第 16 卷第 4 期 2018 年 8 月
1672-6553/2018/16(4)/317-7

动力学与控制学报
JOURNAL OF DYNAMICS AND CONTROL

Vol.16 No.4
Aug. 2018

非线性时滞奇异系统的严格实用稳定性研究 *

王贵元　杨卓琴†

(北京航空航天大学 数学与系统科学学院, 数学,信息与行为科学教育部重点实验室, 北京　100191)

摘要　将严格实用稳定性相关概念推广到具有控制输入的非线性奇异系统,利用两个 Lyapunov 函数方法和比较原理,得出其严格实用稳定及严格实用渐近稳定的判别准则.另外,我们给出了含有时滞的非线性奇异系统关于两个测度严格实用稳定的定义,并得出该类系统严格实用稳定及严格实用渐近稳定的充分条件.

关键词　非线性奇异系统,　严格实用稳定性,　Lyapunov 函数,　比较原理,　时滞

DOI:　10.6052/1672-6553-2017-067

引言

20 世纪 70 年代,英国学者 H.H.Rosenbrock 提出奇异系统的概念,它是比正常状态系统应用范围更广泛的一类系统,此类系统已在飞行器模型、电路系统等领域有广泛的应用[1,2].到目前为止,关于线性奇异系统已经取得了很多研究成果,其中大多数是研究实用稳定性. 实用稳定性理论是现代运动稳定性理论的研究方向之一,所研究的系统,数学意义上可能是不稳定的,但是在实际问题中是可以接受的[3].因此,从实际的角度可以认为这些系统是稳定的,正因为如此,实用稳定性引起了很多学者的关注,并取得了许多研究成果.文献[4]研究了初始时刻不同的非线性微分方程的实用稳定性,文献[5]讨论了脉冲系统的实用稳定性,利用比较原理得出该类系统实用稳定的充分条件.文献[6]研究了含有时滞的脉冲微分方程的最终实用稳定性,得到了此类方程最终实用稳定的判别准则.

严格实用稳定性是一类可以给出解的衰减速度信息的稳定性[7,8].它与实用稳定性的关系是,某个系统的解是严格实用稳定的,那么它也是实用稳定的,不同点是实用稳定性仅对上界进行了估计,没有对解的下界进行估计,仅仅是单边估计.基于此,Lakshmikantham[7] 等提出了严格稳定性的概念,得出微分方程严格实用稳定的若干判据. 随后,Lakshmikantham 和 Zhang[8] 提出了泛函微分系统严格实用稳定的定义,给出泛函微分系统严格实用稳定的充分条件. Zhang 和 Sun[9,10] 研究了脉冲系统及脉冲泛函微分系统严格实用稳定等问题.Li[11] 等研究了非线性脉冲系统的严格实用稳定性.Liu 和 Yang[12] 利用 Lyapunov 函数法和 Razumikhin 技巧,得到了脉冲泛函微分方程严格实用稳定的判据.

然而,关于非线性奇异系统稳定性的研究成果较少,本文将严格实用稳定性的概念推广到非线性奇异系统,通过利用两个 Lyapunov 函数法和比较原理,得出具有控制输入的非线性奇异系统严格(一致)实用稳定及严格(一致)实用渐近稳定的判定定理. 时滞系统普遍存在于自然和工程实际中,是不可忽略的因素,在一些机械设计过程中,如果忽略时滞,就会降低控制效果,甚至会导致失败[13,14].已有结果表明,时滞会使系统产生复杂的动力学行为[13].因此,我们考虑了含有时滞的非线性奇异系统,给出其关于两个测度严格实用稳定的定义,利用上述两种方法,得到了这一类系统严格(一致)实用稳定和严格(一致)实用渐近稳定的判别准则.

1　预备知识

首先考虑时滞为零的非线性奇异系统[2]:

$$\boldsymbol{E}\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{u},\boldsymbol{x}),\ \boldsymbol{E}\boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{E}\boldsymbol{x}_0 \tag{1}$$

其中, $\boldsymbol{E}\in R^{n\times n}$, $rank\boldsymbol{E}=r\leqslant n$, $\boldsymbol{x}\in R^n$ 是状态向量, $\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{u},\boldsymbol{x})\in C(R_+\times R^m\times R^n,R^n)$ 对所有参数都连续可微,$\boldsymbol{u}(t)\in R^m$ 是控制输入[2].

2017-03-21 收到第 1 稿,2017-06-08 收到修改稿.
* 国家自然科学基金(11472009)
† 通讯作者 E-mail:yangzhuoqin@buaa.edu.cn

定义 1.1[2] 控制项 $\boldsymbol{u}(t)\in R^m$ 被称为可容许的,如果对任何的初始条件 $\boldsymbol{Ex}_0$,系统(1)有唯一的无脉冲的解. 所有的容许输入的集合定义为 Ω.

假设 1[2] 对于任何的初始条件 $\boldsymbol{Ex}_0$ 和控制 $\boldsymbol{u}(t)$,系统(1)有唯一的解;

假设 2[2] 集合 Ω 是非空集合;

假设 3[2] 零解是系统(1)的平衡点.

令 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{a}(t,\boldsymbol{x})\in\Omega$ 满足 $\boldsymbol{a}(t,\boldsymbol{0})\equiv\boldsymbol{0}$,系统(1)变为:

$$\boldsymbol{E\dot{x}}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{a}(t,\boldsymbol{x}(t)),t),\boldsymbol{Ex}(t_0)=\boldsymbol{Ex}_0 \quad (2)$$

为方便应用,给出下面这些符号的定义:

$R_+=[0,+\infty)$

$R_\tau^+=\{t\in R \mid t\geqslant -\tau,\tau\in R_+\}$

$K=\{\alpha\in C(R_+,R_+)\mid \alpha(t)$严格单增且$\alpha(0)=0\}$

$L=\{\sigma\in C(R_+,R_+)\mid \sigma(t)$严格递减且$\lim\limits_{t\to+\infty}\sigma(t)=0\}$

$\Gamma=\{h\in C(R_+\times R^n,R_+)\mid \inf h(t,x)=0\}$

$\Gamma_\tau=\{h\in C(R_\tau^+\times R^n,R_+)\mid \inf h(t,x)=0,\forall t\in R_\tau^+\}$

$D^+V(t,y(t))=\limsup\limits_{h\to0^+}h^{-1}(V(t+h,y+h\dot{y})-V(t,y))$

$D_-V(t,y(t))=\liminf\limits_{h\to0^-}h^{-1}(V(t+h,y+h\dot{y})-V(t,y))$

$LK=\{\alpha\in C(R_+^2,R_+)\mid a(u,v)\in L,\forall v,$

且 $a(u,v)\in K,\forall u\}$

首先给出非线性奇异系统严格实用稳定的相关定义.

定义 1.2 称系统(2)的解 $\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{x}(t;t_0,\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{u}^*)$是:

(1)严格实用稳定的,如果对于给定的(λ_1,A_1):$0<\lambda_1\leqslant A_1$ 与某个 $t_0\in R_+$,可由 $\|\boldsymbol{Ex}_0\|<\lambda_1$,得出 $\|\boldsymbol{Ex}(t)\|<A_1$,并且对任意的 $\lambda_2<\lambda_1$,存在 $A_2\leqslant\lambda_2$,可由 $\|\boldsymbol{Ex}_0\|>\lambda_2$,得出 $\|\boldsymbol{Ex}(t)\|>A_2$ 对所有的 $t\geqslant t_0$ 成立;

(2)一致严格实用稳定的,如果对所有的 $t_0\in R_+$满足定义(1)的条件;

(3)严格吸引的,如果对任意给定的 $\delta_1>0,\varepsilon_1>0$ 与某个 $t_0\in R_+$,对每个 $\delta_2<\delta_1$,存在 $\varepsilon_2<\varepsilon_1$,$T_1=T_1(t_0,\varepsilon_1)$与 $T_2=T_2(t_0,\varepsilon_2)$,使得当 $\lambda_2<\|\boldsymbol{Ex}(t_0)\|<\lambda_1$ 时,有 $\varepsilon_2<\|\boldsymbol{Ex}(t)\|<\varepsilon_1$,对所有的 $t_0+T_1\leqslant t\leqslant t_0+T_2$ 成立;

(4)严格一致吸引的,如果满足条件(3)且 T_1,T_2 不依赖于 t_0;

(5)严格实用渐近稳定的,如果(1),(3)成立,且 $\delta_1=\lambda$;

(6)严格一致实用渐近稳定的,如果(2),(4)成立,且 $\delta_1=\lambda$.

下面给出比较系统及相关定义.

考虑下列微分系统[2]:

$$\dot{\omega}_1=g_1(t,\omega_1,x),\omega_1(t_0)=\omega_{10}\geqslant0 \quad (3a)$$

$$\dot{\omega}_2=g_2(t,\omega_2,x),\omega_2(t_0)=\omega_{20}\geqslant0 \quad (3b)$$

其中,$g_1,g_2\in C(R_+\times R_+\times R^n,R)$.

定义 1.3[8] 称比较系统(3)为:

(1)严格实用稳定的,如果对给定的(λ_1,A_1):$0<\lambda_1<A_1$ 与某个 $t_0\in R_+$,可由 $\omega_{10}<\lambda_1$,得出 $\omega_1(t)<A_1$,同时,对任意的 $\lambda_2<\lambda_1$,存在 $A_2<\lambda_2$,使得当 $\omega_{20}>\lambda_2$ 时,有 $\omega_2(t)>A_2$ 对所有的 $t\geqslant t_0$ 成立;

(2)严格一致实用稳定的,如果(1)对所有的 $t_0\in R_+$都成立;

(3)严格吸引的,如果对给定的 $\delta_1>0,\varepsilon_1>0$,与某个 $t_0\in R_+$,对每个 $\delta_2<\delta_1$,存在 $\varepsilon_2<\varepsilon_1$,$T_1=T_1(t_0,\varepsilon_1)$与 $T_2=T_2(t_0,\varepsilon_2)$,使得当 $\omega_{10}<\delta$ 时,有 $\omega_1(t)<\varepsilon_1$,且当 $\omega_{20}>\delta_2$ 时,有 $\omega_2(t)>\varepsilon_2$,对所有的 $t_0+T_1\leqslant t\leqslant t_0+T_2$ 成立;

(4)严格一致吸引的,如果 T_1,T_2 不依赖于 t_0;

(5)严格实用渐近稳定的,如果(1),(3)成立,且 $\delta_1=\lambda_1$;

(6)严格一致实用渐近稳定的,如果(2),(4)成立,且 $\delta_1=\lambda_1$.

注:(1)和(3)或者(2)和(4)不同时成立.

关于含有时滞的非线性奇异系统的相关定义.

考虑下面的奇异系统[2]:

$$\boldsymbol{E\dot{x}}=\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{x}_t(\theta)) \quad (4)$$

其中,$\boldsymbol{E}\in R^{n\times n}$, $rank\boldsymbol{E}=r\leqslant n$,

$\boldsymbol{x}_t(\theta)=\boldsymbol{x}(t+\theta),\theta\in[-\tau,0],\tau>0,\boldsymbol{x}\in R^n$

$\boldsymbol{f}\in C(R_+\times R^n\times\xi,R^n)$, $\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{0},\boldsymbol{0})\equiv\boldsymbol{0}$, $t\geqslant t_0\geqslant0$

系统(4)的初始条件为 $x_{t_0}=\varphi,\varphi\in\xi$.

令 $S_k(t_0)$表示过初始时刻 t_0 的所有初始函数的集合[2],$\forall\varphi\in S_k(t_0)$,过点$(t_0,\varphi)$至少存在一个连续解[2],其中 $t\in[t_0-\tau,+\infty)$.

定义 1.4[2] 令 $h_0\in\Gamma_\tau,\varphi\in\xi$,对于任意的 $t\in R_+$,定义:

$$\tilde{h}_0(t,\varphi)=\sup_{-\tau\leqslant\theta\leqslant0}h_0(t+\theta,\varphi(\theta))$$

定义 1.5[2] 令 $h_0\in\Gamma_\tau,h\in\Gamma,\varphi\in S_k(t_0)$,称系统(4)的解是:

(1) $(\tilde{h}_0,h)$实用稳定的,如果对给定的(λ,A):$0<\lambda<A$ 及某个 $t_0\in R_+$,当 $\tilde{h}_0(t_0,\varphi)<\lambda$ 时,有 $h(t,\boldsymbol{x})<A$,对所有的 $t\geqslant t_0$ 成立;

(2) $(\tilde{h}_0,h)$一致实用稳定的,如果(1)对于任意的 $t_0\in R_+$都成立;

(3) $(\tilde{h}_0,h)$严格实用稳定的,如果(1)成立,且对每个 $\mu\leqslant\lambda$, $\exists B<\mu$,使得当 $\tilde{h}_0(t_0,\varphi)>\mu$ 时,可得出 $h(\boldsymbol{x}(t))>B$,对所有的 $t\geqslant t_0$ 成立;

(4) $(\tilde{h}_0,h)$严格一致实用稳定的,如果(3)对于任意的 $t_0\in R_+$都成立;

(5) $(\tilde{h}_0,h)$吸引的,如果对给定的 $\delta>0,\varepsilon>0$,与某个 $t_0\in R_+$,对于每个 $\delta>0$, $\exists T=T(t_0,\varepsilon)$使得当 $\tilde{h}_0(t_0,\varphi)<\delta$ 时,有 $h(t,\boldsymbol{x})<\varepsilon$,对所有的 $t\geqslant t_0+T$ 成立;

(6) 一致吸引的,如果(5)对于任意的 $t_0\in R_+$都成立;

(7) $(\tilde{h}_0,h)$严格吸引的,如果对给定的 $\delta_1>0$, $\varepsilon_1>0$ 与某个 $t_0\in R_+$,对每个 $\delta_2<\delta_1$,存在 $\varepsilon_2<\varepsilon_1$, $T_1=T_1(t_0,\varepsilon_1)$与 $T_2=T_2(t_0,\varepsilon_2)$,使得当 $\lambda_2<\|\tilde{h}_0(t_0,\varphi)\|<\lambda_1$ 时,有 $\varepsilon_2<\|h(\boldsymbol{x}(t))\|<\varepsilon_1$,对所有的 $t_0+T_1\leqslant t\leqslant t_0+T_2$ 成立;

(8) $(\tilde{h}_0,h)$严格一致吸引的,如果(7)对于 $\forall t_0\in R_+$都成立;

(9) $(\tilde{h}_0,h)$一致实用渐近稳定的,如果同时满足(2)和(6),且 $\delta=\lambda$;

(10) $(\tilde{h}_0,h)$严格一致实用渐近稳定的,如果同时满足(4)和(8),且 $\delta_1=\lambda$.

假设 4[2]　对任意的 $\rho>0$, $S_k(t_0)\cap S(\tilde{h}_0,\rho)\neq 0$,

其中, $S(\tilde{h}_0,\rho)=\{(t,\varphi)\in R_+\times\xi\,|\,\tilde{h}_0(t,\varphi)<\rho\}$.

引理 1.1[2]

令 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{Ex}$, $V(t,\boldsymbol{y})\in C(R_+\times R^n,R_+)$关于 $\boldsymbol{y}$ 满足局部 Lipschitz 条件, $V(t,\boldsymbol{y}(t))$沿着系统(1)的 Dini 导数定义为:

$$D^+V(t,\boldsymbol{y}(t))=\limsup_{h\to 0^+}h^{-1}(V(t+h,\boldsymbol{y}+h\dot{\boldsymbol{y}})-V(t,\boldsymbol{y}))$$

注:本文均假设 $V(t,\boldsymbol{y}(t))$关于 $\boldsymbol{y}$ 满足局部 Lipschitz 条件.

下面给出两个比较原理.

引理 1.2[2,8]　假设下列条件成立:

(1)存在 $V\in C(R_+\times R^n,R_+)$, $V(t,\boldsymbol{y})$关于 $\boldsymbol{y}$ 满足局部李氏条件,其中 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{Ex}$;

(2)存在 $g_1\in C(R_+\times R_+\times R^n,R)$使得 $D^+V\leqslant g_1(t,V(t,\boldsymbol{Ex}),\boldsymbol{x})$, $\forall(t,\boldsymbol{x})\in R_+\times R^n$,其中 $\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{x}(t;t_0,\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{u}^*)$是系统(1)的任何一个解;

(3) $r(t;t_0,\omega_0,\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{u}^*)$是比较系统:

$$\dot{\omega}_1=g_1(t,\omega_1,\boldsymbol{x}),\omega_1(t_0)=\omega_{10}\geqslant 0 \tag{5}$$

的最大解.则当 $V(t_0,\boldsymbol{Ex}_0)\leqslant\omega_{10}$时,有:

$$V(t,\boldsymbol{Ex})\leqslant r(t;t_0,\omega_0,\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{u}^*),\ \forall t\geqslant t_0.$$

另一方面,若 $D\_V\geqslant g_2(t,V(t,\boldsymbol{Ex}),\boldsymbol{x})$, $\rho(t;t_0,\omega_0,\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{u}^*)$是比较系统:

$$\dot{\omega}_2=g_2(t,\omega_2,\boldsymbol{x}),\omega_2(t_0)=\omega_{20}\geqslant 0$$

的最小解.则当 $V(t_0,\boldsymbol{Ex}_0)\geqslant\omega_{20}$时,有:

$$V(t,\boldsymbol{Ex})\geqslant\rho(t;t_0,\omega_0,\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{u}^*),\ \forall t\geqslant t_0.$$

引理 1.3[8]　假设:

(1) $u\in C(R_+,R_+)$且 $D^+u\leqslant g(t,u)$;

(2) $g\in C(R_+^2,R)$,对每个 $t\in R_+$, $g(t,u)$关于 u 单调不减;

(3) $r(t)$是比较系统.

$$\dot{v}=g(t,v),v(t_0)=v_0\geqslant 0,t_0\geqslant 0,t\in R_+ (A)$$

的最大解,则当 $u(t_0)\leqslant v(t_0)=v_0$ 时 $u(t)\leqslant v(t)$, $t\geqslant t_0$.

相反,当 $D\_u\geqslant g(t,u)$, $t\geqslant t_0$, $\rho(t)$是(A)式的最小解,则当 $u(t_0)\geqslant v_0$,有 $u(t)\geqslant\rho(t)$, $t\geqslant t_0$.

2　主要结果

定理 2.1　假设:

(1)对给定的(λ_1,A_1): $0<\lambda_1<A_1$,存在 $V_1(t,Ex)$满足:

$$\beta_1(\|\boldsymbol{Ex}\|)\leqslant V_1(t,\boldsymbol{Ex})\leqslant\alpha_1(\|\boldsymbol{Ex}\|)$$

其中 $\alpha_1,\beta_1\in K$ 并且存在 $\boldsymbol{u}^*=\boldsymbol{a}(t,\boldsymbol{x})\in\Omega$,使得:

$$D^+V_1\leqslant g_1(t,V_1(t,\boldsymbol{Ex}),\boldsymbol{x});$$

(2)存在 $V_2(t,\boldsymbol{Ex})$满足:

$$\beta_2(\|\boldsymbol{Ex}\|)\leqslant V_2(t,\boldsymbol{Ex})\leqslant\alpha_2(\|\boldsymbol{Ex}\|)$$

其中 $\alpha_2,\beta_2\in K$ 且:

$$D\_V_2\geqslant g_2(t,V_2(t,\boldsymbol{Ex}),\boldsymbol{x})$$

这里 $g_1,g_2\in C(R_+\times R_+\times R^n,R)$.

则比较系统(3)的解严格实用稳定蕴含系统(2)的解严格实用稳定.

证明　系统(3)是严格实用稳定的,即存在(λ_1,A_1): $0<\lambda_1<A_1$,使得 $\alpha_1(\lambda_1)<\beta_1(A_1)$且当 $\omega_{10}<\alpha_1(\lambda_1)$时,有 $\omega_1(t)<\beta_1(A_1)$,同时,对任意的 $\lambda_2<\lambda_1$, $\exists A_2<\lambda_2$,使得当 $\omega_{20}>\beta_2(\lambda_2)$时, $\omega_2(t)>\alpha_2(A_2)$,对所有的 $t\geqslant t_0$ 成立.

只须证,当:

$$\|\boldsymbol{Ex}_0\|<\lambda_1 \text{ 时}, \|\boldsymbol{Ex}(t)\|<A_1 \tag{6}$$

假设不成立,即存在 t_1,t_2,使得: $\|\boldsymbol{Ex}(t_1)\|=\lambda_1$,

$\|\boldsymbol{Ex}(t_2)\|=A_1, \lambda_1\leqslant\|\boldsymbol{Ex}(t)\|\leqslant A_1, t\in[t_1,t_2]$.
由条件(1)可得：

$$\begin{aligned}\beta_1(A_1)&=\beta_1(\|\boldsymbol{Ex}(t_2)\|)\leqslant V_1(t_2,\boldsymbol{Ex}(t_2))\\&\leqslant r(t_2,t_1,\omega(t_1),\boldsymbol{x}(t_1),\boldsymbol{u}^*)\\&<\beta_1(A_1)\end{aligned}$$

矛盾，所以(6)式成立；

另一方面，只须证明：

$$\|\boldsymbol{Ex}_0\|>\lambda_2 \text{ 时}, \|\boldsymbol{Ex}(t)\|>A_2 \tag{7}$$

反证法，假设结论不成立，即当满足 $\|\boldsymbol{Ex}_0\|>\lambda_2$ 时，存在 t_1 使得：

$$\|\boldsymbol{Ex}(t_1)\|=A_2, A_2\leqslant\|\boldsymbol{Ex}(t)\|\leqslant A_1, t\in[t_0,t_1].$$

利用条件(2)和引理1.2得：

$$\begin{aligned}\alpha_2(A_2)&=\alpha_2(\|\boldsymbol{Ex}(t_1)\|)\geqslant V_2(t_1,\boldsymbol{Ex}(t_1))\\&\geqslant\rho(t_1,t_0,\omega(t_0),\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{u}^*)>\alpha(A_2)\end{aligned}$$

矛盾，所以(7)式成立.故系统(2)的解是严格实用稳定的.

类似地，可以得出如下定理.

定理2.2 如果定理2.1中的条件(1)，(2)都成立，且比较系统(3)严格一致实用渐近稳定，则系统(2)的解是严格一致实用渐近稳定的.

定理2.3 假设：

(1)对给定的(λ_1,A_1)：$0<\lambda_1<A_1<\rho$，存在：

$\alpha_1\in LK, \beta_1\in K, V_1(t,\boldsymbol{Ex}), \forall(t,\boldsymbol{Ex})\in R_+\times S(\rho)$ 使得：

$$\alpha_1(t_0,\lambda_1)<\beta_1(A_1)$$

$$\beta_1(\|\boldsymbol{Ex}\|)\leqslant V_1(t,\boldsymbol{Ex})\leqslant\alpha_1(t_0,\|\boldsymbol{Ex}\|)$$

并且存在 $\boldsymbol{u}^*=\boldsymbol{a}(t,\boldsymbol{x})\in\Omega$ 使得 $D^+V_1\leqslant0, t\in R_+$；

(2)存在 $V_2(t,\boldsymbol{Ex}), \alpha_2\in LK, \beta_2\in K$，使得：

$$\beta_2(\|\boldsymbol{Ex}\|)\leqslant V_2(t,\boldsymbol{Ex})\leqslant\alpha_2(t_0,\|\boldsymbol{Ex}\|)$$

且满足：

$$D_-V_2\geqslant0, \alpha_2(t_0,A_2)<\beta_2(\lambda_2)$$

则称系统(2)的解是严格实用稳定的.

证明 对给定的(λ_1,A_1)：$0<\lambda_1\leqslant A_1<\rho$，使得当：

$$\|\boldsymbol{Ex}_0\|<\lambda_1 \text{ 时}, \|\boldsymbol{Ex}(t)\|<A_1 \text{ 成立}. \tag{8}$$

若结论不成立，即 $\exists t_1,t_2$，使得当：

$$\|\boldsymbol{Ex}(t_1)\|=\lambda_1, \|\boldsymbol{Ex}(t_2)\|=A_1$$

$$\lambda_1\leqslant\|\boldsymbol{Ex}(t)\|\leqslant A_1, t_1\leqslant t\leqslant t_2$$

时，由条件(1)得：

$$\begin{aligned}\beta_1(A_1)&=\beta_1(\|\boldsymbol{Ex}(t_2)\|)\leqslant V_1(t_2,\boldsymbol{Ex}(t_2))\\&\leqslant V_1(t_1,\boldsymbol{Ex}(t_1))\leqslant\alpha_1(t_1,\boldsymbol{Ex}(t_1))\\&\leqslant\alpha_1(t_0,\lambda_1)\end{aligned}$$

又因为：

$$\alpha_1(t_0,\lambda_1)<\beta_1(A_1)$$

矛盾，(8)式成立；

另一方面，只须证明对任何 $\lambda_2<\lambda_1$，存在 $A_2<\lambda_2$，使得当 $0<A_2<\lambda_2<\lambda_1$ 时，有：

$$\lambda_2<\|\boldsymbol{Ex}_0\|<\lambda_1\Rightarrow A_2<\|\boldsymbol{Ex}(t)\|<A_1, t\geqslant t_0 \tag{9}$$

若结论不成立，即存在 t_1,t_2 使得：

$$\|\boldsymbol{Ex}(t_2)\|=\lambda_2, \|\boldsymbol{Ex}(t_1)\|=A_2,$$

$$A_2\leqslant\|\boldsymbol{Ex}(t)\|\leqslant\lambda_2, t_0<t_2<t_1$$

由条件(2)可得：

$$\begin{aligned}\alpha_2(t_0,A_2)&\geqslant\alpha_2(t_1,A_2)=\alpha_2(t_1,\|\boldsymbol{Ex}(t_1)\|)\\&\geqslant V_2(t_1,\boldsymbol{Ex}(t_1))\geqslant V_2(t_2,\boldsymbol{Ex}(t_2))\\&>\beta_2(\lambda_2)\end{aligned}$$

因为：

$$\alpha_2(t_0,A_2)<\beta_2(\lambda_2)$$

矛盾，因此(9)式成立.因此系统(2)的解是严格实用稳定的.

推论2.1 如果定理2.3中的 $\alpha_1(t_0,\|\boldsymbol{Ex}\|)$，$\alpha_2(t_0,\|\boldsymbol{Ex}\|)$ 分别用 $\alpha_1(\|\boldsymbol{Ex}\|)$ 和 $\alpha_2(\|\boldsymbol{Ex}\|)$ 来代替，其它条件不变，则系统(2)的解是严格一致实用稳定的.

推论2.1证明的过程类似定理2.3，详细证明过程从略.

定理2.4 假设：

(1)对给定的(λ,A)：$0<\lambda<A<\rho$；

(2)$h_0\in\Gamma_\tau, h\in\Gamma$ 且存在 $\psi\in LK$ 使得：

$$h(t,\boldsymbol{x})\leqslant\psi(t,\tilde{h}_0(t,\boldsymbol{x})), \forall(t,\boldsymbol{x})\in R_+\times S(\tilde{h}_0,\lambda)$$

其中，$S(\tilde{h}_0,\lambda)=\{(t,\boldsymbol{x})\in R_+\times R^n\,|\,\tilde{h}_0(t,\boldsymbol{x})<\lambda\}$；

(3)如果存在：

$$V_1: R_+\times S(h,\rho)\to R_+, \alpha_1\in LK, \beta_1\in K$$

使得当 $(t,\boldsymbol{x})\in R_+\times S(h,\rho)$ 时，有：

$$\beta_1(h(t,\boldsymbol{x}))\leqslant V_1(t,\boldsymbol{x})\leqslant\alpha_1(t,\tilde{h}_0(t,\boldsymbol{x}))$$

$$D^+V_1(t,\boldsymbol{x})\leqslant0$$

(4)如果存在：

$$V_2: R_+\times S(h,\rho)\to R_+, \alpha_2\in LK, \beta_2\in K$$

使得当 $(t,\boldsymbol{x})\in R_+\times S(h,\rho)$ 时，有：

$$\beta_2(h(t,\boldsymbol{x}))\leqslant V_2(t,\boldsymbol{x})\leqslant\alpha_2(t,\tilde{h}_0(t,\boldsymbol{x}))$$

$$D_-V_2(t,\boldsymbol{x})\geqslant0$$

(5)$\psi(t_0,\lambda)<A, \alpha_1(t_0,\lambda)<\beta_1(A)$.

则系统(4)的解是$(\tilde{h}_0,h)$严格实用稳定的.

证明 $\forall\varphi\in S_k(t_0)\cap S(\tilde{h}_0,\lambda)$，由条件(2)，

(5)可得：

$$h(t_0,\varphi)\leqslant\psi(t_0,\tilde{h}_0(t_0,\varphi))\leqslant\psi(t_0,\lambda)<A.$$

下证，当 $\tilde{h}_0(t_0,\varphi)<\lambda$ 时，$h(t,\boldsymbol{x})<A,\ \forall t\geqslant t_0$.

设 $x(t,t_0,\varphi)$ 是系统(4)的解，由条件(3)可得：

$$\begin{aligned}\beta_1(h(t,\boldsymbol{x}))&\leqslant V_1(t,\boldsymbol{x})\leqslant V_1(t_0,\varphi)\\&\leqslant\alpha_1(t_0,\tilde{h}_0(t_0,\varphi))\\&\leqslant\alpha_1(t_0,\lambda)<\beta_1(A)\end{aligned}\tag{10}$$

所以，$h(t,\boldsymbol{x})<A,t\geqslant t_0$.

另一方面，对于 $\forall\eta:0<\eta\leqslant\lambda$，存在 $B<\eta$，使得 $\alpha_2(t_0,B)<\beta_2(\eta)$，可由 $\tilde{h}_0(t_0,\varphi)>\eta$ 推出 $h(t_0,\varphi)>B$. 反证法，若结论不成立，则 $h(t_0,\varphi)\leqslant B$，由条件(4)可得：

$$\begin{aligned}\alpha_2(t_0,B)<\beta_2(\eta)&\leqslant\beta_2(\tilde{h}_0(t_0,\varphi))\leqslant V_2(t_0,\varphi)\\&\leqslant\alpha_2(t_0,h(t_0,\varphi))\leqslant\alpha_2(t_0,B)\end{aligned}$$

矛盾，所以 $h(t_0,\varphi)>B$.

下证，当 $\tilde{h}_0(t_0,\varphi)>\eta$ 时，有 $h(t,\boldsymbol{x})>B,t\geqslant t_0$. 如若不然，则存在系统(4)的一个解 $\boldsymbol{x}(t,t_0,\varphi)$，有 $\tilde{h}_0(t_0,\varphi)>\eta$，且存在 $t_1(t_1>t_0)$ 使得 $h(t,\boldsymbol{x})\leqslant B$，由条件(4)可知 $V_2(t,\boldsymbol{x})$ 单调递增，故 $V_2(t_0,\varphi)\leqslant V_2(t,\boldsymbol{x}),t\geqslant t_0$，由此可得：

$$\begin{aligned}\beta_2(\eta)&\leqslant\beta_2(\tilde{h}_0(t_0,\varphi))\leqslant V_2(t_0,\varphi)\\&\leqslant V_2(t_1,\boldsymbol{x}(t_1))\leqslant\alpha_2(t_1,h(\boldsymbol{x}(t_1)))\\&\leqslant\alpha_2(t_1,B)\leqslant\alpha_2(t_0,B)<\beta_2(\eta)\end{aligned}\tag{11}$$

矛盾，系统(4)的解是 $(\tilde{h}_0,h)$ 严格实用稳定的.

下面给出定理 2.4 的特殊情况.

推论 2.2　如果定理 2.4 中的 $\psi\in LK,\alpha_1,\alpha_2\in LK$ 替换为 $\psi\in K,\alpha_1,\alpha_2\in K$ 则系统(4)的解是 $(\tilde{h}_0,h)$ 严格一致实用稳定的.

下面引入比较系统，通过借助比较系统，研究非线性奇异时滞系统的严格实用稳定性[7].

$$\dot{u}_1=g_1(t,u_1),u_1(t_0)=u_{10}\geqslant0\tag{12a}$$

$$\dot{u}_2=g_2(t,u_2),u_2(t_0)=u_{20}\geqslant0\tag{12b}$$

其中，$g_1,g_2\in C(R_+^2,R)$.

比较系统(12)严格实用稳定性的定义与比较系统(3)类似，详见文献[8]，此处省略.

定理 2.5　假设：

(1)对给定的 $(\lambda,A):0<\lambda<A<\rho$；

(2) $h_0\in\Gamma_\tau,h\in\Gamma$ 且存在 $\psi\in LK$ 使得：

$$h(t,\boldsymbol{x})\leqslant\psi(t,\tilde{h}_0(t,\boldsymbol{x})),\ \forall(t,\boldsymbol{x})\in R_+\times S(\tilde{h}_0,\lambda)$$

其中，$S(\tilde{h}_0,\lambda)=\{(t,\boldsymbol{x})\in R_+\times R^n\mid\tilde{h}_0(t,\boldsymbol{x})<\lambda\}$；

(3)如果存在：

$$V_1:R_+\times S(h,\rho)\to R_+,\alpha_1\in LK,\beta_1\in K$$

对任意的 $(t,\boldsymbol{x})\in R_+\times S(h,\rho)$ 时，有：

$$\beta_1(h(t,\boldsymbol{x}))\leqslant V_1(t,\boldsymbol{x})\leqslant\alpha_1(t,\tilde{h}_0(t,\boldsymbol{x}))$$

和

$$D^+V_1(t,\boldsymbol{x})\leqslant g_1(t,V_1(t,\boldsymbol{x}))$$

(4)如果存在：

$$V_2:R_+\times S(h,\rho)\to R_+,\alpha_2\in LK,\beta_2\in K$$

对任意的 $(t,\boldsymbol{x})\in R_+\times S(h,\rho)$ 时，有：

$$\beta_2(h(t,\boldsymbol{x}))\leqslant V_2(t,\boldsymbol{x})\leqslant\alpha_2(t,\tilde{h}_0(t,\boldsymbol{x}))$$

和

$$D_-V_2(t,\boldsymbol{x})\geqslant g_2(t,V_2(t,\boldsymbol{x}))$$

(5) $\psi(t_0,\lambda)<A,\alpha_1(t_0,\lambda)<\beta_1(A)$.

则系统(12)的解关于 $(\alpha_1(\lambda),\beta_1(A))$ 的严格实用稳定性蕴含系统(4)的解是 $(\tilde{h}_0,h)$ 严格实用稳定的.

证明　比较系统(12)严格实用稳定，则对于给定的 (λ,A)，$0<\lambda<A$，当 $u_{10}<\alpha_1(\lambda)$ 时，有 $u_1(t,t_0)<\beta_1(A),\ \forall t\geqslant t_0$，$(\alpha_1(\lambda)<\beta_1(A))$，同时，对任何 $\eta<\lambda$，$\exists B>0$ 使得 $u_{20}>\eta$ 时，有 $u_2(t)>B$，对所有的 $t\geqslant t_0$ 成立.

首先证当 $\tilde{h}_0(t_0,\varphi)<\lambda$ 时，$h(t,\boldsymbol{x})<A,t\geqslant t_0$. $\forall\varphi\in S_k(t_0)\cap S(\tilde{h}_0,\lambda)$. 由条件(2)得：

$$h(t_0,\varphi)\leqslant\psi(t_0,\tilde{h}_0(t_0,\varphi))\leqslant\psi(t_0,\lambda)<A$$

下证，当 $\tilde{h}_0(t_0,\varphi)<\lambda$ 时，可推出 $h(t,\boldsymbol{x})<A,t\geqslant t_0$.

取 $u_{10}=V_1(t_0,\varphi)\leqslant\alpha_1(\tilde{h}_0(t_0,\varphi))<\alpha_1(\lambda)$，

$r(t,t_0,u_1(t_0))<\beta_1(A),\ \forall t\geqslant t_0$，

其中 $r(t,t_0,u_1(t_0))$ 是比较系统(12a)的最大解，由条件(3)及引理 1.3 可得：

$$V_1(t,\boldsymbol{x}(t))\leqslant r(t,t_0,u_{10}),\ \forall t\geqslant t_0$$

$$\beta_1(h(t,\boldsymbol{x}))\leqslant V_1(t,\boldsymbol{x})\leqslant r(t,t_0,u_{10})<\beta_1(A)\tag{13}$$

所以当 $\tilde{h}_0(t_0,\varphi)<\lambda$ 时，可推出 $h(t,\boldsymbol{x})<A,t\geqslant t_0$.

另一方面，对于任何 $\eta<\lambda$ 存在 $B<\eta$，使得当 $u_{20}>\beta_2(\eta)$ 时，$u_2(t,t_0)>\alpha_2(B)$，只须证明，

$$\tilde{h}_0(t_0,\varphi)>\eta\ 时，h(t,\boldsymbol{x})>B,t\geqslant t_0\tag{14}$$

反证法，假设不成立，则当 $\tilde{h}_0(t_0,\varphi)>\eta$ 时，存在 t_1 使得：

$$h(t_1,\boldsymbol{x}(t_1))=B,h(t,\boldsymbol{x}(t))>B(t_0\leqslant t<t_1)$$

利用条件(4)和引理 1.3 得：

$$\begin{aligned}\alpha_2(B)=\alpha_2(h(t_1,\boldsymbol{x}(t_1)))&\geqslant V_2(t_1,\boldsymbol{x}(t_1))\\&\geqslant\rho(t_1,t_0,u_2(t_0))>\alpha_2(B)\end{aligned}$$

矛盾，所以(14)式成立. 可知系统(4)的解是 $(\tilde{h}_0,$

h)严格实用稳定的.

推论 2.3 如果定理 2.6 中的 $\psi\in LK,\alpha_1,\alpha_2\in LK$ 替换为 $\psi\in K,\alpha_1,\alpha_2\in K$,其它条件不变,则系统(12)的解的严格一致实用稳定性蕴含系统(4)的解是$(\tilde{h}_0,h)$严格一致实用稳定的.

定理 2.6 假设:

(1) 对给定的(λ,A):$0<\lambda<A<\rho$;

(2) $h_0\in\Gamma_\tau,h\in\Gamma$ 且存在 $\psi\in LK$ 使得:

$$h(t,\boldsymbol{x})\leqslant\psi(t,\tilde{h}_0(t,\boldsymbol{x})),\forall(t,\boldsymbol{x})\in R_+\times S(\tilde{h}_0,\lambda)$$

其中,$S(\tilde{h}_0,\lambda)=\{(t,\boldsymbol{x})\in R_+\times R^n\mid\tilde{h}_0(t,\boldsymbol{x})<\lambda\}$;

(3) 如果存在 $V_1(t,\boldsymbol{x}),\alpha_1\in LK,\beta_1\in K$,对任意的$(t,\boldsymbol{x})\in R_+\times S(h,\rho)$有:

$$\beta_1(h(t,\boldsymbol{x}))\leqslant V_1(t,\boldsymbol{x})\leqslant\alpha_1(t,\tilde{h}_0(t,\boldsymbol{x}))$$

和

$$D^+V_1(t,\boldsymbol{x})\leqslant g_1(t,V_1(t,\boldsymbol{x}));$$

(4) 如果存在 $V_2(t,\boldsymbol{x}),\alpha_2\in LK,\beta_2\in K$,对任意的$(t,\boldsymbol{x})\in R_+\times S(h,\rho)$有:

$$\beta_2(h(t,\boldsymbol{x}))\leqslant V_2(t,\boldsymbol{x})\leqslant\alpha_2(t,\tilde{h}_0(t,\boldsymbol{x}))$$

和

$$D_-V_2(t,\boldsymbol{x})\geqslant g_2(t,V_2(t,\boldsymbol{x}));$$

(5) $\psi(t_0,\lambda)<A,\alpha_1(t_0,\lambda)<\beta_1(A)$.

则系统(12)的解关于$(\alpha_1(\lambda_1),\beta_1(\varepsilon_1))$的严格实用渐近稳定性蕴含系统(4)的解是$(\tilde{h}_0,h)$严格实用渐近稳定的.

证明 系统(12)是严格实用渐近稳定的,也是严格实用稳定的,由定理 2.5 的证明可以得出系统(4)是$(\tilde{h}_0,h)$严格实用稳定的,所以,只须证明系统(4)是$(\tilde{h}_0,h)$严格吸引的.

系统(12)是严格实用渐近稳定的,也是严格吸引的,即给定$\beta_1(\varepsilon_1)>0$,对任意的:

$\alpha_1(\lambda_2)<\alpha_1(\lambda_1)$, $\exists T_1(t_0,\varepsilon_1),T_2(t_0,\varepsilon_2)$, $\beta_1(\varepsilon_2),\beta_1(\varepsilon_2)<\alpha_1(\lambda_2)$使得当$\beta_2(\lambda_2)<u_{10}=u_{20}<\alpha_1(\lambda_1)$时,有:

$$\begin{aligned}u_1(t,t_0,u_{10})&\leqslant u_1(t,t_0,\alpha_1(\lambda_1))\\&<\beta_1(\varepsilon_1),t\in[t_0+T_1,t_0+T_2]\\u_2(t,t_0,u_{20})&\geqslant u_2(t,t_0,\beta_2(\lambda_2))\\&>\alpha_2(\varepsilon_2),t\in[t_0+T_1,t_0+T_2]\end{aligned}$$

即证:

$\lambda_2<\tilde{h}_0(t_0,\varphi)<\lambda_1$ 时,有:

$\varepsilon_2<h(t,\boldsymbol{x})<\varepsilon_1,t\in[t_0+T_1,t_0+T_2]$.

首先证当 $\tilde{h}_0(t_0,\varphi)<\lambda_1$ 时,

$$h(t_0,\varphi)<\varepsilon_1,t\in[t_0+T_1,t_0+T_2]$$

$$\forall\varphi\in S_k(t_0)\cap S(\tilde{h}_0,\lambda),$$

由条件(2)得:

$$h(t_0,\varphi)\leqslant\psi(t_0,\tilde{h}_0(t_0,\varphi))\leqslant\psi(t_0,\lambda)<\varepsilon_1$$

下证,$\tilde{h}_0(t_0,\varphi)<\lambda_1$ 时,可推出 $h(t,\boldsymbol{x})<\varepsilon_1,\forall t\geqslant t_0$.

取 $u_{10}=V_1(t_0,\varphi)\leqslant\alpha_1(\tilde{h}_0(t_0,\varphi))<\alpha_1(\lambda_1)$, $r(t,t_0,u_1(t_0))<\beta_1(\varepsilon_1),\forall t\geqslant t_0$,
其中$r(t,t_0,u_1(t_0))$是比较系统(12a)的最大解,由条件(3)及引理 1.3 可得:

$$V_1(t,\boldsymbol{x}(t))\leqslant r(t,t_0,u_{10}),\forall t\geqslant t_0.$$

$$\beta_1(h(t,\boldsymbol{x}))\leqslant V_1(t,\boldsymbol{x})\leqslant r(t,t_0,u_{10})<\beta_1(\varepsilon_1)$$

所以当 $\tilde{h}_0(t_0,\varphi)<\lambda_1$ 时,可推出 $h(t,\boldsymbol{x})<\varepsilon_1,t\geqslant t_0$.

另一方面,对于任何 $\lambda_2<\lambda_1$,存在 $\varepsilon_2<\lambda_2$,使得当 $u_{20}>\beta_2(\lambda_2)$时,$u_2(t,t_0)>\alpha_2(\varepsilon_2)$, 只须证明:

$$\tilde{h}_0(t_0,\varphi)>\lambda_2\text{ 时},h(t,\boldsymbol{x})>\varepsilon_2,t\geqslant t_0\tag{15}$$

反证法,假设不成立,则当 $\tilde{h}_0(t_0,\varphi)>\lambda_2$ 时,存在 t_1 使得:

$$h(t_1,\boldsymbol{x}(t_1))=\varepsilon_2,h(t,\boldsymbol{x}(t))>\varepsilon_2(t_0\leqslant t<t_1).$$

利用条件(4)和比较原理得:

$$\begin{aligned}\alpha_2(\varepsilon_2)=\alpha_2(h(t_1,\boldsymbol{x}(t_1)))&\geqslant V_2(t_1,\boldsymbol{x}(t_1))\\&\geqslant\rho(t_1,t_0,u_2(t_0))>\alpha_2(\varepsilon_2)\end{aligned}$$

矛盾,所以(15)式成立.因此系统(12) 关于$(\alpha_1(\lambda_1),\beta_1(\varepsilon_1))$的严格实用渐近稳定性蕴含系统(4)的解是$(\tilde{h}_0,h)$严格实用渐近稳定的.

推论 2.4 若 $\psi\in LK,\alpha_1,\alpha_2\in LK$ 替换为 $\psi\in K,\alpha_1,\alpha_2\in K$,定理 2.6 中的其它条件不变,则比较系统(12) 的解关于$(\alpha_1(\lambda_1),\beta_1(\varepsilon_1))$的严格一致实用渐近稳定性蕴含着系统(4)的解是$(\tilde{h}_0,h)$严格一致实用渐近稳定的.

3 小结

本文我们将严格实用稳定性概念推广到具有控制输入的非线性奇异系统,利用 Lyapunov 函数法和比较原理,得出此类系统严格(一致)实用稳定及严格(一致)实用渐近的判别定理;对于含有时滞的非线性奇异系统,给出其关于两个测度严格实用稳定的相关概念,利用上述两种方法,分别得到了该类系统$(\tilde{h}_0,h)$严格(一致)实用稳定和$(\tilde{h}_0,h)$严格(一致)实用渐近稳定的判别定理.

参考文献

1 Rosenbrock H H. Structural properties of linear dynamical

systems. *International Journal of Control*, 1974,20(2):191~202

2 Yang C, Zhang Q, Zhou L. Stability analysis and design for nonlinear singular systems. Berlin Heidelberg: Springer, 2013

3 阿·阿·玛尔德纽克,孙振绮. 实用稳定性及应用. 北京:科学出版社, 2004 (Martynyuk A A, Sun Z Q. Practical stability and application. Beijing: Science Press, 2004 (in Chinese))

4 Song X, Li S, Li A. Practical stability of nonlinear differential equation with initial time difference. *Applied Mathematics & Computation*, 2008,203(1):157~162

5 Zhang Y, Sun J. Practical stability of impulsive functional differential equations in terms of two measurements. *Computers & Mathematics with Applications*, 2004, 48 (10-11):1549~1556

6 Zhang Y, Sun J. Eventual practical stability of impulsive differential equations with time delay in terms of two measurements. *Journal of Computational & Applied Mathematics*, 2005,176(1):223~229

7 Lakshmikantham V, Mohapatra R N. Strict stability of differential equations. *Nonlinear Analysis Theory Methods & Applications*, 2001,46(7):915~921

8 Lakshmikantham V, Zhang Y. Strict practical stability of delay differential equation. *Applied Mathematics & Computation*, 2001,122(3):275~285

9 Zhang Y, Sun J T. Strict stability of impulsive differential equations. *Acta Mathematica Sinica, English Series*, 2006, 22(3):813~818

10 Zhang Y, Sun J T. Strict stability of impulsive functional differential equations. *Mathematical Analysis and Applications*, 2005,301(1):237~248

11 Li S, Song X, Li A. Strict practical stability of nonlinear impulsive systems by employing two Lyapunov-like functions. *Nonlinear Analysis Real World Applications*, 2008,9(9):2262~2269

12 Liu K, Yang G. Strict Stability criteria for impulsive functional differential systems. *Journal of Inequalities and Applications*, 2008,2008(1):1~8

13 徐鉴,裴利军. 时滞系统动力学近期研究进展与展望. 力学进展, 2006,36(1):17~30 (Xu J, Pei L J. Advances in dynamics for delayed systems. *Advances in Mechanics*, 2006,36(1):17~30 (in Chinese))

14 甄亭亭,徐鉴,温建明. 受控旋转弹飞行动力学建模和稳定性分析. 动力学与控制学报, 2016,14(1):31~40 (Zhen T T, Xu J, Wen J M. Modeling and stability analysis of spinning missile with control system. *Journal of Dynamics and Control*, 2016,14(1):31~40 (in Chinese))

STRICT PRACTICAL STABILITY OF NONLINEAR SINGULAR SYSTEMS WITH TIME DELAY *

Wang Guiyuan　Yang Zhuoqin†

(*School of Mathematics and Systems Science and LMIB*, *Beihang University*, *Beijing*　100191, *China*)

Abstract　In this paper, we give the definitions of strict practical stability in nonlinear singular systems with control input. The discriminate criterion of strict practical stability and strict practical asymptotic stability are derived by two Lyapunov functions and a comparison principle. Furthermore, we define strict practical stability for the nonlinear singular systems with time delay in terms of two measurements and give sufficient conditions of the strict practical stability.

Key words　nonlinear singular systems,　strict practical stability,　Lyapunov function,　comparison principle,　time delay

Received 21 March 2017, revised 8 June 2017.

* The project supported by the National Natural Science Foundation of China(11472009).

† Corresponding author E-mail: yangzhuoqin@buaa.edu.cn