

# 基于采样 PD 反馈的倒立摆控制系统的稳定性\*

王强<sup>1</sup> 梁松<sup>2</sup> 王在华<sup>1,2†</sup>

(1.解放军陆军工程大学, 南京 211101) (2.南京航空航天大学 机械结构力学及国家重点实验室, 南京 210016)

**摘要** 数字采样控制是当代主流控制技术,具有变更控制律方便、可靠性高、实时性好、抗干扰能力强等特点.本文研究基于采样 PD 反馈的倒立摆控制系统自平衡问题,其受控方程是一类具有时变时滞的时滞微分方程,其时滞是分段线性函数.首先将闭环系统方程转化为一个差分方程,然后研究了时滞量和采样周期对差分方程的稳定性区域的影响,进而给出了使差分方程具有最快收敛速度的最优增益的计算方法,最后研究了时滞量和采样周期对差分方程收敛速度的影响.数值算例表明,时滞量和采样周期对倒立摆控制系统稳定性以及收敛速度具有重要影响.

**关键词** 倒立摆, 采样控制, 时滞, 稳定区域, 最优增益

DOI: 10.6052/1672-6553-2018-032

## 引言

倒立摆是一个结构简单的力学模型,具有广泛的应用.例如,静止站立的人体<sup>[1-4]</sup>,竖立在手指数尖的火柴棒<sup>[1,5]</sup>,旋转的机器人关节<sup>[6]</sup>和平衡车<sup>[7]</sup>等都可以抽象成倒立摆模型.倒立摆系统是开环不稳定的非线性系统,粘性阻尼不能使倒立摆力学系统稳定,可具有复杂的动力学现象.倒立摆系统由于其广泛应用和复杂的动力学特性吸引了众多学者对其进行研究.在倒立摆的镇定控制中,文献[6]使用 PD(proportional-derivative)控制器研究了机器人姿态平衡问题,并验证了该控制器对弹性参数及载荷质量均具有很好的鲁棒性.文献[8]在倒立摆系统中使用了多个 PID(proportional-integral-derivative)控制器,成功实现了开环系统的稳定控制和轨迹控制,并且控制器对大振幅干扰和干扰具有非常好的鲁棒性.文献[9]结合经典的 LQR(linear quadratic regulator)方法与基因算法给出了控制倒立摆系统的最优控制方法,模拟结果表明,对基因算法求得的最优参数,控制器比经典控制具有更好的控制效果.其它控制手段,如:非线性控制<sup>[10]</sup>、模糊控制<sup>[11]</sup>、自动控制<sup>[12]</sup>等都可实现对倒立摆系统的控制.在控制环节,信息采集、传输、处理以及作动

器响应等过程都需要一定时间,不可避免地存在时滞,从而控制系统方程是时滞微分方程.研究表明,对于小时滞,时滞 PD 控制器能有效地控制倒立摆系统,但是当时滞量超过一个临界值时,时滞 PD 控制器将不能使倒立摆系统稳定<sup>[1,13]</sup>.如果在时滞 PD 控制器中增加时滞加速度反馈项,得到时滞 PDA(proportional-derivative-acceleration)控制,能有效地增大增益平面稳定性区域的大小<sup>[14,15]</sup>.

数字采样控制是当前控制工程技术领域的一种主流控制技术,它基于计算机完成信号采样、分析、传输,并以离散的数字信号作为控制输入.采样控制是具有分段线性时滞的反馈控制,时滞量和采样周期对控制系统的动力学有重要影响.例如,在研究采样 PD 控制作用下单自由度振动系统的稳定性时,文献[16]将采样控制中的时滞量从一个采样周期滞后<sup>[17]</sup>推广到了多个采样周期滞后,理论上说明了随着时滞量的增加,稳定性区域将逐渐减小.文献[18]讨论了位移与速度反馈具有不同时滞时,时滞 PD 采样控制中不同时滞量组合对一个简单的力控制系统的稳定性区域的影响,与等时滞情形相比较,当位移信号的时滞量两倍于速度信号的时滞量时,在增益参数平面内具有更大的稳定性区域.文献[19]以单自由度系统为研究对象,考虑

2017-06-20 收到第 1 稿,2017-09-14 收到修改稿.

\* 国家自然科学基金(11372354)

† 通讯作者 E-mail: zhwang@nuaa.edu.cn

了速度信号和加速度信号都具有时滞效应的反馈控制,发现时滞加速度信号在采样作用下可以被看作是一种含时滞的参数激励,其能使不稳定系统得到镇定,同时,在一定范围的采样周期下,增大采样周期会使得稳定性区域增大.这表明,采样控制的时滞量与采样周期都可能给系统的稳定性带来复杂的影响.目前,多数文章研究了时滞量对采样控制系统稳定性的影响,少有文章考虑采样周期对稳定性的影响.本文将采样 PD 反馈控制应用于一个含阻尼的倒立摆系统上,不仅考虑时滞量对系统稳定性的影响,而且考虑采样周期对稳定性区域的影响,以及时滞量和采样周期对收敛速度的影响.

本文第一节给出了采样控制作用下的倒立摆控制系统的运动方程,它是一个微分-差分方程,然后在满足采样定理条件下将其转化为差分方程;第二节基于差分方程研究了采样周期与时滞量对倒立摆系统稳定性区域大小的影响;第三节给出了控制增益的选取方法,使倒立摆控制系统具有最快收敛速度,并且讨论了采样周期与时滞量对收敛速度的影响;第四节为本文的总结.

## 1 受控倒立摆系统的运动方程

考察图 1 所示的作平面运动的倒立摆系统,摆长  $L$ ,质量  $m$ ,摆的质心距转轴的距离  $l$ ,摆的转动惯量为  $J$ ,滑块的质  $M$ ,滑块与滚轴的摩擦阻力忽略不计,滑块受到水平的控制力  $Q$ .设摆杆偏离竖直向上的角度为  $\theta$ ,滑块的水平位移为  $x$ .

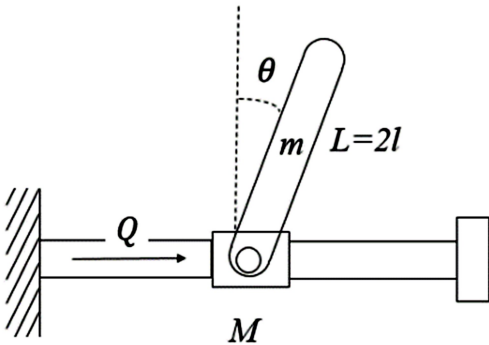


图 1 倒立摆模型

Fig.1 Model of an inverted pendulum

假定只考虑摆和滑块转轴之间的摩擦力,且产生的耗散能量为  $\frac{1}{2}c\dot{\theta}^2$ ,其中  $c$  为耗散系数.根据含耗散能量项的拉格朗日方程:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} + \frac{\partial V}{\partial q_j} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_j} = F_{q_j} \quad (1)$$

其中,  $q_j$  为广义坐标,  $T, V, D$  和  $F_{q_j}$  分别表示系统的动能、势能、耗散能和广义力.图 1 的倒立摆系统是一个二自由度系统,我们考虑的广义坐标是小车的位移  $x$  和摆角  $\theta$ .注意到:

$$T = \frac{1}{2}m\left\{\left[\frac{d}{dt}(x+l\sin\theta)\right]^2 + \left[\frac{d}{dt}(l\cos\theta)\right]^2\right\} + \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2$$

$$V = mgl\cos\theta, D = \frac{1}{2}c\dot{\theta}^2$$

于是有:

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0, \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = (m+M)\dot{x} + ml\cos\theta \cdot \dot{\theta}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) = (m+M)\ddot{x} + ml(-\sin\theta \cdot \dot{\theta}^2 + \cos\theta \cdot \ddot{\theta})$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 0, \frac{\partial D}{\partial \dot{x}} = 0, F_x = Q$$

$$\frac{\partial T}{\partial \theta} = -ml\dot{x}\sin\theta \quad (2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = J\dot{\theta} + ml\cos\theta \cdot \dot{x} + ml^2\ddot{\theta}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}\right) = J\ddot{\theta} + ml(\ddot{x} + \cos\theta - \dot{x}\sin\theta \cdot \dot{\theta} + l\ddot{\theta})$$

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = -mgl\sin\theta, \frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} = c\dot{\theta}, F_\theta = 0$$

将(2)式代入(1)中,得倒立摆的运动方程为:

$$(m+M)\ddot{x} + ml\cos\theta \cdot \ddot{\theta} - ml\sin\theta \cdot \dot{\theta}^2 = Q$$

$$ml\cos\theta \cdot \ddot{x} + (J+ml^2)\ddot{\theta} + c\dot{\theta} - mgl\sin\theta = 0 \quad (3)$$

其中,  $J = \frac{1}{3}ml^2$ ,对方程组(3)进行解耦,消去  $\ddot{x}$  项,得:

$$\left(\frac{4}{3}ml^2 - \frac{m^2l^2\cos^2\theta}{m+M}\right)\ddot{\theta} + c\dot{\theta} - mgl\sin\theta + \frac{m^2l^2\sin\theta\cos\theta}{m+M}\dot{\theta}^2 = -\frac{ml\cos\theta}{m+M}Q \quad (4)$$

在  $\theta=0$  处进行线性化和无量纲化,得到关于摆角  $\theta$  满足的二阶微分方程:

$$\ddot{\theta}(t) + 2\xi\Omega\dot{\theta}(t) - \Omega^2\theta(t) = u(t) \quad (5)$$

其中,  $\xi = \frac{c}{2ml}\sqrt{\frac{3(m+M)}{(4m+M)gl}}$ ,  $\Omega = \sqrt{\frac{3(m+M)g}{(m+4M)l}}$ ,

$$u(t) = -\frac{3}{(m+4M)l}Q(t).$$

采用等时长的采样,采样周期  $\Delta t = t_i - t_{i-1}$ , 利用零阶采样保持,具有输入时滞的采样PD反馈控制可表示为:

$$u(t) = -k_p \theta(t_{i-m}) - k_d \dot{\theta}(t_{i-m}) \quad (6)$$

其中,  $t \in [t_i, t_{i+1})$ ,  $t_{i-m} = t_i - m\Delta t$ ,  $m \in \mathbb{Z}^+$ ,  $k_p$  和  $k_d$  分别表示位移反馈增益和速度反馈增益.

在实际情况下,用  $\Delta t$  的整数倍近似表示时滞量会产生  $\frac{1}{2}\Delta t$  的误差,但对于高频( $\Delta t$  很小),这种近似带来的误差会很小.比如,市场上的传感器设备GY-85,其集成了加速度计、陀螺仪、电子罗盘等传感器,其正常工作的频率为8kHz,近似表示时滞量的方法带来的误差不会超过  $6.25 \times 10^{-5}$  s,该误差在一些应用中几乎可以忽略不计.

下面考虑受控倒立摆系统在平衡点处的局部稳定性,将(6)式代入(5)式中,得到如下分段线性微分-差分方程:

$$\ddot{\theta}(t) + 2\xi\Omega\dot{\theta}(t) - \Omega^2\theta(t) = -k_p\theta(t_{i-m}) - k_d\dot{\theta}(t_{i-m}), \quad t \in [t_i, t_{i+1}) \quad (7)$$

此方程可转化为差分方程.事实上,令  $y_1 = \theta$ ,  $y_2 = \dot{\theta}$ , 并代入(7)式中,得:

$$\begin{aligned} \dot{y}_1(t) &= y_2(t) \\ \dot{y}_2(t) &= -2\xi\Omega y_2(t) + \Omega^2 y_1(t) - k_p y_1(t_{i-m}) - k_d y_2(t_{i-m}) \end{aligned}$$

其中,  $t \in [t_i, t_{i+1})$ . 再令  $\mathbf{Y} = [y_1 \quad y_2]^T$ , 得到受控倒立摆的状态方程:

$$\dot{\mathbf{Y}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{Y}(t) + \mathbf{W}\mathbf{Y}(t_{i-m}), \quad t \in [t_i, t_{i+1}) \quad (8)$$

$$\text{其中 } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \Omega^2 & -2\xi\Omega \end{bmatrix}, \mathbf{W} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -k_p & -k_d \end{bmatrix}.$$

在区间  $t \in [t_i, t_{i+1})$  使用常数变易法,得到:

$$\mathbf{Y}(t) = e^{\mathbf{A}(t-t_i)} \mathbf{Y}(t_i) + \int_{t_i}^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{d}\tau \cdot \mathbf{W}\mathbf{Y}(t_{i-m})$$

令  $s = t - \tau$ , 有:

$$\mathbf{Y}(t) = e^{\mathbf{A}(t-t_i)} \mathbf{Y}(t_i) + \int_0^{t-t_i} e^{\mathbf{A}s} \mathbf{d}s \cdot \mathbf{W}\mathbf{Y}(t_{i-m})$$

将  $t = t_{i+1}$  代入上式可以得到采样点之间的关系式:

$$\mathbf{Y}(t_{i+1}) = e^{\mathbf{A}\Delta t} \mathbf{Y}(t_i) + \int_0^{\Delta t} e^{\mathbf{A}s} \mathbf{d}s \cdot \mathbf{W}\mathbf{Y}(t_{i-m}) \quad (9)$$

由于  $|\mathbf{A}| = -\Omega^2 \neq 0$ , 从而(9)式右端项可写为:

$$\mathbf{Y}(t_{i+1}) = \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{Y}(t_i) + \tilde{\mathbf{B}}\mathbf{Y}(t_{i-m}) \quad (10)$$

其中,  $\tilde{\mathbf{A}} = e^{\mathbf{A}\Delta t}$ ,  $\tilde{\mathbf{B}} = \mathbf{A}^{-1}(e^{\mathbf{A}\Delta t} - \mathbf{I})\mathbf{W}$ .

为了计算  $e^{\mathbf{A}\Delta t}$ , 首先求矩阵  $\mathbf{A}\Delta t$  特征值:

$$\lambda_1 = \lambda_{A,1} \Delta t = (-\xi + \sqrt{\xi^2 + 1}) \Omega \Delta t$$

$$\lambda_2 = \lambda_{A,2} \Delta t = (-\xi - \sqrt{\xi^2 + 1}) \Omega \Delta t$$

皆为实数; 然后对  $\mathbf{A}\Delta t$  进行对角化, 可求得可逆矩

$$\text{阵 } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\lambda_{A,1}} & \frac{1}{\lambda_{A,2}} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \text{ 使得:}$$

$$\mathbf{A}\Delta t = \mathbf{B} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \mathbf{B}^{-1}$$

进而可得:

$$e^{\mathbf{A}\Delta t} = \begin{bmatrix} \frac{e^{\lambda_{A,1}\Delta t} \lambda_{A,1} - e^{\lambda_{A,2}\Delta t} \lambda_{A,2}}{\lambda_{A,1} - \lambda_{A,2}} & \frac{e^{\lambda_{A,1}\Delta t} - e^{\lambda_{A,2}\Delta t}}{\lambda_{A,1} - \lambda_{A,2}} \\ \frac{(e^{\lambda_{A,1}\Delta t} - e^{\lambda_{A,2}\Delta t}) \lambda_{A,1} \lambda_{A,2}}{\lambda_{A,1} - \lambda_{A,2}} & \frac{e^{\lambda_{A,1}\Delta t} \lambda_{A,1} - e^{\lambda_{A,2}\Delta t} \lambda_{A,2}}{\lambda_{A,1} - \lambda_{A,2}} \end{bmatrix}$$

将上述结果代入(10), 得:

$$\begin{aligned} y_1(t_{i+1}) &= a_{11}y_1(t_i) + a_{12}y_2(t_i) + \\ &\quad b_{11}y_1(t_{i-m}) + b_{12}y_2(t_{i-m}) \\ y_2(t_{i+1}) &= a_{21}y_1(t_i) + a_{22}y_2(t_i) + \\ &\quad b_{21}y_1(t_{i-m}) + b_{22}y_2(t_{i-m}) \end{aligned} \quad (11)$$

其中各系数分别为:

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{e^{\lambda_{A,1}\Delta t} \lambda_{A,1} - e^{\lambda_{A,2}\Delta t} \lambda_{A,2}}{\lambda_{A,1} - \lambda_{A,2}} \\ a_{12} &= \frac{e^{\lambda_{A,1}\Delta t} - e^{\lambda_{A,2}\Delta t}}{\lambda_{A,1} - \lambda_{A,2}} \\ a_{21} &= \frac{(e^{\lambda_{A,1}\Delta t} - e^{\lambda_{A,2}\Delta t}) \lambda_{A,1} \lambda_{A,2}}{\lambda_{A,1} - \lambda_{A,2}} \\ a_{22} &= \frac{e^{\lambda_{A,1}\Delta t} \lambda_{A,1} - e^{\lambda_{A,2}\Delta t} \lambda_{A,2}}{\lambda_{A,1} - \lambda_{A,2}} \\ b_{11} &= \frac{(e^{\lambda_{A,1}\Delta t} \lambda_{A,2} - e^{\lambda_{A,2}\Delta t} \lambda_{A,1} + \lambda_{A,1} - \lambda_{A,2}) k_p}{(\lambda_{A,1} - \lambda_{A,2}) \lambda_{A,1} \lambda_{A,2}} \\ b_{12} &= \frac{(e^{\lambda_{A,1}\Delta t} \lambda_{A,2} - e^{\lambda_{A,2}\Delta t} \lambda_{A,1} + \lambda_{A,1} - \lambda_{A,2}) k_d}{(\lambda_{A,1} - \lambda_{A,2}) \lambda_{A,1} \lambda_{A,2}} \\ b_{21} &= \frac{(e^{\lambda_{A,1}\Delta t} - e^{\lambda_{A,2}\Delta t}) k_p}{\lambda_{A,1} - \lambda_{A,2}} \\ b_{22} &= \frac{(e^{\lambda_{A,1}\Delta t} - e^{\lambda_{A,2}\Delta t}) k_d}{\lambda_{A,1} - \lambda_{A,2}} \end{aligned}$$

进一步, 令:

$$\begin{aligned} &[z_1(t_i), \dots, z_{m+1}(t_i), z_{m+2}(t_i), \dots, z_{2m+2}(t_i)]^T \\ &= [y_1(t_i), \dots, y_1(t_{i-m}), y_2(t_i), \dots, y_2(t_{i-m})]^T \\ &= \mathbf{Z}(t_i) \end{aligned}$$

方程(11)可改写为:

$$\mathbf{Z}(t_{i+1}) = \mathbf{G}\mathbf{Z}(t_i) \quad (12)$$

其中,

$$\mathbf{G} = \left[ \begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & 0 & \cdots & 0 & b_{11} & a_{12} & 0 & \cdots & 0 & b_{12} \\ 1 & & & & 0 & & & & & \\ & \ddots & & & \vdots & & & & & \\ & & \ddots & & \vdots & & & & & \\ & & & 1 & 0 & & & & & \\ \hline a_{21} & 0 & \cdots & 0 & b_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 & b_{22} \\ & & & & 1 & & & & & 0 \\ & & & & & \ddots & & & & \vdots \\ & & & & & & \ddots & & & \vdots \\ & & & & & & & 1 & & 0 \end{array} \right] \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} m+1 \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ m+1 \end{array}$$

### 2 稳定性分析

在满足采样定理条件下,受控倒立摆系统(7)的零解渐近稳定的充分必要条件是差分方程(12)中的系数矩阵  $\mathbf{G}$  的所有特征值的复数模小于 1. 下面首先求出矩阵  $\mathbf{G}$  的特征函数,然后讨论对哪些反馈增益值,其所有零点的模均小于 1.

#### 2.1 增益平面的稳定性区域

求矩阵  $\lambda\mathbf{I}-\mathbf{G}$  的行列式的值,将其按第 2 列和第  $m+3$  列进行展开,可得矩阵  $\mathbf{G}$  的特征函数:

$$|\lambda\mathbf{I}-\mathbf{G}| = \lambda^{2m+2} - \beta_1\lambda^{2m+1} + \beta_2\lambda^{2m} - \beta_3\lambda^{m+1} + \beta_4\lambda^m + \beta_5 \quad (13)$$

其中,

$$\begin{aligned} \beta_1 &= a_{11} + a_{22}, \beta_2 = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}, \\ \beta_3 &= b_{11} + b_{22}, \beta_4 = a_{11}b_{22} + b_{11}a_{22} - a_{21}b_{12} - a_{12}b_{21}, \\ \beta_5 &= b_{11}b_{22} - b_{21}b_{12}. \end{aligned}$$

由于  $|\mathbf{W}| = 0$ , 所以有:

$$\beta_5 = |\mathbf{A}^{-1}(e^{A\Delta t} - \mathbf{I})\mathbf{W}| = 0$$

因而(13)式可化简为  $|\lambda\mathbf{I}-\mathbf{G}| = \lambda^m p_G(\lambda)$ , 其中:

$$p_G(\lambda) = \lambda^{m+2} - \beta_1\lambda^{m+1} + \beta_2\lambda^m - \beta_3\lambda + \beta_4 \quad (14)$$

其中的系数可进一步表示为:

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \text{tr}(e^{A\Delta t}) = \text{tr} \left( \begin{bmatrix} e^{\lambda_1} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} \end{bmatrix} \right) \\ &= e^{(-\xi + \sqrt{\xi^2 + 1})\Omega\Delta t} + e^{(-\xi - \sqrt{\xi^2 + 1})\Omega\Delta t} \\ \beta_2 &= |e^{A\Delta t}| = |\mathbf{B}| \begin{vmatrix} e^{\lambda_1} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} \end{vmatrix} |\mathbf{B}|^{-1} \\ &= e^{\lambda_1 + \lambda_2} = e^{-2\xi\Omega\Delta t} \end{aligned}$$

方程(12)的稳定性由多项式  $p_G(\lambda)$  的零点分布完

全确定,进而得到在增益平面上的稳定性区域.

为此考察临界稳定性条件,将  $\lambda = \pm 1$  代入(14)式,得:

$$p_G(\pm 1) = (\pm 1)^m \cdot \frac{(e^{\lambda_1 - 1})(e^{\lambda_2 - 1})(\Omega^2 - k_p)}{\Omega^2},$$

因为  $\lambda_1\lambda_2 = -\Omega^2\Delta^2 t \neq 0$ , 所以由  $p_G(\pm 1) = 0$  推出  $k_p = \Omega^2$ , 此为临界曲线一支. 将  $\lambda = e^{i\omega} = \cos\omega + i\sin\omega$ ,  $\omega \in (0, \pi)$ , 代入(14)式,分离  $p_G(e^{i\omega})$  的实部与虚部得到:

$$\begin{aligned} \text{rp}(\omega, k_p, k_d) &= \Re(p_G(e^{i\omega})) \\ &= \cos((m+2)\omega) - \beta_1\cos((m+1)\omega) + \beta_2\cos(m\omega) - \beta_3\cos\omega + \beta_4 \\ \text{ip}(\omega, k_p, k_d) &= \Im(p_G(e^{i\omega})) \\ &= \sin((m+2)\omega) - \beta_1\sin((m+1)\omega) + \beta_2\sin(m\omega) - \beta_3\sin\omega \end{aligned}$$

再由关于增益的线性方程组:

$$\begin{cases} \text{rp}(\omega, k_p, k_d) = 0 \\ \text{ip}(\omega, k_p, k_d) = 0 \end{cases}, \omega \in [0, \pi) \quad (15)$$

求出  $(k_p, k_d)$  关于  $\omega$  的参数方程,在参数平面上确定临界曲线的另一支. 稳定性区域的边界曲线由临界曲线组成. 临界曲线将平面区域划分成多个连通子区域,在每一个连通子区域内,模小于(或大于)1的特征值的个数是相同的,所以,在连通子区域中任意选取一组增益值对应控制系统的稳定性可确定系统在整个子区域内的稳定性.

#### 2.2 采样周期对稳定性区域影响

下列算例中,取  $\xi = 0.1, \Omega = 1$ , 此时  $k_p = \Omega^2 = 1$  是临界曲线之一. 取固定的时滞量  $m\Delta t = 0.1$ , 不同的采样周期  $\Delta t = 0.01, 0.02, 0.05, 0.1$ , 即所对应的  $m = 10, 5, 2, 1$ . 下面分别对这 4 种情况进行讨论.

(1) 当  $\Delta t = 0.01, m = 10$  时,  $p_G(\lambda) = 0$  化为:

$$\begin{aligned} &\lambda^{12} - 0.1998 \times 10 \lambda^{11} + 0.9980 \lambda^{10} + \\ &(0.4997 \times 10^{-4} k_p + 0.9990 \times 10^{-2} k_d) \lambda - \\ &0.9990 \times 10^{-2} k_d + 0.4993 \times 10^{-4} k_p = 0 \end{aligned} \quad (16)$$

将  $\lambda = \cos\omega + i\sin\omega$  代入(16)式,从中可以求得  $k_p, k_d$  关于  $\omega$  的参数方程. 令  $\omega$  取遍  $[0, \pi)$ , 即得到临界曲线,如图 2 所示. 在所围成的封闭区域中,取一组参数值  $(k_p, k_d) = (30, 8)$ , 方程(16)的所有复根如表 1 所示,这 12 个根的模均小于 1, 所以系统在临界曲线与临界直线  $k_p = \Omega^2 = 1$  所围成的封闭区域内是渐近稳定的.



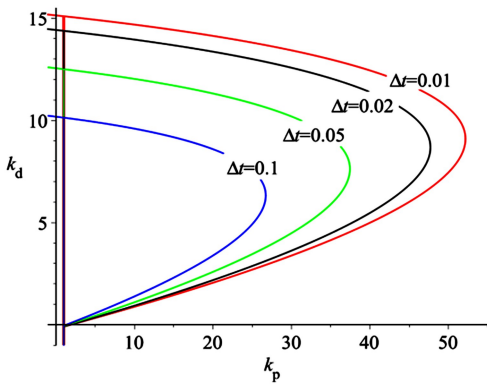


图 2 采样周期对稳定性区域的影响,其中  $\tau=0.1$   
Fig.2 Effect of sampling period on the stability region where the delay value is fixed,  $\tau=0.1$

表 1  $\Delta t=0.01, m=10$  取  $(k_p, k_d) = (30, 8)$  时的特征根及其复数模

Table 1 Characteristic roots and their module when  $\Delta t=0.01, m=10, (k_p, k_d) = (30, 8)$

root $\lambda$	module $ \lambda $
0.9417	0.9417
-0.7350	0.7350
$0.9759 \pm 0.9350 \times 10^{-1}i$	0.9804
$0.6092 \pm 0.5318i$	0.8087
$0.1844 \pm 0.7462i$	0.7686
$-0.2660 \pm 0.6995i$	0.7484
$-0.6078 \pm 0.4188i$	0.7381

(2) 当  $\Delta t=0.02, m=5$  时,  $p_G(\lambda) = 0$  化为:

$$\lambda^7 - 0.1996 \times 10^{-1} \lambda^6 + 0.9960 \times 10^{-1} \lambda^5 + (0.1997 \times 10^{-3} k_p + 0.1996 \times 10^{-2} k_d) \lambda - 0.1996 \times 10^{-1} k_d + 0.1995 \times 10^{-3} k_p = 0 \quad (17)$$

与(1)的方法相同,可画出临界曲线,如图 2 所示.在所围成的封闭区域中,取一组参数值  $(k_p, k_d) = (30, 8)$ , 方程(17)的所有复根(7 个根)的模均小于 1, 所以系统在临界曲线与临界直线  $k_p = 1$  所围的封闭区域内是渐近稳定的.

(3) 当  $\Delta t=0.05, m=2$  时,  $p_G(\lambda) = 0$  化为:

$$\lambda^4 - 0.1993 \times 10 \lambda^3 + 0.9900 \lambda^2 + (0.1246 \times 10^{-2} k_p + 0.4977 \times 10^{-1} k_d) \lambda - 0.4977 \times 10^{-1} k_d + 0.1242 \times 10^{-2} k_p = 0 \quad (18)$$

其临界曲线如图 2 所示.在所围成的封闭区域中取一组参数值  $(k_p, k_d) = (20, 8)$ , 方程(18)的所有复根的模均小于 1, 所以系统在临界曲线与临界直线  $k_p = 1$  所围的封闭区域内是渐近稳定的.

(4) 当  $\Delta t=0.1, m=1$  时,  $p_G(\lambda) = 0$  化为:

$$\lambda^3 - 0.1990 \times 10 \lambda^2 + (0.9802 + 0.4971 \times 10^{-2} k_p + 0.9917 \times 10^{-1} k_d) \lambda - 0.9917 \times 10^{-1} k_d + 0.4938 \times 10^{-2} k_p = 0 \quad (19)$$

其临界曲线如图 2 所示.在所围成的封闭区域中,取一组参数值  $(k_p, k_d) = (10, 6)$ , 方程(19)的所有复根的模均小于 1, 所以系统在临界曲线与临界直线  $k_p = 1$  所围的封闭区域内是渐近稳定的.

由图 2 可以看出,对于固定时滞量的系统(7),采样频率越高(采样周期越短),其稳定性区域越大.其原因可能是采样频率越高,采样器在单位时间内获取系统的实时状态信息就越多<sup>[18]</sup>,其更有利于控制系统稳定.

### 2.3 时滞量对稳定性区域影响

选取固定的采样周期  $\Delta t = 0.01$ , 不同的时滞量  $\tau = m\Delta t = 0.1, 0.11, 0.12, 0.13$ , 即对应的  $m = 10, 11, 12, 13$ . 其中  $m = 10$ , 已在前一节讨论过,对于  $m = 11, 12, 13$ , 使用同样的分析方法可以得到渐近稳定区域,其结果如图 3 所示.

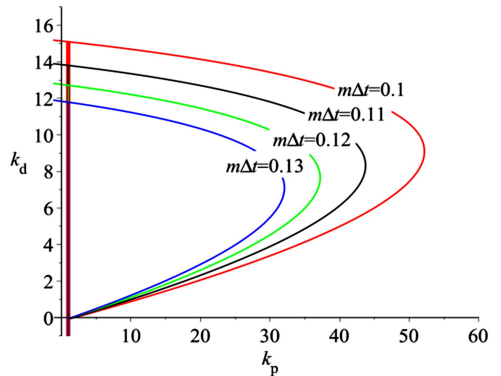


图 3 时滞量对稳定区域的影响,其中  $\Delta t=0.01$   
Fig.3 Influence of time delay on stable region with sampling period where  $\Delta t=0.01$

由图 3 可以看出,对于固定采样周期的系统(7),稳定性区域的大小对时滞量的变化非常敏感:时滞量的小改变,会导致稳定性区域的大变化.

## 3 最优反馈增益

令向量  $e^{(k)} = \mathbf{Z}^* - \mathbf{Z}(t_k)$  表示迭代公式(12)的第  $k$  步的状态误差,其中  $\mathbf{Z}^* = \mathbf{0}$  是唯一的平衡点,  $\mathbf{Z}(t_k)$  表示第  $k$  步迭代结果.以  $e^{(0)} = \mathbf{Z}_0$  为初始状态,则状态误差满足  $e^{(k+1)} = \mathbf{G}e^{(k)}$ , 进而有  $e^{(k)} = \mathbf{G}^k e^{(0)}$ , 上式两边取范数得:

$$\|e^{(k)}\| \leq \|\mathbf{G}^k\| \cdot \|e^{(0)}\| = (\|\mathbf{G}^k\|^{1/k})^k \cdot$$

$\|e^{(0)}\|$

故  $\|G^k\|^{1/k}$  的大小决定状态误差  $e^{(k)}$  收敛到零向量的速度,  $\|G^k\|^{1/k}$  越小, 收敛速度越快. 由于:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|G^k\|^{1/k} = \rho(G)$$

其中,  $\rho(G)$  是矩阵  $G$  的谱半径, 其值等于矩阵  $G$  的所有特征值的复数模最大值. 当  $\rho(G) < 1$  时, 迭代格式收敛,  $\rho(G)$  越小, 收敛速度越快.

### 3.1 计算方法

为了在增益平面内求得使  $\rho(G)$  取最小值的增益值, 对取定的  $r$ , 令特征值  $\lambda = re^{i\omega}$ ,  $\omega \in [0, \pi)$ , 它定义了增益平面上的参数曲线, 该曲线将平面分割成若干连通子区域, 每个子区域中, 模大于 (或小于)  $r$  的特征根的个数保持不变. 在选定的稳定性增益区域内, 依次减小  $r$  ( $0 < r < 1$ ) 的取值, 直到有  $r = r^*$  使  $\lambda = r^* e^{i\omega}$ ,  $\omega \in [0, \pi)$  所围成的稳定性区域消失, 则  $r = r^*$  对应的增益值  $k_p = k_p^*$ ,  $k_d = k_d^*$  即最优增益值.

以 2.2(1) 的讨论为例, 取  $m = 10, \Delta t = 0.01$ . 令  $\lambda = re^{i\omega}$  代入 (18) 式中, 得:

$$\begin{aligned} p_G(\lambda) = & r^{12} e^{12i\omega} - 1.998r^{11} e^{11i\omega} + 0.9980r^{10} e^{10i\omega} + \\ & (0.4997 \times 10^{-4} k_p + 0.9990 \times 10^{-2} k_d) r e^{i\omega} - \\ & 0.9990 \times 10^{-2} k_d + 0.499 \times 10^{-4} k_p \end{aligned} \quad (20)$$

当  $\omega = 0$  时, 即  $\lambda = r$ , 由  $p_G(r) = 0$  求得临界曲线中的一条直线  $l_1$ , 再根据隐函数定理, 其斜率为:

$$S_1(r) = \frac{dk_d}{dk_p} = \frac{\frac{\partial p_G}{\partial k_d}}{\frac{\partial p_G}{\partial k_p}} \quad (21)$$

当  $\omega \in (0, \pi)$  时, 由  $p_G(re^{i\omega}) = 0$  得到参数方程:

$$\begin{aligned} k_p(\omega) &= H_1(r, \omega) \\ k_d(\omega) &= H_2(r, \omega) \end{aligned} \quad (22)$$

上述参数方程表示临界曲线中的另外一支曲线  $l_2$ . 由  $p_G(\lambda)$  的连续性知:

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} p_G(re^{i\omega}) = p_G(r)$$

故  $l_1$  与  $l_2$  在  $\omega = 0$  处相交, 并且相切情形发生在  $\omega = 0$  处. 不难算出曲线  $l_2$  在  $\omega \rightarrow 0$  时的斜率:

$$S_2(r) = \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial H_2(r, \omega)}{\partial \omega}}{\frac{\partial H_1(r, \omega)}{\partial \omega}} \quad (23)$$

曲线  $l_1$  与  $l_2$  发生相切时, 即:

$$S_1(r) = S_2(r) \quad (24)$$

可解得  $r$  ( $0 < r < 1$ ) 的根: 0.7200 和 0.9451. 显然发生第一次相切时, 稳定性区域为空, 而后随着  $r$  减小, 均不存在稳定性区域, 故舍弃小的值 0.7200.

如图 4 所示, 在递减的过程中, 分别取  $r = 0.99, 0.98, 0.97, 0.946$ , 临界曲线所围的封闭区域越来越小, 直至  $r = 0.946$  时稳定性区域几乎为空集, 区域内部的增益值对应的谱半径都比 0.946 要小, 对应于 (16) 的所有特征根的模均小于 0.946.

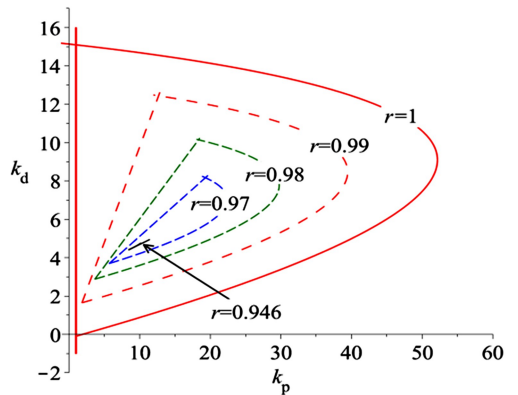


图 4 谱半径与稳定性区域 ( $m = 10, \Delta t = 0.01$ )

Fig.4 Plot of spectral radius and stability regions ( $m = 10, \Delta t = 0.01$ )

将  $r^* = 0.9451$  代入 (22) 中, 并令  $\omega \rightarrow 0$ , 得:

$$\begin{aligned} k_p^* &= \lim_{\omega \rightarrow 0} H_1(r^*, \omega) \\ k_d^* &= \lim_{\omega \rightarrow 0} H_2(r^*, \omega) \end{aligned} \quad (25)$$

增益 ( $k_p^*, k_d^*$ ) 即为最优增益,  $r^*$  为最优增益下 (16) 式的谱半径. 经计算, 最优增益为:

$$k_p^* = 0.8435 \times 10, \quad k_d^* = 0.4407 \times 10$$

将上述增益代入 (16) 中, 求出特征函数的零点, 所有零点均在以  $r^*$  为半径的圆内, 此时  $\rho(G) = r^*$ .

### 3.2 采样周期对最快收敛速度的影响

固定时滞量  $\tau = m\Delta t = 0.1$ , 考察采样周期为  $\Delta t = 0.02, 0.05, 0.1$  时的最快收敛速度.

由特征函数及 (21) ~ (25) 式可以求出各系统参数下的最小谱半径和最优增益. 表 2 给出 4 种不同采样周期下最优增益及最快收敛速度的关系, 从中可以看出, 随着  $m$  减小, 即采样周期增大, 最优增益中的速度增益和位移增益均减小, 并且最小谱半径也减小. 在相同时间段  $\tau = m\Delta t = 0.1$ , 系统趋于稳态的速度由  $r^*$  决定, 由表 2 最后一列可知, 采样

周期越大,实际的最快收敛速度越慢。

表2 采样周期对最优增益及最快收敛速度的影响

Table 2 Effect of sampling period on the optimal gain and the fastest convergence rate

$m$	$\Delta t$	$k_p^*$	$k_d^*$	$r^*$	$r^{*m}$
10	0.01	$0.8435 \times 10$	$0.4407 \times 10$	0.9451	0.5686
5	0.02	$0.7796 \times 10$	$0.4215 \times 10$	0.8976	0.5827
2	0.05	$0.6349 \times 10$	$0.3744 \times 10$	0.7865	0.6185
1	0.10	$0.4850 \times 10$	$0.3185 \times 10$	0.6633	0.6634

### 3.3 时滞量对最快收敛速度的影响

时滞量对最快收敛速度有重要影响,以 2.2 节中的  $m\Delta t=0.1, 0.11, 0.12, 0.13$  为例,根据 3.2 节的结果,取  $\Delta t=0.01$ ,经计算,得到时滞量与谱半径的关系,如表 3 所示,采样周期固定时,随着时滞量的增加,系统最快收敛速度将减小。

表3 时滞量对最优增益及最快收敛速度的影响

Table 3 Effect of time delay on the optimal gain and the fastest convergence rate

$m$	$\Delta t$	$k_p^*$	$k_d^*$	$r^*$
10	0.01	$0.9985 \times 10$	$0.4239 \times 10$	0.5686
11	0.01	$0.7193 \times 10$	$0.4030 \times 10$	0.5971
12	0.01	$0.6273 \times 10$	$0.3714 \times 10$	0.6222
13	0.01	$0.5538 \times 10$	$0.3446 \times 10$	0.6444

## 4 结论

采样 PD 反馈控制作用下倒立摆系统的稳定性受诸多因素的影响,如采样周期、时滞量、反馈增益等。研究表明,一方面,采样周期的减小可使反馈增益平面的稳定性区域会增大、最快收敛速度得到提高。时滞影响了反馈控制的性能:时滞量越大,系统越难以控制,这极大地减小了稳定性区域的大小,同时降低了最快收敛速度。另一方面,如果适当增大采样周期,即降低对采样器性能的要求,虽然会使得稳定性区域减小,最快收敛速度减小,但是,相应的反馈增益可能会大大减小,即降低了对作动器性能的要求。在实际应用中,应根据现实条件与需求来设计控制策略,合理地采用作动器、采样器以及控制指标来设定相关参数。

## 参 考 文 献

1 Milton J, Cabrera J L, Ohira T, et al. The time-delayed inverted pendulum: implications for human balance con-

trol. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 2009, 19(2): 026110

- Stepan G, Insperger T. Dynamics of quiet standing-human and robotic sensory systems to compensate delay effects. In: 4th Asia International Symposium on Mechatronics. Asia International Symposium on Mechatronics. Singapore, 2010: 15~18
- Insperger T, Milton J, Stepan G. Semidiscretization for time-delayed neural balance control. *Siam Journal on Applied Dynamical Systems*, 2015, 14(3): 1258~1277
- Kot A, Nawrocka A. Modeling of human balance as an inverted pendulum. In: Control Conference (ICCC), 2014 15th International Carpathian. IEEE, 2014: 254~257.
- Cabrera J L, Milton J. On-off intermittency in a human balancing task. *Physical Review Letters*, 2002, 89(15): 158702
- Tomei P. A simple PD controller for robots with elastic joints. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2002, 36(10): 1208~1213
- Ha Y S, Yuta S. Trajectory tracking control for navigation of the inverse pendulum type self-contained mobile robot. *Robotics & Autonomous Systems*, 1996, 17(1~2): 65~80
- Wang J J. Simulation studies of inverted pendulum based on PID controllers. *Simulation Modelling Practice & Theory*, 2011, 19(1): 440~449
- Wongsathan C, Sirima C. Application of GA to design LQR controller for an inverted pendulum system. In: IEEE International Conference on Robotics and Biomimetics. IEEE Computer Society, 2009: 951~954
- Boubaker O. The inverted pendulum benchmark in nonlinear control theory: A survey. *International Journal of Advanced Robotic Systems*, 2013, 10(3): 233~242
- Huang C H, Wang W J, Chiu C H. Design and implementation of fuzzy control on a two wheel inverted pendulum. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2011, 58(7): 2988~3001
- Verma S N, Singh V. Automatic control systems. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, 1976, 6(11): 797~797
- Kollar L E, Stepan G. Digital controlling of piecewise linear systems. In: Control of Oscillations and Chaos, International Conference. IEEE, 2000: 327~330
- Insperger T, Milton J, Stepan G. Acceleration feedback improves balancing against reflex delay. *Journal of the Royal Society Interface*, 2013, 10(79): 20120723

- 15 Wang Z H, Hu H Y, Xu Q, et al. Effect of delay combinations on stability and Hopf bifurcation of an oscillator with acceleration-derivative feedback. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2017,94:392~399
- 16 Habib G, Rega G, Stepan G. Delayed digital position control of a single-D of system and the nonlinear behavior of the act-and-wait controller. *Journal of Vibration & Control*, 2016,22(2):481~495
- 17 Habib G, Rega G, Stepan G. Nonlinear bifurcation analysis of a single-D of model of robotic arm subject to digital position control. *Journal of Computational & Nonlinear Dynamics*, 2013,8(8):011009
- 18 王在华,胡海岩. 具有采样反馈的力控制系统稳定性. 力学学报, 2016,48(6):1372~1381 (Wang Z H, Hu H Y. Stability of force control system with sampling feedback. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2016,48(6):1372~1381 (in Chinese))
- 19 Insperger T, Stepan G, Turi J. Delayed feedback of sampled higher derivatives. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 2010,368(1911):469~48

## STABILITY OF AN INVERTED PENDULUM WITH A SAMPLED-DATA PD FEEDBACK CONTROL \*

Wang Qiang<sup>1</sup> Liang Song<sup>2</sup> Wang Zaihua<sup>1,2†</sup>

(1.Army Engineering University of PLA, Nanjing 211101, China) (2.State Key Laboratory of Mechanics and Control of Mechanical Structures, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China)

**Abstract** Sampled-data control is a major technology in contemporary control engineering, with a number of advantages such as easy modification of the control law, high reliability, good real-time performance and strong robustness against disturbance, and so on. This paper studies a controlled inverted pendulum with a sampled-data PD feedback, which is described by a differential equation with a time-variant delay, where the delay is piecewise linear with respect to time. The motion equation of the closed-loop is firstly converted into a difference equation, the effect of the delay value and the sampling period on the stable region in the gain plan is discussed, and then a method is given for calculating the optimal feedback gains that minimize the maximal module of the characteristic roots of the difference equation within the stable region. Finally, the influence of the delay and the sampling period on the convergent speed of the difference equation is analyzed. The numerical results show that both the delay and the sampling period have significant influence on the stability and convergent speed of the controlled inverted pendulum.

**Key words** inverted pendulum, sampled-data control, time delay, stable region, optimal feedback gain