第 16 卷第 4 期 2018 年 8 月
1672-6553/2018/16(4)/289-6
动 力 学 与 控 制 学 报
JOURNAL OF DYNAMICS AND CONTROL
Vol.16 No.4
Aug. 2018

杆网系统基于高斯原理的动力学建模*

刘延柱†
(上海交通大学 工程力学系, 上海 200240)

摘要 讨论由任意数量弹性细杆组成任意拓扑结构的杆网系统.叙述其基于高斯最小拘束原理的动力学建模方法.其工程背景为航天技术中的可展网架式结构.采用 Kirchhoff 模型描述弹性杆的运动,其大变形的幅度可不加限制.导出杆网系统拘束函数的普遍形式及联结铰对杆件的几何约束条件.所述动力学模型可直接应用变分方法确定杆网系统的运动,无需建立和求解动力学微分方程.利用拘束函数的最小值条件从杆件的各种可能运动中确定其真实运动.联结铰的约束条件可在供选择的可能运动中预先给予满足.对于杆件充分柔软的特殊情形,忽略其抗弯和抗扭刚度,但考虑其拉伸变形,则杆网系统转化为由柔索组成的索网系统.以 5 杆系统为例说明此建模过程.

关键词 空间杆网系统, 高斯最小拘束原理, Kirchhoff 弹性杆模型

DOI: 10.6052/1672-6553-2017-072

引言

利用可展网架式空间结构的大型航天器已成为航天技术中的前沿课题[1].由多个弹性细杆组成的杆网系统是带有多个回路的非树多体系统.其动力学模型可利用多柔体系统动力学的各种方法建立,其中利用高斯最小拘束原理的建模方法具有独特优点[2-5].国内的动力学教材对高斯原理建模方法有较详细叙述[6,7].高斯原理的特点在于,无需建立和求解动力学微分方程,而是通过寻求函数极值方法确定系统的运动规律.即在任意时刻,对系统的位形和速度相同但加速度不同的各种可能运动进行比较,以拘束函数取极小值作为真实运动的判断依据.高斯原理建模方法的形式统一,能适应多体系统的拓扑结构或约束条件的改变.对于带控制的多体系统,动力学分析与系统的优化可结合进行.高斯原理在上世纪 70 年代已被用于机器人的动力学分析[8,9].近期也用于多柔体系统[10,11]及弹性细杆的建模[12-15].本文讨论空间中任意数量弹性细杆组成任意拓扑结构的网架系统,叙述其基于高斯原理的动力学建模方法.利用结构图表示杆网的联结状况.采用 Kirchhoff 的弹性杆模型,将杆件的变形转化为刚性截面沿中心线的姿态变化,其大变形的幅度不受限制.以沿杆中心线的弧坐标为自变量,表示截面姿态的参数为未知变量,列写每个杆件的拘束函数.如忽略细长杆件的扭矩和扭率的相应项,则杆件的拘束函数由杆中心线的形状完全确定.将各杆件的拘束函数叠加为系统的总拘束函数.根据高斯原理,以拘束函数的最小值条件从各种可能运动中确定系统的真实运动.在网架结构的结点处,联结铰对杆件的约束条件可在给定各杆件的可能运动时预先给予满足.如杆件充分柔软,允许忽略其抗弯和抗扭刚度但考虑拉伸变形,则转化为由柔索组成的索网系统.文中以 5 杆系统为例说明具体的建模过程.

1 杆网系统的结构和运动学分析

讨论由 n 个弹性细杆 $R_i(i=1,2,\cdots,n)$ 和 m 个球铰 $O_j(j=1,2,\cdots,m)$ 为结点组成的空间杆网系统.使用图论工具,以结点 O_j 为点,杆 R_i 为弧,建立杆网系统的结构图.设 B_0 为基体,以卫星的主体或与主体固结的参考坐标系所体现.结点和杆的标号从距离 B_0 最近处开始向远处增大,以确定弧的指向.与基体 B_0 联结的结点记作 O_1.设以任意节点 O_j

2017-05-04 收到第 1 稿,2017-05-24 收到修改稿.
* 国家自然科学基金(11372195)
† 通讯作者 E-mail:liuyzhc@163.com

为起点的杆有 n_j 个,其杆号记作 $i=\alpha_k^{(j)}(k=1,2,\cdots,n_j)$.以 O_j 为终点的杆号有 n'_j 个,其杆号为 $i=\beta_k^{(j)}{}'(k'=1,2,\cdots,n'_j)$.$\alpha_k^{(j)}$ 和 $\beta_k^{(j)}{}'$ 为 j 的整标函数.以图 1 所示五杆系统为例,$n=5$,$m=4$,对应的 $\alpha_k^{(j)}$ 和 $\beta_k^{(j)}{}'$ 在表 1 中标出.

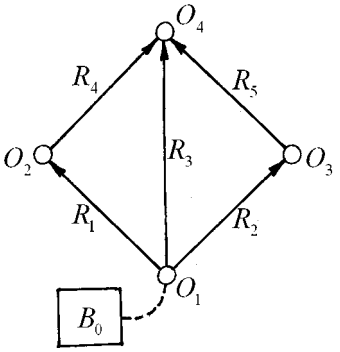

图 1 五杆系统的结构图

Fig.1 Structure graph of 5-rods system

表 1 5 杆系统节点 O_j 联结的杆号

Table 1 Number of rods connected by joint O_j

j	1	2	3	4
$\alpha_1^{(j)}$	1	4	5	/
$\alpha_2^{(j)}$	2	/	/	/
$\alpha_3^{(j)}$	3	/	/	/
$\beta_1^{(j)}$	/	1	2	3
$\beta_2^{(j)}$	/	/	/	4
$\beta_3^{(j)}$	/	/	/	5

设系统内各杆 $R_i(i=1,2,\cdots,n)$ 均为圆截面弹性杆,长度为 l_i,满足截面无剪切变形、中心线无拉伸变形、无原始曲率等 Kirchhoff 条件.以 R_i 杆的端点 P_{0i} 为原点,沿 R_i 杆中心线建立弧坐标 s_i.以确定中心线上任意点 P_i 的位置.终点 P_{0i}^* 的弧坐标为 $s_i=l_i$.以航天器的质心 O_0 为原点建立轨道坐标系 $(O_0-\xi\eta\zeta)$ 作为基体 B_0.其中 ξ 轴沿轨道切线,η 轴沿轨道平面法线,ζ 轴从地心 O_e 指向 O_0,各坐标轴的基矢量为 $\boldsymbol{e}_\xi,\boldsymbol{e}_\eta,\boldsymbol{e}_\zeta$(图 2).$P_i,P_{0i},P_{0i}^*$ 相对 O_0 的矢径分别为 $\boldsymbol{r}_i,\boldsymbol{r}_{0i},\boldsymbol{r}_{0i}^*$.

为简化表达,省略上述符号中用下标表示的杆件标号 i,将 $(O_0-\xi\eta\zeta)$ 的原点移至 P 点,设 $(P-\xi\eta\zeta)$ 绕 ξ 轴转过 ψ 角为 $(P-x_0y_0z_0)$,绕 y_0 轴转过 ϑ 角为截面的主轴坐标系 $(P-xyz)$,z 轴为截面的法线轴.忽略截面的剪切变形,设 $(P-xyz)$ 绕 z 轴转过 φ 角后与截面固定,记作 $(P-x_sy_sz_s)$.ψ,ϑ,φ 为确定截面姿态的卡尔丹角(图3)对于圆截面情形,

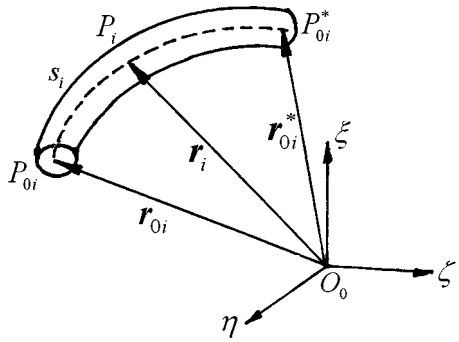

图 2 第 i 杆的位置坐标

Fig.2 Position coordinates of i-th rod

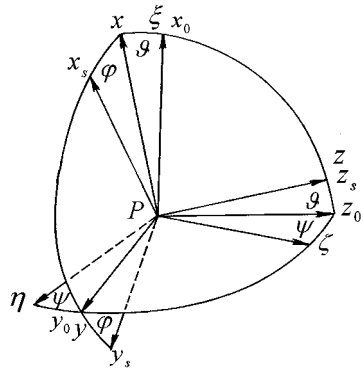

图 3 表示截面姿态的卡尔丹角

Fig.3 Cardan's angles of the attitude of cross section

$(P-xyz)$ 与 $(P-x_sy_sz_s)$ 均为截面的主轴坐标系.截面坐标系 $(P-x_sy_sz_s)$ 的角位移对弧坐标 s 或时间 t 的变化率分别为杆的弯扭度和相对 B_0 的角速度,记作 $\boldsymbol{\omega}_S$ 和 $\boldsymbol{\Omega}_S$.$(P-xyz)$ 的角位移对 s 或 t 的变化率记作 $\boldsymbol{\omega}$ 和 $\boldsymbol{\Omega}$.文中分别以撇号和点号表示对 s 或 t 的偏导数,以下标 $k=1,2,3$ 表示各矢量在 $(P-xyz)$ 中的投影,得到:

$$\begin{aligned}&\omega_1=\omega_{S1}=\psi'\cos\vartheta,\omega_2=\omega_{S2}=\vartheta'\\&\omega_3=\psi'\sin\vartheta,\omega_{S3}=\varphi'\\&\Omega_1=\Omega_{S1}=\dot\psi\cos\vartheta,\Omega_2=\Omega_{S2}=\dot\vartheta\\&\Omega_3=\dot\psi\sin\vartheta,\Omega_{S3}=\dot\varphi\end{aligned}\tag{1}$$

其中 ω_{S1},ω_{S2} 为杆在 P 点处的曲率,ω_{S3} 为扭率.准坐标 φ 定义为:

$$\varphi'=\psi'\sin\vartheta+\varphi',\dot\varphi=\dot\psi\sin\vartheta+\dot\varphi\tag{2}$$

设 $\boldsymbol{r}(s,t)$ 为 P 点相对 O_0 点的矢径,沿 P 点处的中心线取弧长为 Δs 的微元段 PQ,对应的矢径增量为 $\Delta\boldsymbol{r}=\Delta s\boldsymbol{e}_z$.$\boldsymbol{e}_z$ 为 z 轴的基矢量,等于矢径 $\boldsymbol{r}$ 对弧坐标 s 的偏导数:

$$\boldsymbol{r}'=\boldsymbol{e}_z\tag{3}$$

杆中心线几何形状由 P 点在($O_0-\xi\eta\zeta$)中的笛卡尔坐标 $\xi(s,t)$,$\eta(s,t)$,$\zeta(s,t)$ 确定.矢径 $\boldsymbol{r}(s,t)$ 表示为:

$$\boldsymbol{r}(s,t)=\xi(s,t)\boldsymbol{e}_\xi+\eta(s,t)\boldsymbol{e}_\eta+\zeta(s,t)\boldsymbol{e}_\zeta \tag{4}$$

根据式(3),$\boldsymbol{r}'$ 在($O_0-\xi\eta\zeta$)中的投影 ξ',η',ζ' 分别等于基矢量 $\boldsymbol{e}_z$ 相对 ξ,η,ζ 各轴的方向余弦

$$\xi'=\sin\vartheta,\eta'=-\sin\psi\cos\vartheta,\zeta'=\cos\psi\cos\vartheta \tag{5}$$

杆中心线几何形状给定以后,上式可用于确定杆截面的姿态角 $\vartheta(s,t)$ 和 $\psi(s,t)$:

$$\vartheta=\arcsin\xi',\psi=\arctan(-\eta'/\zeta') \tag{6}$$

矢径 $\boldsymbol{r}(s,t)$ 对时间 t 的偏导数即 P 点相对 B_0 的速度 $\boldsymbol{v}=\dot{\boldsymbol{r}}$.其投影式为:

$$\boldsymbol{v}(s,t)=\dot{\xi}(s,t)\boldsymbol{e}_\xi+\dot{\eta}(s,t)\boldsymbol{e}_\eta+\dot{\zeta}(s,t)\boldsymbol{e}_\zeta \tag{7}$$

2　杆网系统的拘束

应用高斯原理讨论弹性杆动力学问题时,以时间 t 为自变量,弧坐标 s_i 为计算 R_i 杆拘束函数的积分变量.省略 R_i 杆的下标 i,设 $\rho,S,\boldsymbol{J}$ 分别为杆的密度、截面积及单位长度的惯量张量.$\boldsymbol{J}$ 在($P-xyz$)中的坐标阵为 $\boldsymbol{J}=\mathrm{diag}(J_1J_1J_3)$,其中 $J_1=\rho I$,$J_3=\rho I_0$,I,I_0 为截面的惯量矩和极惯量矩.设 $\boldsymbol{f}$ 为杆的单位长度分布力,忽略分布力矩,$\boldsymbol{F}$ 和 $\boldsymbol{M}$ 为 P 点处截面作用力的主矢和主矩.在 Kirchhoff 条件限制下,中心线无拉伸变形,主矢 $\boldsymbol{F}$ 被视为独立变量.主矩遵循线性本构关系 $\boldsymbol{M}=\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{\omega}_s$,由杆的弯扭度 $\boldsymbol{\omega}_S$ 确定.刚度 $\boldsymbol{D}$ 在($P-xyz$)中的坐标阵为 $\boldsymbol{D}=\mathrm{diag}(A\ A\ C)$,其中 $A=EI$,$C=GI_0$ 分别为抗弯刚度和抗扭刚度,E,G 为杆的杨氏模量和剪切模量.$\boldsymbol{M}$ 在($P-xyz$)中的投影为:

$$M_1=A\omega_{S1},M_2=A\omega_{S2},M_3=C\omega_{S3} \tag{8}$$

对上述杆中心线上的微元段 PQ 列写其拘束函数 ΔZ[6,7].增加航天器轨道运动产生的惯性力,可将 B_0 视为惯性参考系.杆截面相对 B_0 的角加速度 $\dot{\boldsymbol{\Omega}}_s$ 应叠加 B_0 的角加速度,后者于圆轨道情形等于零,$\dot{\boldsymbol{\Omega}}_s$ 即绝对角加速度.将($P-xyz$)作为矢量微分的参考系,列出:

$$\begin{aligned}\Delta Z=&\frac{1}{2}[\rho Sv^2+\dot{\boldsymbol{\Omega}}_s\cdot(J\cdot\dot{\boldsymbol{\Omega}}_s)]\Delta s+\\&\dot{\boldsymbol{\Omega}}_s\cdot[\boldsymbol{\Omega}\times(\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{\Omega}_s)]\Delta s-\\&v\cdot(\Delta\boldsymbol{F}+\boldsymbol{f}\Delta s)-\dot{\boldsymbol{\Omega}}_s\cdot(\Delta\boldsymbol{M}+\Delta\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F})\end{aligned} \tag{9}$$

其中 $\Delta\boldsymbol{F}$,$\Delta\boldsymbol{M}$ 为微元段 PQ 上作用的内力和力矩增量(图 4).

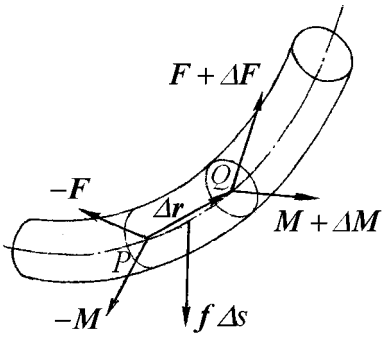

图 4　弹性杆微元段的受力状态

Fig.4　Forces on the infinitesimal segment of rod

$$\begin{aligned}\Delta\boldsymbol{F}&=\boldsymbol{F}'\Delta s=(\widetilde{\boldsymbol{F}}'+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{F})\Delta s\\\Delta\boldsymbol{M}&=\boldsymbol{M}'\Delta s=[\boldsymbol{D}\cdot\widetilde{\boldsymbol{\omega}}'_s+\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{\omega}_s)]\Delta s\end{aligned} \tag{10}$$

波浪号表示相对($P-xyz$)的局部导数.式(9)中 P 点处单位质量的分布力 $\boldsymbol{f}$ 为重力 $\boldsymbol{g}=-g\boldsymbol{e}_\zeta$ 与 O_0 点轨道运动导致的惯性力 $\boldsymbol{g}_0=g_0\boldsymbol{e}_\zeta$ 之和.其中 $g=\mu/r^2$ 和 $g_0=\mu/r_0^2$ 分别为 P 点处的重力加速度和 O_0 点处的向心加速度,μ 为地球引力参数,r_0 为圆轨道半径.因 $r-r_0<<r_0$,仅保留 $\delta=(r_0-r)/r_0$ 的一次项,简化为 $g=g_0(1+2\delta)$,作用在杆上的单位长度微重力为:

$$\boldsymbol{f}=\rho S(\boldsymbol{g}+\boldsymbol{g}_0)=-2\delta\rho Sg_0\boldsymbol{e}_\zeta \tag{11}$$

恢复各符号与 R_i 杆相关的下标 i,将 R_i 杆微元段的拘束写作 $\Delta Z_i=\Gamma_i\Delta s_i$.将式(10),(11)代入式(9),利用式(3)令 $\Delta\boldsymbol{r}_i=\boldsymbol{e}_{iz}\Delta s_i$,导出函数 Γ_i:

$$\begin{aligned}\Gamma_i=&\frac{1}{2}[\rho_iS_i\dot{\boldsymbol{v}}_i^2+\dot{\boldsymbol{\Omega}}_{is}\cdot(\boldsymbol{J}_i\cdot\dot{\boldsymbol{\Omega}}_{is})]+\\&\dot{\boldsymbol{\Omega}}_{is}\cdot[\boldsymbol{\Omega}_i\times(\boldsymbol{J}_i\cdot\boldsymbol{\Omega}_{is})]-\\&\dot{\boldsymbol{v}}_i\cdot(\widetilde{\boldsymbol{F}}'_i+\boldsymbol{\omega}_i\times\boldsymbol{F}_i-2g_0\delta_i\rho_iS_i\boldsymbol{e}_\zeta)-\\&\dot{\boldsymbol{\Omega}}_{is}\cdot[\boldsymbol{D}_i\cdot\boldsymbol{\omega}'_{is}+\boldsymbol{\omega}_i\times(\boldsymbol{D}_i\cdot\boldsymbol{\omega}_{is})+\boldsymbol{e}_{iz}\times\boldsymbol{F}_i]\end{aligned} \tag{12}$$

其中为计算 $\dot{\boldsymbol{v}}_i$,$\boldsymbol{\omega}_i$,$\boldsymbol{\omega}_{is}$,$\boldsymbol{\Omega}_i$,$\boldsymbol{\Omega}_{is}$ 所需的变量 $\vartheta(s,t)$ 和 $\psi(s,t)$ 可根据杆中心线的坐标 $\xi(s,t)$,$\eta(s,t)$,$\zeta(s,t)$ 由式(6),(7)确定.体现杆绕中心线扭转的准坐标 $\varphi(s,t)$ 是与杆中心线形状无关的独立变量.就细长弹性杆而言,因扭矩足够微小,可将式(12)中扭矩与扭率的相关项略去.则 Γ_i 函数仅取决于杆中心线几何形状的变化,由中心线的运动完全确定.将 Γ_i 沿弧坐标 s_i 在 R_i 杆长度范围内积分,得到 R_i 杆的拘束函数 Z_i:

$$Z_i(t)=\int_0^{l_i}\Gamma_i \mathrm{d}s_i \quad (i=1,2,\cdots,n) \tag{13}$$

将所有杆件的拘束求和,得到杆网系统的总拘束:

$$Z(t)=\sum_{i=1}^{n}Z_i(t) \tag{14}$$

此拘束函数是形式上与杆网约束状态无关的独立变量.根据杆件可能运动计算拘束函数寻求最小值时,结点的约束条件可在供选择的可能运动中预先给予满足.

3 索网系统的拘束

如系统中的杆件充分柔软,忽略其抗弯和抗扭刚度即简化为柔索.杆网系统简化为由柔索组成的索网系统.如需考虑柔索的拉伸变形,则 Kirchhoff 杆的中心线无拉伸条件不再成立.在柔索中心线的任意点 P 处,取长度为 Δs 的柔索微元段 PQ(图 5).令式(9)中的惯量张量 $\boldsymbol{J}$ 为零,略去弯矩和扭矩,其拘束函数 ΔZ 简化为:

$$\Delta Z=\frac{1}{2}\rho S\dot{\boldsymbol{v}}^2\Delta s-\dot{\boldsymbol{v}}\cdot(\Delta\boldsymbol{F}+\boldsymbol{f}\Delta s) \tag{15}$$

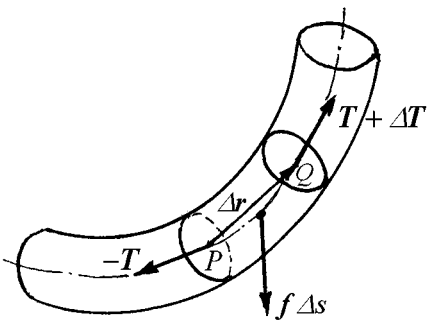

图 5 柔索微元段的受力状态

Fig.5 Forces on the infinitesimal segment of flexible cable

其中速度 $\boldsymbol{v}$ 由式(7)确定.截面作用力的主矢 $\boldsymbol{F}$ 即沿柔索中心线切线的张力 $\boldsymbol{T}$(图 4).基于胡克定律,T 与柔索的拉伸应变 ε 成正比:

$$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{T}=T\boldsymbol{e}_z,\ T=ES\varepsilon \tag{16}$$

变形后的矢径增量为 $\Delta\boldsymbol{r}=(1+\varepsilon)\boldsymbol{e}_z\Delta s$.令 $\Delta s\to 0$,化作:

$$\boldsymbol{r}'=(1+\varepsilon)\boldsymbol{e}_z \tag{17}$$

令上式各项与 $\boldsymbol{e}_z$ 点积,将式(5)代入,导出:

$$\varepsilon=\xi'\sin\vartheta-\eta'\sin\psi\cos\vartheta+\zeta'\cos\psi\cos\vartheta-1 \tag{18}$$

恢复下标 i,将柔索 R_i 的微元段拘束写作 $\Delta Z_i=\Gamma_i\Delta s_i$ 导出:

$$\Gamma_i=\dot{\boldsymbol{v}}_i\cdot S_i\left[\rho_i\left(\frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{v}}_i+2g_0\delta_i\boldsymbol{e}_\zeta\right)-E_i(\tilde{\varepsilon}_i'\boldsymbol{e}_{iz}+\boldsymbol{\omega}_i\times\varepsilon_i\boldsymbol{e}_{iz})\right] \tag{19}$$

4 约束条件

由杆件组成的杆网系统在结点处存在对杆件端部的几何约束.对于球铰联结的简单情形,每个结点 $O_j(j=1,2,\cdots,m)$ 的空间位置应与此结点联结的 $R_{\alpha_k(j)}$ 杆的起点和 $R_{\beta_k(j)}$ 杆的终点符合一致.将结点 O_j 相对 O_0 的矢径记作 $\boldsymbol{r}_{0j}$,以下约束条件适合于结点 O_j 联系的所有杆件:

$$\boldsymbol{r}_{0j}=\boldsymbol{r}_{\alpha_k(j)}(0,t)=\boldsymbol{r}_{\beta_k(j)}(l_{\beta_k(j)},t)$$
$$(j=1,\cdots,m_j;\ k=1,\cdots,n_j;\ k'=1,\cdots,n_j') \tag{20}$$

如为圆柱铰约束,除式(20)以外,约束条件还应作些补充.即结点联结的所有杆在结点处的中心线切线均应与圆柱铰的转轴正交.切线基矢量在 $(O_0-\xi\eta\zeta)$ 中的投影可利用式(3),(4)导出.如为固定端约束,还应再增加中心线切线的夹角保持常值不变的约束条件.

以图 1 表示的杆网系统为例,如所有铰均为球铰,其约束条件为:

O_1: $\boldsymbol{r}_1(0,t)=\boldsymbol{r}_2(0,t)=\boldsymbol{r}_3(0,t)$

O_2: $\boldsymbol{r}_4(0,t)=\boldsymbol{r}_1(l_1,t)$

O_3: $\boldsymbol{r}_5(0,t)=\boldsymbol{r}_2(l_2,t)$

O_4: $\boldsymbol{r}_3(l_3,t)=\boldsymbol{r}_4(l_4,t)=\boldsymbol{r}_5(l_5,t)$

如所有铰均为圆柱铰,须增加以下约束条件:

O_1:

$$\frac{\boldsymbol{r}_1'(0,t)\times\boldsymbol{r}_2'(0,t)}{|\boldsymbol{r}_1'(0,t)\times\boldsymbol{r}_2'(0,t)|}=\frac{\boldsymbol{r}_2'(0,t)\times\boldsymbol{r}_3'(0,t)}{|\boldsymbol{r}_2'(0,t)\times\boldsymbol{r}_3'(0,t)|}=\frac{r_3'(0,t)\times\boldsymbol{r}_1'(0,t)}{|\boldsymbol{r}_3'(0,t)\times\boldsymbol{r}_1'(0,t)|}$$

O_2,O_3:无附加条件.

O_4:

$$\frac{\boldsymbol{r}_3'(l_3,t)\times\boldsymbol{r}_4'(l_4,t)}{|\boldsymbol{r}_3'(l_3,t)\times\boldsymbol{r}_4'(l_4,t)|}=\frac{\boldsymbol{r}_4'(l_4,t)\times\boldsymbol{r}_5'(l_5,t)}{|\boldsymbol{r}_4'(l_4,t)\times\boldsymbol{r}_5'(l_5,t)|}=\frac{\boldsymbol{r}_5'(l_5,t)\times\boldsymbol{r}_3'(l_3,t)}{|\boldsymbol{r}_5'(l_5,t)\times\boldsymbol{r}_3'(l_3,t)|}$$

如所有铰均为固定端,再增加以下约束条件:

O_1:

$$|\boldsymbol{r}_1'(0,t)\times\boldsymbol{r}_2'(0,t)|=\gamma_{12}$$
$$|\boldsymbol{r}_2'(0,t)\times\boldsymbol{r}_3'(0,t)|=\gamma_{23}$$

$$|\boldsymbol{r}_3'(0,t)\times\boldsymbol{r}_1'(0,t)|=\gamma_{31}$$

O_2: $|\boldsymbol{r}_4'(0,t)\times\boldsymbol{r}_1'(l_1,t)|=\gamma_{41}$

O_3: $|\boldsymbol{r}_5'(0,t)\times\boldsymbol{r}_2'(l_2,t)|=\gamma_{52}$

O_4:

$$|\boldsymbol{r}_3'(l_3,t)\times\boldsymbol{r}_4'(l_4,t)|=\gamma_{34}$$

$$|\boldsymbol{r}_4'(l_4,t)\times\boldsymbol{r}_5'(l_5,t)|=\gamma_{45}$$

$$|\boldsymbol{r}_5'(l_5,t)\times\boldsymbol{r}_3'(l_3,t)|=\gamma_{53}$$

其中 $\gamma_{12},\gamma_{23},\gamma_{31}$ 分别为 O_1 铰处 R_1 杆与 R_2 杆、R_2 杆与 R_3 杆、R_3 杆与 R_1 杆之间夹角的正弦,γ_{41} 为 O_2 铰处 R_4 杆与 R_1 杆之间夹角的正弦,γ_{52} 为 O_3 铰处 R_5 杆与 R_2 杆之间夹角的正弦,$\gamma_{34},\gamma_{45},\gamma_{53}$ 分别为 O_4 铰处 R_3 杆与 R_4 杆、R_4 杆与 R_5 杆、R_5 杆与 R_3 杆之间夹角的正弦.

杆中心线的位形由 $\xi_i(s_i,t),\eta_i(s,t),\zeta_i(s_i,t)$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 确定.在每个时刻 t_k,选择各 R_i 杆能满足端部约束条件的可能位形 $\xi_i(s_i,t_k),\eta_i(s_i,t_k)$, $\zeta_i(s_i,t_k)$ 及其对 t 的导数,利用式(6)计算 $\vartheta_i(s_i,t_k),\psi_i(s_i,t_k)$ 及其对 t 的导数,代入式(1),(12)和式(14),计算杆网的拘束函数 Z.依据 Z 的最小值条件,寻求各 R_i 杆在该瞬时真实运动的加速度 $\ddot{\xi}_i(s_i,t_k),\ddot{\eta}_i(s_i,t_k),\ddot{\zeta}_i(s_i,t_k)$,然后按规定的时间步长积分得出 $t_{k+1}=t_k+\Delta t$ 时刻各 R_i 杆的实际速度和位形.如约束条件在给定各 R_i 杆供选择的可能运动时已预先得到满足,则在寻求最小拘束的计算过程中无需再予考虑.

5　结论

(1)高斯最小拘束原理可用于对多个弹性细杆组成的杆网系统建立动力学模型.其特点是应用变分方法直接得出运动规律,而无需建立和求解微分方程.其形式统一,不随杆网系统拓扑结构和约束条件的变化而改变.对于带控制的多体系统,有利于结合系统的优化进行.

(2)文中对任意数量弹性细杆以任意方式联结的杆网系统建立基于高斯原理的数学模型.列写杆网的拘束函数时,如忽略充分细长杆件的扭矩和扭率的相应项,则拘束函数由杆中心线的运动完全确定.

(3)杆件端部必须满足联结铰的约束条件,此约束条件可在各杆件供选择的可能运动中预先给予满足.无需在寻求最小拘束过程中再予考虑.

(4)忽略杆件的抗弯和抗扭刚度,但考虑拉伸变形,则转化为由柔索组成的索网系统的数学模型.

(5)对于杆件或柔索超大变形情形,可采用欧拉参数代替角度坐标建立系统的拘束函数.

参　考　文　献

1　胡海岩,田强,张伟等. 大型网架式可展开空间结构的非线性动力学与控制. 力学进展, 2013,43(4):390~414 (Hu H Y, Tian Q, Zhang W, et al. Nonlinear dynamics and control of large deployable space structures composed of trusses and meshes. *Advances in Mechanics*, 2013,43(4):390~414 (in Chinese))

2　梅凤翔,李彦敏,吴惠彬. 关于 Gauss 原理. 动力学与控制学报, 2016,14(4):301~306 (Mei F X, Li Y M, Wu H B. On the Gauss principle. *Journal of Dynamics and Control*, 2016,14(4):301~306 (in Chinese))

3　Vujanovic B. The practical use of Gauss's principle of least constraint. *Journal of Applied Mechanics*, 1976,43(3):491~496

4　Kalaba1 R E, Udwadia1 F E. Equations of motion for nonholonomic, constrained dynamical systems via Gauss's principle. *Journal of Applied Mechanics*, 1993,60(3):662~668

5　Fan Y Y, Kalaba R E, Natsuyama H H, et al. Reflections on the Gauss principle of least constraint. *Journal of Optimization and Applications*, 2005,127(3):475~484

6　刘延柱,潘振宽,戈新生. 多体系统动力学(第二版). 北京:高等教育出版社, 2014 (Liu Y Z, Pan Z K, Ge X S. Dynamics of multibody systems. Beijing:Higher Education Press, 2014 (in Chinese))

7　刘延柱. 高等动力学. 北京:高等教育出版社, 2001 (Liu Y Z. Advanced dynamics. Beijing:Higher Education Press, 2001 (in Chinese))

8　Попов Е П, Верещагин А Ф, Зенкевич С А. Манипуляционные роботы, динамики и алгоритмы, Москва, Наука, 1978 (Popov E P, Vereshchagin A F, Zenikevich S A. Manipulation robot, dynamics and algorithm. *Moscow Science*, 1978 (in Russian))

9　Lilov L, Lorer M. Dynamic analysis of multi-rigid-body systems based on the Gauss principle. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 1982, 62(10):539~545

10　董龙雷,阎桂荣,杜彦亭等. 高斯最小拘束原理在一类

刚柔耦合系统分析中的应用. 兵工学报, 2001, 22(3):347~351 (Dong L L, Yan G R, Du Y T, et al. Application of Gauss minimum constraint principle in a rigid-flexible coupled system. *Acta Armamantanii*, 2001, 22(3): 347~351 (in Chinese))

11 郝名望,叶正寅. 单柔体与多柔体动力学的高斯最小拘束原理. 广西大学学报, 2011,36(2):195~204 (Hao M W, Ye Z Y. Gauss principle of least constraint of simple flexible body and multi-flexible body dynamics. *Journal of Guangxi University, Natural Science Edition*, 2011,36(2):195~204 (in Chinese))

12 薛纭,翁德玮. 超细长弹性杆动力学的 Gauss 原理. 物理学报, 2009,58(1):34~39 (Xue Y, Weng D W. Gauss principle for a super-thin elastic rod dynamics. *Acta Physica Sinica*, 2009,58(1):34~39 (in Chinese))

13 刘延柱. 基于高斯原理的多体系统动力学建模. 力学学报, 2014,46(6):940~945 (Liu Y Z. Dynamic modeling of multi-body system based on Gauss's principle. *Acta Mechanica Sinica*, 2014,46(6):940~945(in Chinese))

14 刘延柱,薛纭. 基于高斯原理的 Cosserat 弹性杆动力学模型. 物理学报, 2015,64(4):44601 (Liu Y Z, Xue Y. Dynamical modeling of cosserat elastic rod based on Gauss principle. *Acta Physica Sinica*, 2015, 64(4): 44601 (in Chinese))

15 薛纭,曲佳乐,陈立群. 生长弹性杆动力学的 Gauss 最小拘束原理. 应用数学和力学, 2015,36(7):700~709 (Xue Y, Qu J L, Chen L Q. Gauss principle of least constraint for cosserat growing elastic rod dynamics. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2015,36(7):700~709 (in Chinese))

DYNAMICAL MODELING OF A NET SYSTEM OF RODS BASED ON GAUSS'S PRINCIPLE*

Liu Yanzhu†

(*Department of Engineering Mechanics*, *Shanghai Jiao Tong University*, *Shanghai* 200240, *China*)

Abstract The net system connected by an arbitrary number of rods with arbitrary topologic construction was discussed in this paper. Based on the Gauss's principle of least constraint, the approach of dynamic modeling for the net system of rods was proposed. The background of the study selects the large deployable structures composed of trusses and meshes in the astronautic engineering. The Kirchhoff's model of elastic rod was applied to describe the motion of rods, the large deformation of which can be unlimited. The general form of the constraint function for the net system was derived, and the geometric constraint conditions of rods exerted by connected joints were given. The related dynamic model can be used to determine the motion of the net system by the variation method directly without dynamical differential equations. The real motion of the system was obtained through seeking the minimal value of constraint function from different possible motions, in which the joint constraint conditions can be satisfied in advance. As a special case when the rods are flexible enough, neglecting the bending and torsional rigidities and considering the axial deformations, the net system of rods was transferred to a net system connected by flexible cables. Moreover, a net system composed of five rods was taken as an example in the explanation of the modeling process.

Key words spatial net system of rods, Gauss's principle of least constraint, Kirchhoff's model of elastic rod

Received 4 May 2017, revised 24 May 2017.

* The project supported by the National Natural Science Foundation of China(11372195).

† Corresponding author E-mail: liuyzhc@163.com