

孔式喷嘴油束碎裂的线性稳定性理论研究

曹建明[†] 侯婕

(长安大学 汽车学院, 西安 710064)

摘要 圆射流碎裂过程的理论研究对于发动机喷雾与燃烧科学研究至关重要,线性稳定性理论是对射流碎裂过程研究的一种重要方法.论述了粘性圆射流在不可压缩气体介质中的线性稳定性理论分析,应用液、气相的线性化纳维-斯托克斯量纲一控制方程组和量纲一化的线性运动学和动力学边界条件,采用对动量方程点乘哈密顿算子的方法,推导出了 n 阶量纲一色散准则关系式.

关键词 线性稳定性理论, 圆射流, n 阶色散关系式, 修正贝塞尔方程

DOI: 10.6052/1672-6553-2017-086

引言

喷嘴喷射出的实心液柱称为液体圆射流,如孔式喷嘴的喷雾,它是车辆、航空航天等运载工具以及锅炉燃烧室中喷雾的主要形式之一.圆射流碎裂过程的理论研究是发动机喷雾研究的重要环节,是国际流体与燃烧学界的热点研究课题^[1].目前,国际上对圆射流碎裂过程的理论研究多采用线性稳定性理论.线性稳定性理论是以气、液体质量、动量守恒为基础,代入边界条件,考虑到气液体速度、密度、气体可压缩性及液体的表面张力和粘性影响,从而得到色散关系式.该理论的核心和关键点就在于色散关系式的推导.色散关系式的推导要求研究者具有扎实的流体力学和数学知识,对各种边界条件的正确确定和数学推导的严密性要求很高,有时甚至需要反复研讨才会有所进展.当圆射流以连续液体的形式从喷嘴喷出时,受外界气体的扰动作用,在其表面会形成一定模式的表面波.从喷雾液束的形态来看,有截面呈圆形的单股状圆射流,也有像由二股、三股、甚至多股细绳扭转在一起而形成的一股粗绳状.阶数 $n=0$ 的表面波对应于单股状对称波形的圆射流,阶数 $n=1$ 的表面波对应单股状非对称波形的圆射流,阶数 $n=2,3,4,\dots$ 时的表面波对应二股状、三股状和四股状的圆射流,其中二股状和四股状圆射流为对称表面波形,三股状圆射流为非对称波形.早期,Reitz 等人推导出了粘性

圆射流喷射进入不可压缩气流中零阶色散关系式^[2],此关系式被大型发动机工作过程数值计算程序 KIVA 中的圆射流碎裂模型所采用,该程序被国内外许多名牌大学和研究机构广泛使用,是目前国内各高校和研究机构培养发动机工作过程方向博士研究生的重要研究工具之一.1999 年, Li 推导出了粘性圆射流喷射进入不可压缩气流中零阶色散关系式及 n 阶色散关系式^[3],据作者所知,此后国际上再也没有这方面的进一步研究发表.经作者推导比较,由于 Reitz 和 Li 所采用的线性运动学边界条件不同,Reitz 的运动学边界条件简化得更多,使得二式略有差别.如果 Reitz 采用了 Li 的运动学边界条件或者 Li 采用了 Reitz 的运动学边界条件,则以上两个色散关系式完全相同.2010 年,作者推导出了粘性圆射流喷射进入不可压缩气流中零阶量纲一色散准则关系式^[4].

$$\frac{I_0(k)}{kEu_l I_1(k)} \left\{ \left[(\omega+ik)^2 + \frac{2k^2}{Re_l} (\omega+ik) \left(1 + \frac{I_1'(k)}{I_0(k)} \right) \right] - \frac{4k^3}{Re_l^2} \left[\frac{I_1'(s)I_1(k)}{I_1(s)I_0(k)} s - \frac{I_1'(k)}{I_0(k)} k \right] \right\} + P \frac{\gamma Ma_g^2 K_0(k)}{kK_1(k)} (\omega/U+ik)^2 = \frac{1}{We_l Eu_l} (1-k^2) \quad (1)$$

其中: k 为表面波数; Eu_l 为液体欧拉数; I_0, I_1 分别为第一类 0 阶、1 阶修正贝塞尔函数; ω 为圆频率,其实部 ω_r 为表面波增长率; Re_l 为液体雷诺数; $s^2 =$

$k^2 + \text{Re}_l(\omega + ik)$; P 为气液压力比; γ 为绝热指数; Ma_g 为气体马赫数; K_0 、 K_1 分别为第二类 0 阶、1 阶修正贝塞尔函数; U 为气液流速比; We_l 为液相韦伯数。

由于 Reitz 和 Li 的推导均采用了有量纲形式的控制方程和边界条件,其色散关系式也是有量纲形式的,经过推导,如果将 Li 等人的零阶色散关系式量纲一化,则与作者的零阶量纲一色散准则关系式是一致的。

n 阶色散关系式比零阶色散关系式适用的范围更广,我们可以对阶数 n 选取不同的数值来研究圆射流的多种形态的表面波,可以说 n 阶色散关系式将圆射流的线性稳定性分析推导到了极致。但是由于 Li 对 n 阶色散关系式的推导采用了有量纲形式的控制方程和边界条件,因此其色散关系式也是有量纲形式的。这样一来,在根据他的色散关系式编制数值计算程序而得到的分析结果中,仅能够分析维伯数 We 、气液流速比、液体粘性和气体马赫数 Ma 等因素对圆射流碎裂过程的影响。根据相似理论,量纲一的准则关系式要比有量纲形式的关系式包含更多的信息量,适用范围更广,具有更大的优越性。本文从质量守恒和动量守恒的最原始方程式入手,首先推导出了液、气相的线性化纳维斯托克斯量纲一控制方程组,再将线性运动学和动力学边界条件量纲一化,进而推导出了 n 阶量纲一形式色散准则关系式,能够分析多种形态表面波的维伯数 We 、雷诺数 Re 、欧拉数 Eu 、气体马赫数 Ma 、气液流速比、气液压力比等诸多因素对圆射流碎裂过程的影响。

1 模型的建立

图 1 所示为圆射流表面波的示意图,图中参数已经量纲一化。考虑一个三维圆柱射流,初始半径为 1,密度为 ρ_l ,以压力 P_l ,速度 U_l ,喷射进入密度为 ρ_g ,压力为 P_g ,速度为 U_g 的气体介质中。

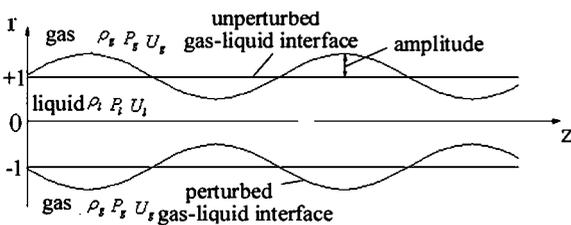


图 1 圆射流表面波

Fig.1 Surface wave of circular liquid jet

液流被看作是牛顿流体,并且质量力忽略不计,这是由于对于实际的喷雾应用来说 Froude 数是非常大的。液流经扰动后,合流参数值为:

$$\mathbf{u}_{i,tot} = \mathbf{U}_i + \mathbf{u}_i, \quad p_{i,tot} = P_i + p_i$$

其中: $\mathbf{u}_i = (u_r, u_\theta, u_z)_i$, $p_i = p_i(r, \theta, z)$ 分别指扰动速度和扰动压力,基流速度和基流压力为 $\mathbf{U}_i = (U_r, U_\theta, U_z)_i = (0, 0, 1)_i = const$, $P_i = P_i(0, 0, 1) = const$ 。下标 $i=l$ 代表液相, $i=g$ 代表气相。在动量守恒控制方程中,可将扰动速度项线性化。下标 r, θ, z 代表柱坐标 (r, θ, z) 。

线性化的量纲一纳维-斯托克斯控制方程组,其形式如下:

液相、气相连续性方程:

$$\nabla \cdot \mathbf{u}_i = 0 \quad (2)$$

液相动量方程:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \right) \mathbf{u}_l = -Eu_l \nabla p_l + \frac{1}{\text{Re}_l} \nabla^2 \mathbf{u}_l \quad (3)$$

气相动量方程:

$$\left(\frac{1}{U} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \right) \mathbf{u}_g = -\frac{1}{\gamma Ma_g^2} \nabla p_g \quad (4)$$

方程中的量纲一参数为液体欧拉数 Eu_l ,液体雷诺数 Re_l ,气体马赫数 Ma_g ,气液流速比 U 和绝热指数 γ 。

量纲一纳维-斯托克斯控制方程组(2)~(4)的解必须满足流动运动学边界条件和流动动力学边界条件。在线性稳定性理论中,我们采用气液界面处,即 $r=1$ 时的线性化的边界条件。液相和气相的量纲一运动学边界条件方程分别表示为:

$$u_{lr} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \right) \xi \quad (5)$$

和

$$u_{gr} = \left(\frac{1}{U} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \right) \xi \quad (6)$$

其中: ξ 表示气液交界面处的扰动振幅,其量纲一形式表示为 $\xi = \xi_0 \exp(\omega t + ikz + in\theta)$, ξ_0 表示气液交界面处的初始扰动振幅; ω 为表面波圆频率,其实部为表面波增长率; t 为时间; k 为表面波数; n 为阶数; θ 表示圆射流的气液交界面波形两侧的相位差; $i = \sqrt{-1}$ 。

液相和气相的量纲一附加边界条件和动力学边界条件方程为:

$$\frac{\partial u_{i,r}}{\partial z} + \frac{\partial u_{i,z}}{\partial r} = 0 \tag{7}$$

$$\frac{\partial u_{i\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_{i,r}}{\partial \theta} - \frac{1}{r} u_{i\theta} = 0 \tag{8}$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial u_{i,z}}{\partial \theta} + \frac{\partial u_{i,\theta}}{\partial z} = 0 \tag{9}$$

$$p_l - 2 \frac{1}{\text{Re}_l E u_l} \frac{\partial u_{i,r}}{\partial r} - P p_g = - \frac{1}{\text{We}_l E u_l} \left(\frac{\xi}{r^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial \theta^2} \right) \tag{10}$$

2 液相推导

为了对控制方程求解,方程(3)点乘哈密顿算子∇并将方程(2)代入得:

$$\nabla^2 p_i = 0 \tag{11}$$

其中:∇²=Δ为拉普拉斯算子,表达式为:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{12}$$

令:

$$p_i = p_i(r) \exp(\omega t + ikz + in\theta) \tag{13}$$

$$u_i = u_i(r) \exp(\omega t + ikz + in\theta) \tag{14}$$

将方程(13)代入方程(11)得:

$$\frac{d^2 p_l(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dp_l(r)}{dr} - \left(k^2 + \frac{n^2}{r^2} \right) p_l(r) = 0 \tag{15}$$

方程(15)为n阶修正贝塞尔方程,其解为:

$$p_l(r) = a_1 I_n(kr) + a_2 K_n(kr) \tag{16}$$

其中: I_n 和 K_n 分别为第一类和第二类n阶修正贝塞尔函数.

将方程(16)代入方程(3),得:

r-方向动量方程:

$$\frac{d^2 u_{l,r}(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du_{l,r}(r)}{dr} - \left(s^2 + \frac{n^2}{r^2} \right) u_{l,r}(r) = \text{Re}_l E u_l k [a_1 I'_n(kr) + a_2 K'_n(kr)] \tag{17}$$

θ-方向动量方程:

$$\frac{d^2 u_{l,\theta}(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du_{l,\theta}(r)}{dr} - \left(s^2 + \frac{n^2}{r^2} \right) u_{l,\theta}(r) = \text{Re}_l E u_l \frac{in}{r} [a_1 I_n(kr) + a_2 K_n(kr)] \tag{18}$$

z-方向动量方程:

$$\frac{d^2 u_{l,z}(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du_{l,z}(r)}{dr} - \left(s^2 + \frac{n^2}{r^2} \right) u_{l,z}(r) = \text{Re}_l E u_l ik [a_1 I_n(kr) + a_2 K_n(kr)] \tag{19}$$

其中:

$$s^2 = k^2 + \text{Re}_l(\omega + ik) \tag{20}$$

方程(17)、(18)、(19)的通解分别为:

$$u_{l,r}(r) = b_1 \frac{n}{sr} I_n(sr) + b_4 \frac{n}{sr} K_n(sr) + b_2 I_{n-1}(sr) + b_5 K_{n-1}(sr) + b_3 I'_n(kr) + b_6 K'_n(kr) \tag{21}$$

$$u_{l,\theta}(r) = d_1 I_{n-1}(sr) + d_4 K_{n-1}(sr) + d_2 I'_n(sr) + d_5 K'_n(sr) + d_3 \frac{1}{r} I_n(kr) + d_6 \frac{1}{r} K'_n(kr) \tag{22}$$

$$u_{l,z}(r) = c_1 I_n(sr) + c_3 K_n(sr) + c_2 I_n(kr) + c_4 K_n(kr) \tag{23}$$

其中: $b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6; c_1, c_2, c_3, c_4; d_1, d_2, d_3, d_4, d_5, d_6$ 为积分常数,且具有以下关系:

$$b_1 = -b_2, b_3 = -\frac{E u_l k}{\omega + ik} a_1, b_6 = -\frac{E u_l k}{\omega + ik} a_2$$

$$c_2 = -\frac{E u_l ik}{\omega + ik} a_1, c_4 = -\frac{E u_l ik}{\omega + ik} a_2$$

$$d_1 = -d_2, d_3 = -\frac{E u_l in}{\omega + ik} a_1, d_6 = -\frac{E u_l in}{\omega + ik} a_2$$

由于在圆柱中心线上r方向速度分量等于零,根据 I_n, K_n 曲线图(图2所示)可知,作为边界条件,当 $r \rightarrow 0$ 时, $K_n \rightarrow \infty$,因此,有 $a_2 = 0, b_4 = 0, b_5 = 0, b_6 = 0, c_3 = 0, c_4 = 0, d_4 = 0, d_5 = 0, d_6 = 0$.

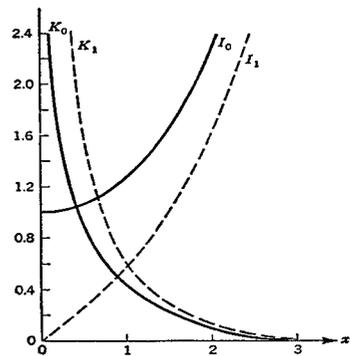


图2 第一类、第二类修正贝塞尔函数 I_n, K_n 曲线图

Fig.2 1st and 2nd order modified Bessel functions I_n and K_n

方程(17)、(18)、(19)的通解变成:

$$u_{l,r}(r) = b_1 \frac{n}{sr} I_n(sr) - b_1 I_{n-1}(sr) - \frac{E u_l k}{\omega + ik} a_1 I'_n(kr) \tag{24}$$

$$u_{l,\theta}(r) = d_1 I_{n-1}(sr) - d_1 I'_n(sr) - \frac{E u_l in}{\omega + ik} a_1 \frac{1}{r} I_n(kr) \tag{25}$$

$$u_{l,z}(r) = c_1 I_n(sr) - \frac{Eu_l ik}{\omega + ik} a_1 I_n(kr) \quad (26)$$

将方程(24)、(25)、(26)代入方程(14),再代入运动学边界条件方程和动力学边界条件方程(5)和(7)、(8)、(9),并将圆射流的量纲一初始半径 $r=1$ 代入,可得到积分常数 a_1, b_1, c_1 和 d_1 的解:

$$a_1 = -\xi_0 \frac{(\omega + ik)(s^2 + k^2)}{kEu_l \operatorname{Re}_l I'_n(k)}$$

$$b_1 = \xi_0 \frac{2k^2}{\operatorname{Re}_l I'_n(s)}$$

$$c_1 = -\xi_0 \frac{2isk}{\operatorname{Re}_l I'_n(s)}$$

$$d_1 = \xi_0 \frac{2is}{k \operatorname{Re}_l I_n(s)} \left[\frac{I_n(s)}{I'_n(s)} sk - \frac{I_n(k)}{I'_n(k)} (s^2 + k^2) \right]$$

将方程(16)和 a_1, b_1, c_1, d_1 代入方程(13),得液相压力为:

$$p_l = -\xi_0 \frac{(\omega + ik)(s^2 + k^2)}{kEu_l \operatorname{Re}_l I'_n(k)} I_n(kr) \exp(wt + ikz + in\theta) \quad (27)$$

3 气相推导

将方程(13)代入方程(11)得:

$$\frac{d^2 p_g(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dp_g(r)}{dr} - (k^2 + \frac{n^2}{r^2}) p_g(r) = 0 \quad (28)$$

$$\frac{I_n(k)}{kEu_l I'_n(k)} \left\{ \left[(\omega + ik)^2 + \frac{2k^2}{\operatorname{Re}_l} (\omega + ik) \left(1 + \frac{I''_n(k)}{I'_n(k)} \right) \right] - \frac{4k^3}{\operatorname{Re}_l^2} \left[\frac{I''_n(s) I'_n(k)}{I'_n(s) I_n(k)} s - \frac{I''_n(k)}{I'_n(k)} k \right] \right\} - P \frac{\gamma Ma_g^2 K_n(k)}{kK'_n(k)} (\omega/U + ik)^2 = \frac{1}{We_l Eu_l} (1 - k^2 - n^2)$$

经过验证,当 $n=0$ 时,方程(32)变成:

$$\frac{I_0(k)}{kEu_l I'_0(k)} \left\{ \left[(\omega + ik)^2 + \frac{2k^2}{\operatorname{Re}_l} (\omega + ik) \left(1 + \frac{I''_0(k)}{I'_0(k)} \right) \right] - \frac{4k^3}{\operatorname{Re}_l^2} \left[\frac{I''_0(s) I'_0(k)}{I'_0(s) I_0(k)} s - \frac{I''_0(k)}{I'_0(k)} k \right] \right\} - P \frac{\gamma Ma_g^2 K_0(k)}{kK'_0(k)} (\omega/U + ik)^2 = \frac{1}{We_l Eu_l} (1 - k^2)$$

由于:

$$I'_0(s) = I_1(s), I'_0(k) = I_1(k), I''_0(s) = I'_1(s), I''_0(k) = I'_1(k)$$

$$K'_0(k) = -K_1(k)$$

方程(33)变成:

$$\frac{I_0(k)}{kEu_l I_1(k)} \left\{ \left[(\omega + ik)^2 + \frac{2k^2}{\operatorname{Re}_l} (\omega + ik) \left(1 + \frac{I'_1(k)}{I_0(k)} \right) \right] - \frac{4k^3}{\operatorname{Re}_l^2} \left[\frac{I'_1(s) I_1(k)}{I_1(s) I_0(k)} s - \frac{I'_1(k)}{I_0(k)} k \right] \right\} + P \frac{\gamma Ma_g^2 K_0(k)}{kK_1(k)} (\omega/U + ik)^2 = \frac{1}{We_l Eu_l} (1 - k^2)$$

方程(28)为 n 阶修正贝塞尔方程,其解为:

$$p_g(r) = e_1 I_n(kr) + e_2 K_n(kr) \quad (29)$$

将方程(29)代入方程(4)得:

r -方向动量方程:

$$-(\omega/U + ik) u_{g,r}(r) = \frac{1}{\gamma Ma_g^2} k [e_1 I'_n(kr) + e_2 K'_n(kr)] \quad (30)$$

由于在 $r \rightarrow \infty$ 方向上气流的速度分量等于零,根据 I_n, K_n 曲线图(图2所示)可知,作为边界条件,当 $r \rightarrow \infty$ 时, $I_n \rightarrow \infty$, 因此, $e_1 = 0$.

根据与液相推导相同的步骤,可以得到气相的积分常数 e_2 的解:

$$e_2 = -\xi_0 \frac{\gamma Ma_g^2}{kK'_n(k)} (\omega/U + ik)^2$$

和气相压力:

$$p_g = -\xi_0 \frac{\gamma Ma_g^2 k_n(kr)}{kK'_n(k)} (\omega/U + ik)^2 \exp(wt + ikz + in\theta) \quad (31)$$

4 量纲一色散准则关系式

将方程(27)和方程(31)代入动力学边界条件方程(10),可得到 n 阶量纲一色散准则方程式:

显然,方程(34)与之前推导的零阶量纲一色散准则方程式(1)是一致的,也可以说是与 Reitz 和 Li 等人的零阶色散关系式是一致的,从而说明了推导出的 n 阶量纲一色散准则方程式(32)的正确性.从方程(32)我们还可以看出, n 阶量纲一色散准则方程只与量纲一参数:维伯数 We 、雷诺数 Re 、欧拉数 Eu 、马赫数 Ma 、气液流速比 U 、气液压力比 P 等有关.

色散关系式隐含了液体表面波增长率 ω_r 与表面波数 k 之间的关系,采用穆勒方法,可以对色散关系式求取数值解,并绘制出表面波增长率 ω_r 随表面波数 k 的变化关系曲线图.图中曲线的最高点为最大表面波增长率点 $\omega_{r,max}$,通常称之为支配表面波增长率 $\omega_{r,dom}$,它所对应的波数称之为支配波数 k_{dom} ,它们表示液体最不稳定的状况,也就是最容易碎裂的状况(但不一定就会碎裂).因此,稳定性分析就是研究液体两侧气液流速比之差 \bar{U}_d 、液流韦伯数 We_l 、欧拉数 Eu_l 、雷诺数 Re_l 、气流马赫数 Ma 等因素对 ω_r-k 曲线图以及 $\omega_{r,dom}$ 、 k_{dom} 的影响.

5 结论

本文从质量守恒和动量守恒的最原始方程式入手,首先推导出了液、气相的线性化纳维斯托克斯量纲一控制方程组,再将线性运动学和动力学边界条件量纲一化,采用对动量方程点乘哈密顿算子

的方法,推导出了粘性圆射流喷射进入不可压缩气流中的 n 阶量纲一色散准则关系式.结论如下:

(1)对于 n 阶量纲一色散准则关系式,将 n 取不同的值,可以得到圆射流不同形态表面波的量纲一色散准则关系式,其适用范围更广,具有更大的优越性.

(2) n 阶量纲一色散准则方程式只与无量纲参数——韦伯准则 We 、欧拉准则 Eu 、雷诺准则 Re 、气体马赫准则 Ma_g 、气液流速比 U 及气液压力比 P 有关.经过编程和数值计算,可以得到这些量纲一参数对圆射流碎裂过程的影响.

参 考 文 献

- 曹建明. 液体喷雾学. 北京:北京大学出版社, 2013 (Cao J M. Liquid sprays. Beijing: Beijing University Press, 2013 (in Chinese))
- Reitz R D, Bracco F V. Mechanism of atomization of a liquid jet. *Physics of Fluids A*, 1982, 25: 1730~1742
- Li X. Mechanism of atomization of a liquid jet. *Journal of Atomization and Sprays*, 1995, 5: 89~105
- 侯婕,曹建明. 圆射流零阶色散关系式的线性稳定性理论推导. 长安大学学报, 2011, 31(4): 94~97 (Hou J, Cao J M. Derivation on linear stability theory of zero order dispersion relation in liquid jets. *Journal of Chang'an University*, 2011, 31(4): 94~97 (in Chinese))

INVESTIGATION ON LINEAR STABILITY THEORY FOR OIL JET DISINTEGRATION OF ORIFICIAL ATOMIZER

Cao Jianming[†] Hou Jie

(School of Automobile, Chang'an University, Xi'an 710064, China)

Abstract The theoretical research of circular liquid jets disintegration is very important for the study on the science of engine atomization and combustion. The linear stability theory is an important method for studying on disintegration process of circular liquid jets. This paper reports a linear stability analysis for a viscous circular liquid jet moving in a incompressible gas medium. Derivation employs the linearized Navier-Stokes dimensionless equations, the dimensionless linearized kinematic and dynamic boundary conditions of liquid and gas phases. Meanwhile, applying the dot product of the gradient operator ∇ with momentum equation method, a n -order dimensionless dispersion relation is obtained.

Key words linear stability theory, circular liquid jet, n -order dispersion relations, modified Bessel equation