

# 漂浮式斜拉桥全局模态对 CFRP 索的敏感性研究\*

刘海波<sup>†</sup> 向建军

(湖南省交通规划勘察设计院有限公司, 长沙 410008)

**摘要** 斜拉桥复杂动力学问题中的一个关键问题是局部模态频率与全局模态频率成倍数匹配关系时可能导致的斜拉索大幅振动.本文针对这个问题,基于传递矩阵法,研究 CFRP 索对斜拉桥全局模态频率的敏感性.将斜拉桥的桥面梁和桥塔分别视为多离散弹性支承欧拉伯努利梁,建立其动力学控制微分方程,基于传递矩阵法对其特征频率进行求解.以长沙某独塔斜拉桥作为算例,对结构主要构件:斜拉索、塔和桥面梁的刚度变化对全局模态频率变化的敏感性问题进行了分析.结果表明,桥面梁和桥塔全局模态频率对斜拉索刚度变化非常敏感,并且用 CFRP 索替换钢质拉索可能避开拉索局部模态与斜拉桥全局模态的倍频关系,从而控制斜拉索的大幅振动.

**关键词** CFRP 索, 斜拉桥, 模态, 敏感性, 传递矩阵法, 振动

DOI: 10.6052/1672-6553-2018-023

## 引言

众所周知,斜拉索在斜拉桥中主要对桥面梁起弹性支承作用,以提高主梁的刚度,从而增加斜拉桥的跨越能力.现代斜拉桥的密索体系,导致各斜拉索的固有频率呈现出连续分布状态.使斜拉索的低阶频率(局部模态频率)与桥面梁或塔的低阶频率(全局模态频率)很容易形成倍数匹配关系.在各种环境荷载,如:风荷载、地震荷载、人行荷载或车辆荷载等作用下,斜拉索极易发生大幅振动,可能威胁桥梁安全.

斜拉桥的动力学问题一直是力学、结构和桥梁界的研究热点<sup>[1-4]</sup>.对斜拉桥动力学行为的研究可分为单根构件(斜拉索)和组合构件(索-梁、索-塔和整桥)两种情况.对斜拉索的研究主要集中在斜拉索强迫振动<sup>[5]</sup>、参数振动<sup>[6]</sup>和参强振动<sup>[7]</sup>研究三个方面.斜拉索的强迫振动主要用来模拟风雨对斜拉索的作用.参数振动和参强振动主要研究斜拉索在桥面梁和/或者桥塔振动作用下对斜拉索的端点产生激励,可能诱导斜拉索产生大幅空间运动.对于组合构件的研究,主要研究斜拉索与桥面或/和桥塔的共同相互作用<sup>[8,9]</sup>,通过内共振索与梁之

间可能产生能量交换<sup>[10]</sup>,导致斜拉索产生更大幅度的振动.无论是斜拉索的参数振动或参强振动还是斜拉索与其它构件的内共振问题的相关研究,斜拉索的模态频率和桥面梁或者桥塔的频率之间的匹配关系成为其中一个关键问题.在斜拉桥非线性动力学研究中,通常将斜拉索的单独振动,称为局部振动,相应的模态称为局部模态,而将桥面梁的振动称为全局振动或全局模态<sup>[11,12]</sup>.根据该定义,桥塔的振动同样为全局振动,相应模态称为全局模态.通常情况下,全局模态的模态形状和相应频率是通过有限元法建立斜拉桥的整体模型进行计算分析,至今缺少该方面的理论研究.

CFRP 索是现在国家绿色建筑重点研究的热点问题 CFRP 是英语 Carbon Fiber Reinforced Polymer 的简写,是由多股连续碳纤维与基材(环氧树脂)胶合后经过复杂工艺而制成的碳纤维增强复合材料.CFRP 索斜拉桥动力学问题的研究已有相关报道.吕志涛和梅葵花<sup>[13]</sup>考虑拉索梁端和塔端的激励,建立了非线性振动模型,利用龙格库塔直接数值积分方法,研究了桥梁整体振动频率与拉索振动频率比、拉索静拉力以及阻尼等对拉索振幅的影响.张鹤和谢旭<sup>[14]</sup>以跨度为 1400m 的斜拉桥模型

2018-05-18 收到第 1 稿,2018-09-13 收到修改稿.

\* 国家自然科学基金项目(11572117)和湖南省交通厅项目(201428)

<sup>†</sup> 通讯作者 E-mail:17120365@qq.com

为例,采用非线性有限元法,对比研究钢索和 CFRP 斜拉索的振动响应,结果表明在线性振动条件下使用 CFRP 拉索没有明显改变桥梁在车辆荷载作用下的振动响应.李志江<sup>[15]</sup>和康厚军等<sup>[16,17]</sup>建立了基于 CFRP 索各向异性材料特性的非线性振动模型,对其非线性振动行为进行了研究.这些研究均假定 CFRP 拉索斜拉桥会产生大幅的振动问题,而没有对 CFRP 拉索在未来大跨度桥梁中代替钢质拉索可能从根本上消除其大幅振动的问题进行研究.

本文将针对斜拉桥中全局模态与拉索局部模态可能出现频率匹配问题,对主梁和桥塔建立统一的单梁离散弹簧动力学模型,采用传递矩阵法研究全局模态频率对 CFRP 索的敏感性进行研究.主要内容为,针对斜拉索对桥面梁起弹性支撑的特点,将斜拉桥桥面梁和桥塔视为多离散弹性支撑梁力学模型,得到相应动力学控制微分方程,利用传递矩阵法进行求解,从而对斜拉桥的全局模态频率对 CFRP 斜拉索的敏感性进行研究.最后,将对对比研究 CFRP 斜拉索、塔和桥面梁的刚度对全局模态频率的影响.通过本文研究,希望能够为大跨度桥梁的减振设计和刚度评估提供一种简单实用的分析手段.

### 1 斜拉桥的单梁-离散弹簧模型

对于刚性塔柔性梁式斜拉桥,桥面梁相对桥塔其为柔性构件,通常情况下斜拉桥的桥塔刚度较大.斜拉桥的斜拉索对桥面梁起弹性支撑作用,以增加斜拉桥的刚度和提高其跨越能力.对于柔性塔刚性梁式斜拉桥,桥塔相对于梁刚度较低,索同样对塔的刚度不可忽视.其实,无论是单塔斜拉桥还是多塔斜拉桥,无论是漂浮式斜拉桥还是支撑体系斜拉桥,均可以将斜拉索视为无质量弹簧,进而将斜拉桥简化为如图 1 所示的单梁离散弹簧模型.为计算拉索的质量对结构刚度的影响,可将拉索的质量平均分配到相应梁段.同理,对于柔性塔刚性梁式斜拉桥,可以用类似的方法处理.

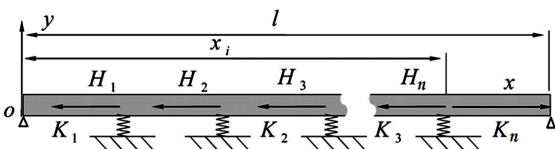


图1 单梁离散弹簧模型

Fig.1 Beam with discrete springs

如图 2 所示,拉索*i*的质量由第*i*-1 根拉索与第*i*根拉索间的梁段平均分配.设斜拉桥纵向分布斜拉索共有*n*根,分别作用于梁上的*x<sub>i</sub>*处,如图 2 所示.第*i*根斜拉索的长度、与铅垂方向的夹角及初始张力分别为*l<sub>i</sub>*、*θ<sub>i</sub>*和*P<sub>i</sub>*,单位长度的质量为*m<sub>i</sub>*,斜拉索的弹性模量和横截面积分别为*E<sub>i</sub>*和*A<sub>i</sub>*.在斜拉桥的静平衡位置,建立如图 1 所示直角坐标系,第*i*斜拉索简化为弹簧后对梁的横向为*K<sub>i</sub>*,而纵向轴力为*H<sub>i</sub>*.这里需要注意,*H<sub>i</sub>*为斜拉桥整体系统振动时拉索轴向应变产生的轴力在水平方向的分力.

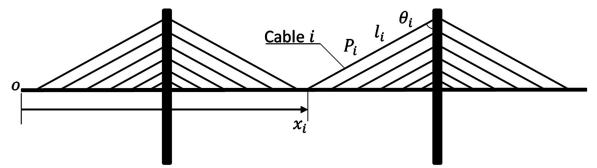


图2 斜拉桥中斜拉索的坐标及参数

Fig.2 Coordinates and parameters of cables of cable-stayed bridge

根据哈密尔顿原理和牛顿定理均可得到单梁离散弹簧面内弯曲自由振动的运动微分方程:

$$m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + (N + \sum_{i=1}^n H_i \delta(x - x_i)) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \sum_{i=1}^n K_i y \delta(x - x_i) \quad (1)$$

这里,*m*为梁的单位长度的质量,*y*为梁的横向动挠度,即动位移,*EI*为梁的抗弯刚度,*N*为梁的初始张力,*δ*为狄拉克函数.

方程(1)的直接求解相当困难,可通过间接方式求解.在下一节中,将采用传递矩阵法进行求解.

### 2 传递矩阵法求解

#### 2.1 场矩阵

为不失一般性,这里考虑梁上第*i*段梁,即拉索*i*与*i*+1间的梁段.该段梁简化为常力作用下等截面梁,运动方程(1)简化为:

$$m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + N \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0 \quad (2)$$

通过对运动方程(2)的求解,可以得到传递矩阵法的场矩阵.这里需要注意,拉索和塔的弹性支撑作用,后面将通过传递矩阵法的点矩阵进行考虑.

设式(2)的解为:

$$y(x, t) = Y(x) q(t) \quad (3)$$

通过标准的数学求解方法,可以得到:

$$Y(x) = C_1 \sin \gamma x + C_2 \cos \gamma x + C_3 \sinh \lambda x +$$

$$C_4 \cosh \lambda x \quad (4)$$

这里,  $C_i$  为积分常数, 可以通过边界条件确定.  $\gamma$  和  $\lambda$  分别为:

$$\gamma = \sqrt{\sqrt{\frac{m\omega^2}{EI} + \left(\frac{N}{2EI}\right)^2} + \frac{N}{2EI}} \quad (5)$$

$$\lambda = \sqrt{\sqrt{\frac{m\omega^2}{EI} + \left(\frac{N}{2EI}\right)^2} - \frac{N}{2EI}} \quad (6)$$

通过挠度与转角、弯矩和剪力间的关系, 可以得到第  $i$  段梁中截面的状态量如下:

$$\theta(x) = C_1 \gamma \cos \gamma x - C_2 \gamma \sin \gamma x + C_3 \lambda \cosh \lambda x + C_4 \lambda \sinh \lambda x \quad (7)$$

$$M(x) = -EI(C_1 \gamma^2 \sin \gamma x + C_2 \gamma^2 \cos \gamma x - C_3 \lambda^2 \sinh \lambda x - C_4 \lambda^2 \cosh \lambda x) \quad (8)$$

$$Q(x) = -EI(C_1 \gamma^3 \cos \gamma x - C_2 \gamma^3 \sin \gamma x - C_3 \lambda^3 \cosh \lambda x - C_4 \lambda^3 \sinh \lambda x) \quad (9)$$

式(4)及(7)-(9)可以用矩阵的形式表示为:

$$s = TD \quad (10)$$

这里有:

$$s = [Y \quad \theta \quad M \quad Q \quad N \quad 1]^T \quad (11)$$

$$D = [C_1 \quad C_2 \quad C_3 \quad C_4 \quad 1 \quad 1]^T \quad (12)$$

$$T = \begin{bmatrix} \sin \gamma x & \cos \gamma x & \sinh \lambda x & \cosh \lambda x & 0 & 0 \\ \gamma \cos \gamma x & -\gamma \sin \gamma x & \lambda \cosh \lambda x & \lambda \sinh \lambda x & 0 & 0 \\ -EI\gamma^2 \sin \gamma x & -EI\gamma^2 \cos \gamma x & EI\lambda^2 \sinh \lambda x & EI\lambda^2 \cosh \lambda x & 0 & 0 \\ -EI\gamma^3 \cos \gamma x & EI\gamma^3 \sin \gamma x & EI\lambda^3 \cosh \lambda x & EI\lambda^3 \sinh \lambda x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (13)$$

第  $i$  段梁的左端状态变量为:

$$s_i^L = T_0 D \quad (14)$$

则有:

$$D = T_0^{-1} s_i^L \quad (15)$$

同理, 第  $i$  段梁的右端状态变量为:

$$s_i^R = T_i D \quad (16)$$

将式(15)代入上式有:

$$s_i^R = T_i T_0^{-1} s_i^L \quad (17)$$

## 2.2 点矩阵

本小节通过传递矩阵法中的点矩阵考虑斜拉索对桥面梁的弹性支撑作用. 值得一提的是, 关于斜拉桥中的桥塔, 同一作用点有两根斜拉索的作用. 可通过分别考虑两根弹簧的作用后, 合成一根弹簧考虑. 假定在斜拉索作用处将左右截面截开, 得如图3所示的节点受力图.

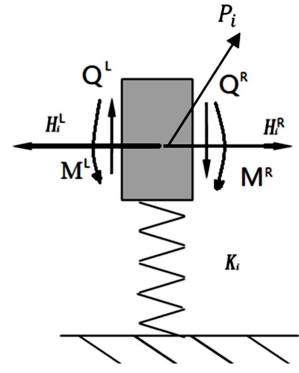


图3 节点受力图

Fig.3 Force equilibrium at node of beam

由于拉索相对梁较柔, 假定节点处无弯矩传递到梁上. 由图3可知, 节点左右截面上的状态变量仅有轴力和剪力不同. 即有:

$$Q_i^R = Q_i^L + K_i Y_i^L \cos^2 \theta_i + P_i \cos \theta_i \quad (18a)$$

$$Q_i^R = Q_i^L + (K_i \sin^2 \theta_i + K_{n+1-i} \sin^2 \theta_{n+1-i}) Y_i^L + P_i \sin \theta_i - P_{n+1-i} \sin \theta_{n+1-i} \quad (18b)$$

$$N_i^R = N_i^L + \frac{1}{2} K_i Y_i^L \sin 2\theta_i + P_i \sin \theta_i \quad (19a)$$

$$N_i^R = N_i^L + \frac{1}{2} K_i Y_i^L \sin 2\theta_i + \frac{1}{2} K_{n+1-i} Y_i^L \sin 2\theta_{n+1-i} + P_i \cos \theta_i + P_{n+1-i} \cos \theta_{n+1-i} \quad (19b)$$

这里  $P_{n+1-i}$  为考虑桥塔的振动时, 桥塔另一侧对应的斜拉索索力. 注意, 考虑斜拉索的垂度效应, 采用 Ernst 公式计算等效弹性模量<sup>[17]</sup>. 弹性支撑刚度  $K_i$  可表示为:

$$K_i = \frac{1}{l_i \left( \frac{1}{E_i A_i} + \frac{1}{12} \left( \frac{l_i W_i \sin \theta_i}{P_i} \right)^2 \right)} \quad (20)$$

这里  $W_i$  为斜拉索单位长度的重量.

同理, 可以将节点左右状态变量用矩阵表示为:

$$s_{i+1}^L = \bar{T}_i s_i^R \quad (21)$$

这里, 有:

$$s_i^R = [Y_i^R \quad \theta_i^R \quad M_i^R \quad Q_i^R \quad N_i^R \quad 1]^T \quad (22)$$

$$s_{i+1}^L = [Y_{i+1}^L \quad \theta_{i+1}^L \quad M_{i+1}^L \quad Q_{i+1}^L \quad N_{i+1}^L \quad 1]^T \quad (23)$$

$$\bar{T}_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ K_i \cos^2 \theta_i & 0 & 0 & 1 & 0 & P_i \cos \theta_i \\ \frac{1}{2} K_i \sin 2\theta_i & 0 & 0 & 0 & 1 & P_i \sin \theta_i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (24a)$$

$$\bar{T}_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ K_i \sin^2 \theta_i + K_{n+1-i} \sin^2 \theta_{n+1-i} & 0 & 0 & 1 & 0 & P_i \sin \theta_i - P_{n+1-i} \sin \theta_{n+1-i} \\ \frac{1}{2} K_i \sin 2\theta_i + \frac{1}{2} K_{n+1-i} \sin 2\theta_{n+1-i} & 0 & 0 & 0 & 1 & P_i \cos \theta_i + P_{n+1-i} \cos \theta_{n+1-i} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (24b)$$

当梁与塔为简单支撑时,仅需要将式(18)和式(19)稍做修改即可。

### 2.3 总传递矩阵

由式(17)和式(21),可以得到单梁离散弹簧结构第*i*段梁至第*i+1*段梁的传递矩阵:

$$s_{i+1}^L = U_i s_i^L \quad (25)$$

这里,

$$U_i = \bar{T}_i T_i T_0^{-1} \quad (26)$$

根据传递矩阵原理,可得到整个斜拉桥的桥面梁传递矩阵:

$$s_n^L = U s_1^L \quad (27)$$

这里有,

$$U = \prod_{i=1}^n U_i \quad (28)$$

*U* 为总体传递矩阵。

至此,根据式(27)式和斜拉桥的边界条件,求系统的特征值问题,可以计算评估斜拉桥施工和成桥阶段的整体模态频率和振型。这里需要进一步指出,针对不同类型的斜拉桥,处理方式稍有不同。针对简单支撑体系斜拉桥,在塔梁中心线交叉处,左右梁截开取为节点,弹性支撑的刚度为塔下部结构的等效刚度。对于漂浮式斜拉桥,此处不用截开。

### 2.4 边界条件

以上斜拉桥整体模态频率计算分析理论,既可用于斜拉桥的施工阶段分析,也可应用于成桥阶段的评估,可为设计提供一种简便的分析手段。两种阶段的不同之处,仅在于总体传递矩阵的边界条件不同。

施工阶段,两端均为自由端,因此有:

$$s_1^L = [Y \ \theta \ 0 \ 0 \ 0 \ 1]^T \quad (29a)$$

$$s_n^L = [Y \ \theta \ 0 \ 0 \ 0 \ 1]^T \quad (30a)$$

成桥阶段,两端均为简支,因此有:

$$s_1^L = [0 \ \theta \ 0 \ Q \ 0 \ 1]^T \quad (29b)$$

$$s_n^L = [0 \ \theta \ 0 \ Q \ 0 \ 1]^T \quad (30b)$$

对于塔的刚度分析则可以将其简化为一端自

由一端固定的带弹性支承的悬臂梁。边界条件可表示为:

$$s_1^L = [Y \ \theta \ 0 \ 0 \ 0 \ 1]^T \quad (29c)$$

$$s_n^L = [0 \ \theta \ 0 \ N \ 0 \ 1]^T \quad (30c)$$

根据上述边界条件,可进一步将总体传递矩阵简化为一 $2 \times 2$ 矩阵,求其特征值非常方便。

## 3 敏感性分析

长沙某铁路斜拉桥结构形式为 112+80+32m 非对称独塔双索面预应力混凝土槽形梁斜拉桥,如图 4 所示。塔柱总高 79m,桥面以上 45m 高,共有 4×8 对斜拉索,左边相邻索之间的水平距离为 12.8m,右边相邻索之间的水平距离为 9m,塔柱上相邻索之间的距离为 2.5m,斜拉索采用  $\Phi 7$ mm 高强度低松弛镀锌平行钢丝,钢丝标准强度  $R_{by} = 1670$ MPa,外挤双层 HDPE 护套,管内层为黑色,外层为白色,冷铸墩头锚,梁上为锚固端,塔上为张拉端。

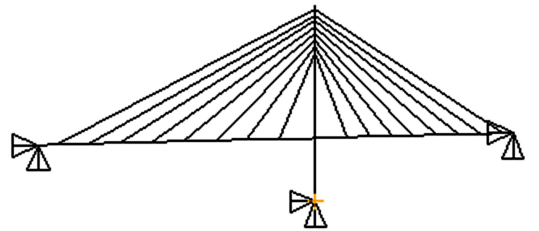


图4 斜拉桥成桥状态立面图

Fig.4 Elevation of the cable stayed bridge at working state

通过本文方法,得到了该桥桥面梁和桥塔一阶模态固有频率随 CFRP 斜拉索等结构参数改变的敏感性,分别如表 1 和表 2 所示。从表 1 和表 2 可以看出,裸桥塔的一阶固有频率为 0.534Hz,桥面梁的一阶固有频率仅为 0.108Hz,相比于桥塔小很多。这说明该斜拉桥属于目前比较流行的刚塔柔梁式斜拉桥。斜拉桥拉索的作用,使梁的一阶固有频率提高了 800% 以上,说明斜拉索的弹性支承作用使桥面梁的刚度有很大提高,从而提高了其跨越能力。

当然,从表1可以看到,虽然塔在斜拉桥中起中流砥柱的作用,斜拉索的作用使其刚度仍有300%以上的提高。

表1 桥塔一阶频率敏感性

Table 1 Sensitivity of the first frequency of tower

Various stiffness (increased by)	Frequency (Hz)	sensitivity (%)	
		algorithm	Increment
without cable	0.53436	—	—
designed steel cable	2.2798	(B-A)/A	326.64
10% (tower)	2.3058	(C-B)/B	1.14
50% (tower)	2.3774	(D-B)/B	4.28
10% (steel cable)	2.3486	(E-B)/B	3.02
50% (steel cable)	2.5708	(F-B)/B	12.76
10% (CFRP cable)	2.5596	(G-B)/B	12.27
50% (CFRP cable)	2.7366	(H-B)/B	20.04
150% (CFRP cable)	2.9731	(I-B)/B	30.41

表2 桥面梁一阶模态频率敏感性

Table 2 Sensitivity of the first frequency of deck

Various stiffness (increased by)	Frequency (Hz)	sensitivity (%)	
		algorithm	Increment
without cable	0.10799	—	—
designed steel cable	0.9913	100(B-A)/A	817.95
10% (beam stiffness)	0.99989	100(C-B)/B	0.87
50% (beam stiffness)	1.0336	100(D-B)/B	4.27
10% (steel cable)	1.0265	100(E-B)/B	3.55
50% (steel cable)	1.1425	100(F-B)/B	15.25
10% (CFRP cable)	1.0766	100(G-B)/B	8.60
50% (CFRP cable)	1.2227	100(H-B)/B	23.34
150% (CFRP cable)	1.4869	100(I-B)/B	50.00

对表1进一步分析,可以看出各构件的刚度改变对桥塔刚度变化的敏感性有很大的不同.增加桥塔自身的刚度,即使增加50%其整体刚度的增加仅4.28%.由此说明,桥塔自身刚度本来就在设计之初比较大,其变化的范围非常小,并且造价相当高.斜拉索的刚度变化就相对于桥塔自身的变化更为敏感.钢索的a刚度增加50%,可以使塔的刚度提高12%以上.但钢索刚度提高,只能靠增加拉索内部钢丝束的数量.从表1中可以看出,CFRP索的刚度变化对桥塔刚度变化的敏感性非常高,CFRP索的刚度增加10%,即可使桥塔刚度提高12.27%.由于CFRP索的弹性模量可根据不同需求和工艺改变,相对比较容易实现,如果将钢索改为高弹性模量的CFRP索,则可使桥塔的刚度提高30%以上.从表2可以看出,其对桥面梁的刚度提高可以达到50%.通过以上数据分析可以看出,斜拉桥的各主要构件对全局模态频率(刚度)的影响,斜拉索的敏感性

最高,并且容易实现。

由于斜拉索横向振动的固有频率主要取决于斜拉索的长度,初始张拉力和单位长度的质量,即 $\omega = (n\pi/l)\sqrt{H/m}$ .由于CFRP斜拉索的质量密度约为钢索的1/5,在拉索的长度和张拉力不变的情况下,单根斜拉索的各阶固有频率,即局部模态频率将改变为原来固有频率的2.24倍,其增幅远大于全局模态的增幅.因此,在设计中,为降低斜拉索与桥面或桥塔间由于内共振产生能量交换,使斜拉索发生大幅振动的可能,将CFRP斜拉索用来替换钢质斜拉索是一种较好的方法.下面将对独塔CFRP索斜拉桥的设计和传统独塔斜拉桥的换索或加固等工程实际问题通过本文建立的方法进行敏感性分析。

图5给出了桥面梁的一阶频率对CFRP索数量和刚度的敏感性.需要指出的是,图中横坐标数字表示图4中斜拉索从左至右的数量.如图5中横坐标4,表示图4中从左至右有4根钢质斜拉索被换成CFRP索.图5中纵坐标表示梁的频率增量,即全局模态频率的增量.首先看到,随着斜拉索被换成CFRP索的数量的增加,斜拉桥全局模态频率变化非常大.其次,看到当第10根拉索被换成CFRP索以后,全局模态的频率几乎不在随着CFRP索数量的增加而改变.也就是说,全局模态频率对斜拉桥左边CFRP斜拉索数量非常敏感,而对右边CFRP索的更换数量并不敏感,甚至不变.可能原因为左边斜拉索更换为CFRP索以后,整体斜拉桥的刚度提高已经得到保证,在实际工程中,可以只换一半拉索.另外,从图5中知,当CFRP索的刚度较小时,在左边第6根和第7根索对全局模态的频率影响很大.可能是第6根和第7根索位置对结构全局第一阶模态影响最大.但是,随着其余CFRP索刚度的提高,看到当前4根CFRP索的刚度均提高到150%以后,由于斜拉桥整体刚度的提高,第5根和第6根拉索对结构全局模态频率不再表现出非常大的敏感性.为此,单独对只换一根索为CFRP索的全局模态频率进行了分析,如图6所示。

图6描述了斜拉桥对应位置单根拉索更换为CFRP斜拉索后梁频率的变化情况.从图6可以看出对于一阶全局模态频率,第5根和第6根拉索最为敏感.这与图5中所得结论基本一致.这为斜拉桥更换传统钢质拉索为CFRP斜拉索提供了有力支撑。

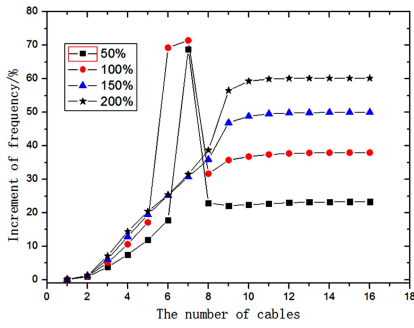


图 5 梁频率对 CFRP 索数量和刚度的敏感性(从左至右)

Fig.5 Sensitivity of beam frequency to the number and stiffness of CFRP cables (From left end of bridge)

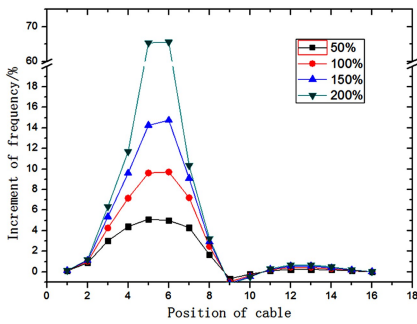


图 6 梁频率对 CFRP 索位置和刚度的敏感性

Fig.6 Sensitivity of beam frequency to the location and stiffness of CFRP cables

图 7 描述了前三阶全局模态频率对 CFRP 索位置和刚度的敏感性.从图 7 可以看出,前三阶全局模态频率都对第 5 根索和第 6 根 CFRP 索的刚度非常敏感.特别是第三阶模态,当 CFRP 索的刚度增加 200%,即采用高模量 CFRP 索时,模态频率几乎增加 180%,低阶频率仅增加 65%.这样的结果使全局模态的低阶频率之间的间隔增大,有利于结构振动的控制,特别是斜拉索的振动控制.这对以后斜拉桥更换钢索为 CFRP 索具有重要参考价值.

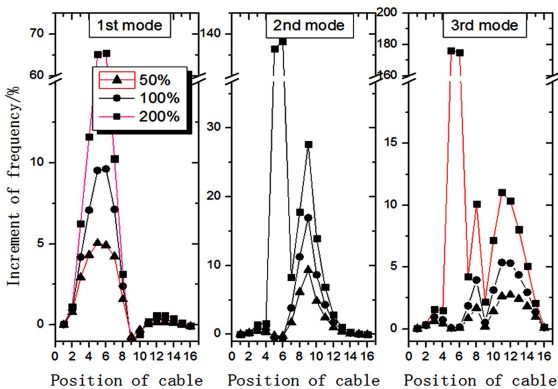


图 7 梁前三阶频率对 CFRP 索位置和刚度的敏感性

Fig.7 Sensitivity of the first three frequencies of beam to the location and stiffness of CFRP cables

为进一步验证图 5 中所得结论,从图 4 所示斜拉桥的右边开始更换钢质斜拉索为 CFRP 索.图 8 给出了桥面梁的一阶频率对 CFRP 索数量和刚度的敏感性.从图中可以看出,右边拉索全部更换为 CFRP 索,即使其均为高模量 CFRP 索,对结构整体刚度的提高贡献不大.从图中同样可以看出最左边两根拉索同样对刚度的提高并不明显.这与图 5 所示基本一致.产生这样结果的主要原因为斜拉桥的左边跨度大、更柔,而右边跨度较小,本身刚度较大.

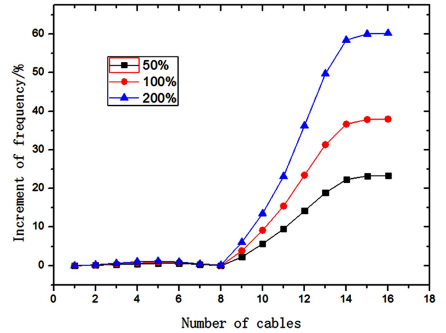


图 8 梁频率对 CFRP 索数量和刚度的敏感性(从右至左)

Fig.8 Sensitivity of beam frequency to the number and stiffness of CFRP cables (From right end of bridge)

图 9 描述了桥塔的频率对 CFRP 索数量和刚度的敏感性.这里同图 5 所述换索方式相同,即从图 4 所示桥梁左边开始.从图 9 可以看出,由于该桥为刚性塔柔性梁式斜拉桥,虽然桥塔整体刚度随着 CFRP 索的数量增多和刚度增大而变大,但最大增幅约为桥面梁的一半.并且,对于 CFRP 索的数量和刚度的增大,整体刚度增量几乎呈线性变化.由此说明,对于独塔斜拉桥的设计和传统斜拉桥换索工程,可以桥面梁整体刚度为最优设计控制为目标.为此,对单根索对桥塔整体刚的影响进行了进一步分析,如图 10 所示.

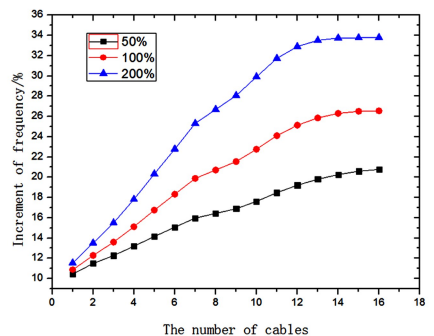


图 9 桥塔频率对 CFRP 索数量和刚度的敏感性

Fig.9 Sensitivity of tower frequency of to the number and stiffness of CFRP cables

图10描述了桥塔频率对不同位置CFRP索的刚度的敏感性。从图中可以看出,对于一阶模态(左图)频率,当传统拉索更换为高模量CFRP索,即刚度提高到原来3倍,频率最大改变量小于4.5%。从图10中的右图可知,2阶模态相对1阶模态频率虽更为敏感,但变化仍然非常小。由此说明,虽然桥塔整体刚度对各位置拉索刚度的敏感有所不同,但桥塔整体刚度对单根拉索的刚度变化并不敏感,主要原因是桥塔本身刚度较大。因此,针对刚性塔柔性梁式斜拉桥,在CFRP独塔斜拉桥设计时,应以控制桥面全局模态频率即以桥面振动为主的竖弯刚度为主要控制优化目标。

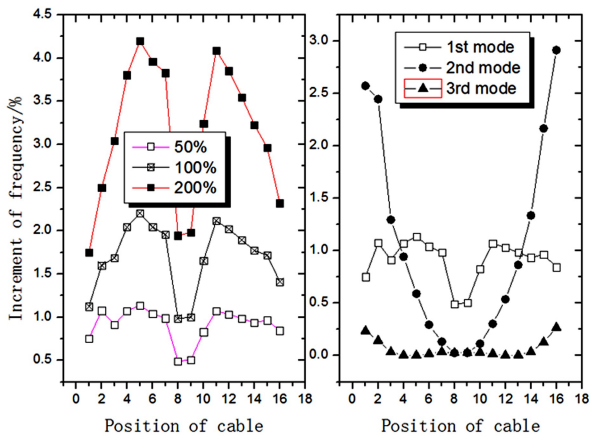


图10 桥塔频率对CFRP索位置和刚度的敏感性

Fig.10 Sensitivity of tower frequency of to the location and stiffness of CFRP cables

## 4 结论

本文基于斜拉桥中斜拉索减振被动控制的方法和目的,建立了一种分析斜拉桥全局模态固有频率敏感性分析的方法。以某独塔斜拉桥为算例,分析计算了整体模态频率对钢索、CFRP索、桥面梁和桥塔刚度变化的敏感性,得出以下结论:

(1)斜拉索的刚度对斜拉桥中全局模态刚度变化相对于桥面梁和桥塔最为敏感。为提高漂浮式独塔斜拉桥的整体刚度,可通过对全局模态频率对拉索的敏感性进行分析,确定其中最为敏感的索号(拉索位置);将主要几根传统钢索更换为高模量CFRP索,可使整体刚度有较大提高。

(2)对于漂浮式独塔斜拉桥,将跨度大的一侧传统钢索更换为CFRP斜拉索可以有效提高结构的整体刚度。相反,将跨度小的一侧更换,对整体刚度的改善作用不大。

(3)针对刚性塔柔性梁式斜拉桥,在CFRP独塔斜拉桥设计时,应以控制桥面全局模态频率即以桥面振动为主的竖弯刚度为主要控制优化目标。

(4)CFRP斜拉索不仅在静力方面可提高斜拉桥的跨越能力,而且可能在大跨度斜拉桥中拉索大幅振动控制方面具有较大的潜力。

(5)本文建立的敏感性分析方法,虽然以刚性塔柔性梁或柔性塔刚性梁斜拉桥作为基本假设,但适用于所有斜拉桥的全局模态固有频率的敏感性分析,并且相对于用有限元软件进行分析更为方便,具有重要的工程应用价值。

## 参考文献

- 康厚军,郭铁丁,赵跃宇. 大跨度斜拉桥非线性振动模型与理论研究进展. 力学学报, 2016, 48(3): 519 ~ 535 (Kang H J, Guo T D, Zhao Y Y. Review on nonlinear vibration and modeling of large span cable-stayed bridge. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2016, 48(3): 519~535 (in Chinese))
- 郭铁丁,康厚军,王连华等. 工程索结构动力学:非线性建模与分析. 力学与实践, 2016, 38(2): 119~125 (Guo T D, Kang H J, Wang L H, et al. Dynamics of engineering cable: nonlinear modelling and analysis. *Mechanics in Engineering*, 2016, 38(2): 119~125 (in Chinese))
- 孙测世,彭剑,赵冰等. 斜拉桥主梁纵向漂移对拉索非线性振动影响. 工程力学, 2014, 31(11): 86~91 (Sun C S, Peng J, Zhao Y B, et al. Effect of longitudinal floating of girder on nonlinear vibrations of stay cables. *Engineering Mechanics*, 2014, 31(11): 86~91 (in Chinese))
- 康厚军,赵跃宇,王连华. 斜拉桥中拉索对桥面动力特性的影响. 动力学与控制学报, 2007, 5(1): 44~49 (Kang H J, Zhao Y Y, Wang L H. Theoretical considerations for effects of cables on deck of cable-stayed bridges. *Journal of Dynamics and Control*, 2007, 5(1): 44~49 (in Chinese))
- Wang L H, Zhao Y Y. Large amplitude motion mechanism and non-planar vibration character of stay cables subject to the support motions. *Journal of Sound and Vibration*, 2009, 327(1-2): 121~133
- 赵跃宇,王涛,康厚军. 斜拉索主参数共振的稳定性分析. 动力学与控制学报, 2008, 6(2): 112~117 (Zhao Y Y, Wang T, Kang H J. Analysis of the stability of principal parametric resonance of stayed-cable. *Journal of Dy-*

- namics and Control*, 2008,6(2):112~117 (in Chinese))
- 7 Kang H J, Zhu H P, Zhao Y Y, et al. In-plane non-linear dynamics of the stay cables. *Nonlinear Dynamics*, 2013, 73(3):1385~1398
  - 8 Wei M H, Lin K, Jin L, et al. Nonlinear dynamics of a cable-stayed beam driven by sub-harmonic and principal parametric resonance. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2016,110:78~93
  - 9 Wang Z, Li T. Nonlinear dynamic analysis of parametrically excited space cable-beam structures due to thermal loads. *Engineering Structures*, 2015,83(1):50~61
  - 10 Gattulli V, Lepidi M. Nonlinear interactions in the planar dynamics of cable-stayed beam. *International Journal of Solids and Structures*, 2003,40(18):4729~4748
  - 11 Gimsing N J. *Cable Supported Bridges*. Wiley, 1983
  - 12 Fujino Y, Warnitchai P, Pacheco B M. An experimental and analytical study of autoparametric resonance in a 3DOF model of cable-stayed-beam. *Nonlinear Dynamics*, 1993,4(2):111~138
  - 13 梅葵花,吕志涛,孙胜江. CFRP 斜拉索的非线性参数振动特性. *中国公路学报*, 2007,20(1):52~57 (Mei K H, Lu Z T, Sun S J. Property of nonlinear parametric vibration of CFRP cables. *China Journal of Highway and Transport*, 2007,20(1):52~57 (in Chinese))
  - 14 张鹤,谢旭. 车辆荷载作用下大跨度斜拉桥钢 CFRP 斜拉索的非线性振动. *工程力学*, 2009,26(8):123~130 (Zhang H, Xie X. Nonlinear vibration of steel and CFRP cables of long span cable-stayed bridge under vehicular loads. *Engineering Mechanics*, 2009,26(8):123~130 (in Chinese))
  - 15 李志江. 碳素纤维复合材料(CFRP)斜拉索非线性振动特性和参数激励研究[博士学位论文]. 武汉:华中科技大学, 2011 (Li Z J. Study on Nonlinear Vibration Properties and Parametric Excitations of CFRP Stayed Cables[Ph.D Thesis]. Wuhan:Huazhong University of Science and Technology, 2011(in Chinese))
  - 16 Kang H J, Zhao Y Y, Zhu H P. Linear and nonlinear dynamics of suspended cable considering bending stiffness. *Journal of Vibration and Control*, 2015,21(8):1487~1505
  - 17 丛云跃,康厚军,郭铁丁等. CFRP 索斜拉桥面内自由振动的多索梁模型及模态分析. *动力学与控制学报*, 2017,15(6):494~504 (Cong Y Y, Kang H J, Guo T D, et al. A multiple cable-beam model and modal analysis on in-plane free vibration of cable-stayed bridge with CFRP cables. *Journal of Dynamics and Control*, 2017,15(6):494~504 (in Chinese))

## ANALYSIS ON SENSITIVITY OF GLOBAL MODE OF FLOATING CABLE-STAYED BRIDGE TO CFRP CABLE \*

Liu Haibo<sup>†</sup> Xiang Jianjun

(Hunan Provincial Communications Planning, Survey & Design Institution, Changsha 410008, China)

**Abstract** One of the key problems in the complex dynamics of cable-stayed bridge is the large vibration of cables resulting from the matching relation between the local and global modal frequencies. In this paper, based on the transfer matrix method, the sensitivity of global modal frequency to CFRP cable was investigated. The deck and tower of cable-stayed bridge are regarded as Euler-Bernoulli beam with discrete elastic supports, respectively. Their corresponding differential equations governing the motion of deck and beam are obtained. Then, the eigen frequencies of global modes are obtained by transfer matrix method. A cable-stayed bridge with single tower in Changsha is taken as an example, and the sensitivity of the stiffness of cable, tower and deck to global modal frequencies was studied. The results shows that the global modal frequency is considerably sensitive to the stiffness of cables and the CFRP cable can be used to replace steel cable in order to reduce and control the vibration of cables.

**Key words** CFRP cable, cable-stayed bridge, modal, sensitivity, transfer matrix method, vibration

Received 18 May 2018, revised 13 September 2018.

\* The project supported by the National Natural Science Foundation of China(11572117), Hunan Traffic Department Projcet(201428).

<sup>†</sup> Corresponding author E-mail: 17120365@qq.com