

基于 Melnikov 方法的单自由度干摩擦振子的混沌分析*

秦琅[†] 谢建华

(西南交通大学力学与工程学院, 成都 610031)

摘要 本文考虑了一个含小阻尼、受周期激励的单自由度干摩擦振子, 运用 Melnikov 方法得到了系统出现马蹄型混沌的参数区域. 通过数值方法, 给出了不同参数下系统的相图和 Poincaré 截面图, 计算了系统的 Lyapunov 指数. 数值结果验证了解析结果, 并且表明系统经历周期倍化进入混沌.

关键词 干摩擦, Melnikov 方法, 马蹄混沌, 周期倍化

DOI: 10.6052/1672-6553-2018-022

引言

工程与实际生产问题中干摩擦因素是广泛存在的, 如制动系统和机床切削系统的干摩擦. 干摩擦具有非线性效应, 使得系统可能产生复杂的动力学行为, 可能产生自激振动, 多周期现象, 甚至会出现混沌现象. Hetzler 等^[1] 基于 Stribeck 干摩擦模型研究了单自由度与两自由度干摩擦系统的稳定性与 Hopf 分岔. Guo 和 Xie^[2] 研究了单自由度干摩擦受迫系统共振时的 NS 分岔. Van de Vrande 和 De Kraker^[3] 研究了干摩擦引起的粘滑振动现象. Melnikov 方法是研究在弱周期力激励下近 Hamilton 系统中的混沌运动的较为有效的解析方法^[4,5]. 一些工程实际问题, 可以将其简化为带有弱周期扰动项的具有同宿轨道或者异宿轨道的二阶常微分方程. 通过建立 Poincaré 映射, 就可以采用 Melnikov 方法进行解析计算. 许多学者采用 Melnikov 方法解决一些具有实际工程背景问题, 取得了很好的结果. Wu 和 Mccue^[6] 利用扩展的 Melnikov 方法分析单自由度船舶模型的摇摆运动, 研究了不同波浪模型对船舶摇摆运动的影响. 韩宁, 曹庆杰^[7] 基于 Melnikov 函数研究了柱面系统的混沌动力学行为. 贺尚宏^[8] 将 Melnikov 方法应用于确定多参数机械系统的混沌边缘中. 文献[9, 10] 以两边受约束倒置

的单摆为模型, 应用扩展的 Melnikov 方法研究了其动力学行为. 文献[11, 12] 研究了单自由非线性的传送带系统, 即系统的弹簧为非线性的. 分析了传送带速度与摩擦力振幅改变对于系统的动力学行为的影响. 本文的研究模型与其相似, 但是采用线性弹簧, 构造出几何非线性系统, 籍此分析系统相应的动力学行为, 并应用 Melnikov 方法给出了系统的混沌解析预测得到出现马蹄型混沌运动的条件, 并将 Melnikov 解析结果同数值结果进行比对, 相互印证, 说明了 Melnikov 解析结果的有效性.

1 力学模型与运动方程

考虑图 1 所示力学模型, 质量为 m 的质块位于速度恒定为 \bar{v} 的传送带上运动, 并受两刚度为 k 的弹簧和阻尼系数为 c 的阻尼约束. 弹簧, 阻尼均位于同一水平面, 相对位置如图 1(b), 质块受弱简谐力 $F_0 \cos \omega t$ 及物块与皮带轮间小摩擦力 F_f 作用. 在科研文献中干摩擦模型种类繁多^[13], 本文选取用较简单的库伦摩擦力模型, 即: $F_f = f_0 \cdot \text{sign}(x - \bar{v})$. 弹簧原长 l_0 , 当 $x = 0$ 时弹簧长度为 l , 此时弹簧内力为 T_0 . 当 $T_0 > 0$ 时, 弹簧受拉; $T_0 < 0$ 时, 弹簧受压. 在图示位置时, 弹簧伸长 $\sqrt{l^2 + x^2} - (l - T_0/k)$, 质块所受水平力为 $-cx - F_f + F_T + F_0 \cos \omega t$, 其中 F_T 为两

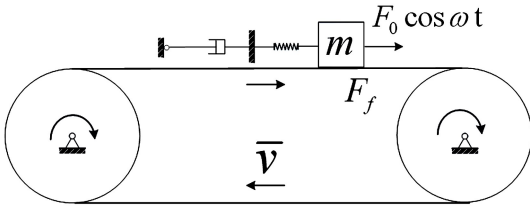
2017-07-25 收到第 1 稿, 2017-10-16 收到修改稿.

* 国家自然科学基金资助项目(11572263, 11732014)

[†] 通讯作者 E-mail: qinlink@gmail.com

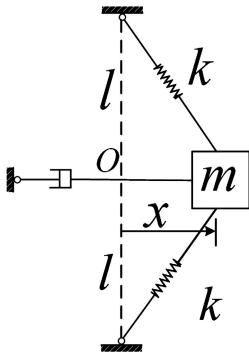
弹簧水平方向合力,则有:

$$\begin{aligned}
 F_T &= -2T\sin\theta \\
 &= -2k(\sqrt{l^2+x^2} - (l-T_0/k)) \frac{x}{\sqrt{l^2+x^2}} \\
 &= (-2T_0/l)x + (T_0-kl)x^3/l^3 + o(x^3) \quad (1)
 \end{aligned}$$



(a) 模型正视简图

(a) Front view sketch of the model



(b) 质块, 弹簧, 阻尼等俯视图

(b) Top view sketch of mass, spring, damping

图1 力学模型图

Fig.1 Mechanical model

质块的运动微分方程为:

$$\ddot{x} - ax + bx^3 + o(x^3) = \varepsilon(\gamma \cos \omega t - \alpha \dot{x} - \beta \text{sign}(x - \bar{v})) \quad (2)$$

其中 $a = -2T_0/ml$, $b = (kl - T_0)/ml^3$, $F_0 = \varepsilon m \gamma$, $c = \varepsilon m \alpha$, $f_0 = \varepsilon m \beta$, ε 为小参数, 假定系统参数 $a, b, \alpha, \beta, \gamma, \omega$ 均为正值, 略去 $o(x^3)$ 项, 进一步将系统(2)化为微分方程组的形式:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = ax - bx^3 + \varepsilon(\gamma \cos \omega t - \alpha x - \beta \cdot \text{sign}(x - \bar{v})) \end{cases} \quad (3)$$

当 $\varepsilon = 0$ 时, 未扰系统:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = ax - bx^3 \end{cases} \quad (4)$$

为 Hamilton 系统. 未扰系统(4) Hamilton 量为:

$$H(x, y) = \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}ax^2 + \frac{1}{4}bx^4 \quad (5)$$

分析得系统(4)具有 3 个奇点, 其中(0,0)点为鞍

点, $(\pm\sqrt{\frac{a}{b}}, 0)$ 为中心, 存在过鞍点(0,0)的同宿轨道 Γ , 鞍点处的 Hamilton 量为 $H_0 = H(0,0) = 0$. 由此得到系统同宿轨道参数化方程:

$$\begin{aligned}
 q^0(t) &= (x^0(t), v^0(t)) \\
 &= \left(\sqrt{\frac{2a}{b}} \text{sech} \sqrt{a} t, -a \sqrt{\frac{2}{b}} \text{sech} t \tanh \sqrt{a} t \right) \quad (6)
 \end{aligned}$$

2 Melnikov 方法分析

系统(3)的 Melnikov 积分为:

$$M(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} v^0(t - t_0) \cdot g(q^0(t - t_0), t) dt \quad (7)$$

其中 $g(x, v, t) = \gamma \cos \omega t - \alpha x - \beta \cdot \text{sign}(x - \bar{v})$ 进一步有:

$$\begin{aligned}
 M(t_0) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\gamma \cdot v^0(t - t_0) \cos \omega t - \right. \\
 &\quad \left. v^0(t - t_0) (\alpha \cdot v^0(t - t_0) + \right. \\
 &\quad \left. \beta \cdot \text{sign}(v^0(t - t_0) - \bar{v})) \right) dt \quad (8)
 \end{aligned}$$

令 $\tau = t - t_0$, 则有:

$$\begin{aligned}
 M(t_0) &= -a \sqrt{\frac{2}{b}} \gamma \int_{-\infty}^{\infty} \text{sech} \sqrt{a} \tau \tanh \sqrt{a} \tau \cos \omega(t + t_0) d\tau - \\
 &\quad \frac{2\alpha a^2}{b} \int_{-\infty}^{\infty} (\text{sech} \sqrt{a} \tau \tanh \sqrt{a} \tau)^2 d\tau - \\
 &\quad \beta a \sqrt{\frac{2}{b}} \int_{-\infty}^{\infty} (-\text{sech} \sqrt{a} \tau \tanh \sqrt{a} \tau) \cdot \\
 &\quad \text{sign}(-a \sqrt{\frac{2}{b}} \text{sech} \sqrt{a} \tau \tanh \sqrt{a} \tau - \bar{v}) d\tau \\
 &= -a \sqrt{\frac{2}{b}} \gamma Z(t_0) - \frac{2\alpha a^2}{b} I_1 - \beta a \sqrt{\frac{2}{b}} I_2 \quad (9)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Z(t_0) &= \int_{-\infty}^{\infty} \text{sech} \sqrt{a} \tau \tanh \sqrt{a} \tau \cos \omega(t + t_0) d\tau \\
 &= -\pi \omega \text{sech} \left(\frac{\pi \omega}{2\sqrt{a}} \right) \sin \omega t_0 \quad (10)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \int_{-\infty}^{\infty} (\text{sech} \sqrt{a} \tau \tanh \sqrt{a} \tau)^2 d\tau \\
 &= \frac{2}{3} \frac{1}{\sqrt{a}} \quad (11)
 \end{aligned}$$

对于积分 I_2 可以首先得出:

$$v^0(\tau) \operatorname{sign}[v^0(\tau) - \bar{v}] = \begin{cases} -v^0(\tau), & v_0 < \bar{v} \\ v^0(\tau), & v_0 > \bar{v} \end{cases} \quad (12)$$

再假设 τ_1, τ_2 为 $\bar{v} = v^0(t) = -a \sqrt{\frac{2}{b}} \operatorname{sech} \sqrt{a} \tau \tanh \sqrt{a} \tau$

的两个解, 又由:

$$\operatorname{sech}^2 x + \tanh^2 x = 1$$

可得:

$$\operatorname{sech} \sqrt{a} \tau_{1,2} = \sqrt{\frac{1}{2} \mp \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{b}{2a^2} \bar{v}^2}}, \quad \bar{v} \leq \frac{a}{\sqrt{2b}} \quad (13)$$

最后得出:

$$I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} (-\operatorname{sech} \sqrt{a} \tau \tanh \sqrt{a} \tau) \cdot$$

$$\begin{aligned} & \operatorname{sign} \left(-a \sqrt{\frac{2}{b}} \operatorname{sech} \sqrt{a} \tau \tanh \sqrt{a} \tau - \bar{v} \right) d\tau \\ &= - \int_{-\infty}^{\tau_1} -\operatorname{sech} \sqrt{a} \tau \tanh \sqrt{a} \tau d\tau + \\ & \int_{\tau_1}^{\tau_2} -\operatorname{sech} \sqrt{a} \tau \tanh \sqrt{a} \tau d\tau - \\ & \int_{\tau_2}^{\infty} -\operatorname{sech} \sqrt{a} \tau \tanh \sqrt{a} \tau d\tau \\ &= \frac{2}{\sqrt{a}} \left(\sqrt{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{b}{2a^2} \bar{v}^2}} - \right. \\ & \left. \sqrt{\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{b}{2a^2} \bar{v}^2}} \right), \quad \bar{v} \leq \frac{a}{\sqrt{2b}} \quad (14) \end{aligned}$$

由此可得, Melnikov 积分:

$$M(t_0) = a \sqrt{\frac{2}{b}} \gamma \pi \omega \operatorname{sech} \left(\frac{\pi \omega}{2\sqrt{a}} \right) \sin(\omega t_0) - \frac{4}{3} \frac{\alpha a^2}{b\sqrt{a}} - \begin{cases} 2\beta \sqrt{\frac{2a}{b}} \left(\sqrt{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{b}{2a^2} \bar{v}^2}} - \sqrt{\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{b}{2a^2} \bar{v}^2}} \right), & \bar{v} \leq \frac{a}{\sqrt{2b}} \\ 0, & \bar{v} > \frac{a}{\sqrt{2b}} \end{cases} \quad (15)$$

将式(15)中的 α, β, γ 分别用 $\varepsilon\alpha, \varepsilon\beta, \varepsilon\gamma$ 替换, 得到 $M(t_0)$ 具有简单零点的条件:

$$a \sqrt{\frac{2}{b}} \varepsilon\gamma \pi \omega \operatorname{sech} \left(\frac{\pi \omega}{2\sqrt{a}} \right) > \frac{4}{3} \frac{\varepsilon\alpha a^2}{b\sqrt{a}} + \begin{cases} 2\varepsilon\beta \sqrt{\frac{2a}{b}} \left(\sqrt{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{b}{2a^2} \bar{v}^2}} - \sqrt{\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{b}{2a^2} \bar{v}^2}} \right), & \bar{v} \leq \frac{a}{\sqrt{2b}} \\ 0, & \bar{v} > \frac{a}{\sqrt{2b}} \end{cases} \quad (16)$$

3 数值模拟

取定参数 $a=b=1, \varepsilon\alpha=\varepsilon\beta=0.3, \omega=1.2$, 图 2 给出了系统的 Melnikov 函数随外激励 $\varepsilon\gamma$ 与皮带轮速度 \bar{v} 变化的阈值曲线. 当系统参数位于阈值曲线上侧时, 系统的 Poincaré 映射存在 Smale 马蹄变换意义上的混沌. 取皮带轮速度 $\bar{v}=0.4$, 由式(16)可以计算出 $\varepsilon\gamma$ 的临界值 $\bar{\varepsilon\gamma}=0.6009$. 数值仿真得出系统随参数 $\varepsilon\gamma$ 变化的分岔图, 如图 3. 数值仿真进一步给出了 $\bar{v}=0.4$ 外激励取不同数值的相图, Poincaré 截面图及 Lyapunov 指数.

由分岔图, 相图可以看出, 随着外激励 $\varepsilon\gamma$ 的变化, 系统表现出复杂的动力学行为. 当 $\varepsilon\gamma=0.53$ 时, 位于 Melnikov 函数阈值曲线下侧, 系统处于周期一

运动. 随着 $\varepsilon\gamma$ 的不断增加, 系统进入了周期倍化阶段. 当 $\varepsilon\gamma=0.61, \varepsilon\gamma=0.625, \varepsilon\gamma=0.64$ 时, 均位于 Melnikov 函数阈值曲线上侧. 当 $\varepsilon\gamma=0.61$ 时, 系统

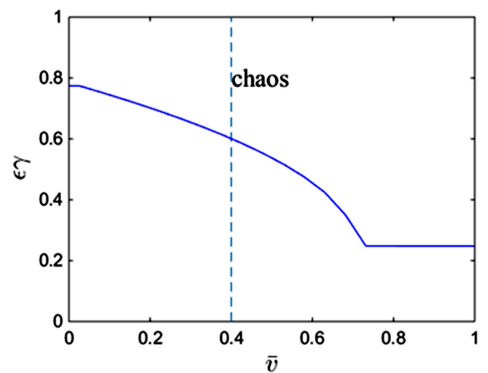


图 2 Melnikov 函数阈值曲线

Fig.2 Criteria curve of Melnikov function

处于周期二运动,见图4(b).当 $\varepsilon\gamma=0.625$ 时,系统做周期四运动,见图4(c).随着 $\varepsilon\gamma$ 进一步增大系统最终步入混沌运动状态,当 $\varepsilon\gamma=0.64$ 时,系统处于混沌运动状态,见图4(d).图5(b)表明 $\varepsilon\gamma=0.64$ 时,系统的最大 Lyapunov 指数大于零,证实了系统处于混沌状态,这符合 Melnikov 函数阈值曲线结果.数值结果与解析结果相符.

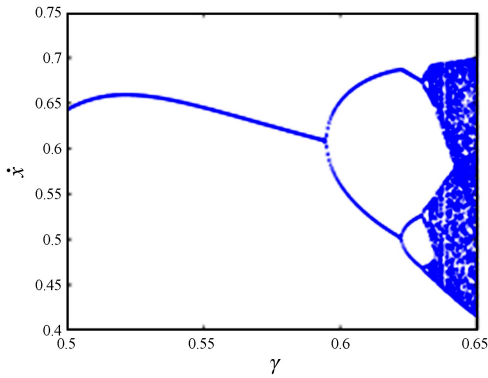


图3 分岔图

Fig.3 Bifurcation diagram

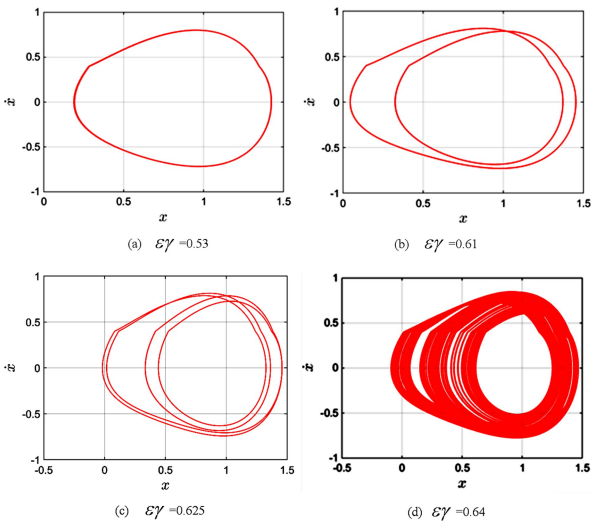


图4 $\varepsilon\gamma$ 变化时系统相图

Fig.4 System phase diagrams when $\varepsilon\gamma$ changes

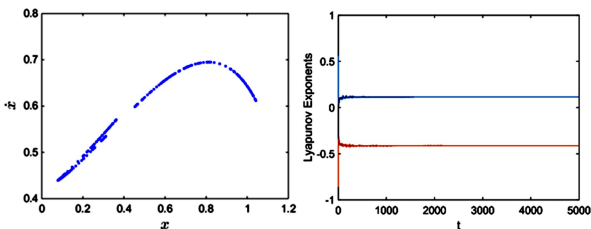


图5 $\varepsilon\gamma=0.64$ 系统 Poincaré 截面图(a), Lyapunov 指数(b)

Fig.5 (a) Poincaré cross section, and (b) Lyapunov exponent, when $\varepsilon\gamma=0.64$

4 结语

Melnikov 方法是判断系统是否具有马蹄型混沌的有效解析方法,本文运用 Melnikov 方法对一个单自由度干摩擦振子进行分析,得出了系统产生马蹄型混沌的条件.通过相图, Poincaré 截面图和分岔图等手段,证明了数值结果与通过 Melnikov 方法得到的解析结果相符.研究表明在一定参数条件下随着外激励的幅值逐渐增加,系统由周期运动经历周期倍化过程逐渐步入混沌运动.

参 考 文 献

- 1 Hetzler H, Schwarzer D, Seemann W. Analytical investigation of steady-state stability and Hopf-bifurcations occurring in sliding friction oscillators with application to low-frequency disc brake noise. *Communications in Nonlinear Science & Numerical Simulation*, 2007, 12(1): 83~99
- 2 Guo Y, Xie J H. Neimark-Sacker (N-S) bifurcation of oscillator with dry friction in 1:4 strong resonance. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2013, 34(1): 27~36
- 3 Vrande B L V D, Campen D H V, Kraker A D I. An approximate analysis of dry-friction-induced stick-slip vibrations by a smoothing procedure. *Nonlinear Dynamics*, 1999, 19(2): 159~171
- 4 刘曾荣. 混沌的微扰判据. 上海: 上海科技教育出版社, 1994 (Liu Z R. Perturbation criterion of chaos. Shanghai: Shanghai Scientific and Technological Education Publishing House, 1994 (in Chinese))
- 5 李继斌, 陈凤娟. 混沌, Melnikov 方法及新发展. 北京: 科学出版社, 2012: 125~131 (Li J B, Chen F J. Chaos, Melnikov method and new development. Beijing: Science Press, 2012: 125~131 (in Chinese))
- 6 Wu W, Mccue L. Application of the extended Melnikov's method for single-degree-of-freedom vessel roll motion. *Ocean Engineering*, 2008, 35(17): 1739~1746
- 7 韩宁, 曹庆杰. 一类典型柱面系统的非线性动力学分析. 全国非线性动力学和运动稳定性学术会议. 2013 (Han N, Cao Q J. Nonlinear dynamic analysis of a typical cylindrical system. In: National Conference on nonlinear dynamics and stability of motion. 2013 (in Chinese))
- 8 贺尚宏. Melnikov 方法在确定多参数机械动力系统混沌边缘中的应用[硕士学位论文]. 成都: 西南交通大

- 学, 2015 (He S H. On the application of Melnikov Method to determining edge of chaos of mechanical dynamic system with multi-parameters [Master Thesis]. Chengdu: Southwest Jiaotong University, 2015 (in Chinese))
- 9 Du Z, Zhang W. Melnikov method for homoclinic bifurcation in nonlinear impact oscillators. *Computers & Mathematics with Applications*, 2005, 50(3):445~458
- 10 Du Z, Li Y, Shen J, et al. Impact oscillators with homoclinic orbit tangent to the wall. *Physica D Nonlinear Phenomena*, 2013, 245(1):19~33
- 11 Luo A C J, Huang J. Discontinuous dynamics of a non-linear, self-excited, friction-induced, periodically forced oscillator. *Nonlinear Analysis Real World Applications*, 2012, 13(1):241~257
- 12 李群宏, 闫玉龙, 韦丽梅等. 非线性传送带系统的复杂分岔. *物理学报*, 2013, 62(12):120505~10 (Li Q H, Yan Y L, Wei L M, et al. Complex bifurcations in a nonlinear system of moving belt. *Acta Physica Sinica*, 2013, 62(12):120505~10 (in Chinese))
- 13 Olsson H, Åström K J, Wit C C D, et al. Friction models and friction compensation. *European Journal of Control*, 1998, 4(3):5517~5522

CHAOS ANALYSIS OF A SINGLE-DEGREE-OF-FREEDOM DRY FRICTION OSCILLATOR BASED ON MELNIKOV METHOD*

Qin Lang[†] Xie Jianhua

(School of Mechanics and Engineering, Southwest Jiaotong University, Chengdu 610031, China)

Abstract A single-degree-of-freedom dry friction oscillator with small damping driven by periodic excitation is investigated in this paper. The Melnikov method is used to obtain the parameter region of the horseshoe type chaos. By means of numerical method, the phase diagram and Poincare section diagram of the system with different parameters are given. The Lyapunov exponent of the system is also calculated. Numerical results verify the analytical results, indicating that the system undergoes periodic doubling and turns into chaos.

Key words dry friction, Melnikov method, horseshoe type chaos, periodic doubling