^2/3)(\ddot{x}_B(t)/L) = -2L\ddot{x}_B(t) = 2F_A L \sin \sqrt{1/2}t$ , 两者之和为零. 因此, 虽然外激励作用于刚性杆左端点, 但该端点静止不动, 左端弹簧无变形伸缩, 不提供弹性恢复力; 刚性杆绕左端点作能量守恒的简谐振动, 其幅值为  $2F_A$ , 靠外激励  $F_A$  来维持.

b. 当  $\xi > 0$  时,  $X_s(\omega)$  成为跨点响应, 其反共振频率由式(15)给出. 特别当  $\xi = 1/2$  时, 反共振频率为  $\omega_{sA} = \omega_2 = 1$ , 而  $\xi = 1/2$  正是系统第2阶固有振型的节点. 此时, 刚性杆在左端简谐激励  $f_A(t) = F_A \sin t$  作用下发生第2阶共振, 呈现绕刚性杆质心的转动. 事实上, 若跨点反共振频率与系统某阶固有频率重合, 则反共振位置必然是该阶固有振型的节点.

c. 如果将刚性杆左端的正弦激励视为扫频激励, 则当激励频率  $\omega = 1/\sqrt{2}$  时, 刚性杆左端静止; 随着激励频率升高, 该静止点向右移动, 其距左端点位置为  $s = (2\omega^2 - 1)L / (3\omega^2 - 1)$ , 最终趋于刚性杆长度的  $2/3$ .

## 4 结语

本文分析简谐激励下两自由度系统的反共振问题, 主要结论是: 当系统出现原点反共振时, 外激励对系统不做功, 系统跨点响应是能量守恒的简谐振动, 但其幅值要靠外激励来维持; 当系统出现跨点反共振时, 外激励对系统做功, 但系统两个自由度之间的阻抗无限大, 导致能量无法传输. 对于原点反共振的力学机理解释, 现有文献中的“动力吸振”、“能量转移”等观点均存在问题, 建议采用基于动力平衡分析得到的“动力减振”观点.

文中通过由两个相同弹簧支撑的刚性杆的简谐受迫振动来说明上述概念, 展示了丰富的跨点反共振现象. 例如, 在杆左端施加简谐激励、右端测量稳态振动时, 跨点反共振频率可出现在低于第1阶固有频率的任意频率处, 也可出现在高于第2阶固有频率的一个频段内. 又如, 在杆左端施加简谐激励时, 跨点反共振可出现在从杆左端到杆长  $2/3$  间的任意位置上. 再如, 当跨点反共振频率与系统某阶固有频率重合时, 反共振位置就是该阶固有振型的节点.

## 参 考 文 献

- 1 Den Hartog J P. Mechanical vibrations, 4<sup>th</sup> Edition. New York: Dover Publications Inc, 1984:106~113
- 2 Flannely W G. The dynamic anti-resonant vibration isolator. In: Proceedings of the 22nd Annual AHS National Forum, Washington DC, 1966:152~160
- 3 刘杰, 孙光复. 反共振振动机械的理论及应用. 东北大学学报, 1995, 16(1):82~86 (Liu J, Sun G F. Theory of anti-resonant vibrating machine with applications. *Journal of Northeast University*, 1995, 16(1):82~86 (in Chinese))
- 4 Hanson D, Watersb T P, Thompson D J. The role of anti-resonance frequencies from operational modal analysis in finite element model updating. *Mechanical System and Signal Processing*, 2006, 27(1):74~97
- 5 Ma G C, Sheng P. Acoustic metamaterials: from local resonances to broad horizons. *Science Advances*, 2016, 2(2):e1501595
- 6 方同. 多自由度系统中的反共振. 力学学报, 1979, 11(4):360~366 (Fang T. Anti-resonances in multi-degree-of-freedom systems. *Chinese Journal of Mechanics*, 1979, 11(4):360~366 (in Chinese))
- 7 张军, 方向明. 反共振频率的灵敏度分析及应用. 振动工程学报, 1996, 9(1):9~15 (Zhang J, Fang X M. Sensitivity analysis of structural anti-resonance. *Journal of Vibration Engineering*, 1996, 9(1):9~15 (in Chinese))
- 8 Wang B P. Eigenvalue problems in forced harmonic response analysis in structural dynamics. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2016, 33(4):549~555
- 9 郑兆昌. 机械振动(上). 北京: 机械工业出版社, 1980:147 (Zheng Z C. Mechanical vibration. Beijing: China Machine Press, 1980:147 (in Chinese))

10 闻邦椿,刘树英,张纯宇. 机械振动学. 北京:冶金工业出版社, 2011:196 (Wen B C, Liu S Y, Zhang C Y.

Mechanical vibration. Beijing: Metallurgical Industry Press, 2011:196 (in Chinese))

## ON ANTI-RESONANCE PROBLEM OF A LINEAR SYSTEM

Hu Haiyan<sup>†</sup>

(*MOE Key Lab of Dynamics and Control of Flying Vehicles, School of Aerospace Engineering,  
Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, China*)

**Abstract** This paper first points out that the mechanism of anti-resonances explained in many publications is not reasonable. Then, it presents the theoretical analysis on the anti-resonances of forced harmonic response for a system of two degrees of freedom, revealing the mechanism difference between the driving-point anti-resonance and the transfer anti-resonance, and the relationship between the anti-resonance and the node of a natural mode-shape. Moreover, the paper demonstrates the above stated mechanism and relationship through a case study on the harmonically forced vibration of a rigid beam supported by two identical springs.

**Key words** anti-resonance, mechanism, node of mode-shape, system of two degrees of freedom