

# 一类 Lorenz 型超混沌系统的 Zero-Zero-Hopf 分岔 及共存吸引子研究\*

陈玉明<sup>1†</sup> 陈春涛<sup>2</sup>

(1. 广东技术师范学院数学与系统科学学院, 广州 510665)

(2. 广西大学数学与信息科学学院, 南宁 530004)

**摘要** 针对一类四维 Lorenz 型超混沌系统, 首先, 在局部动力学方面, 基于平均化理论方法, 研究了该系统在原点平衡点处发生的 Zero-Zero-Hopf 分岔行为, 得到了系统在原点发生 Zero-Zero-Hopf 分岔的参数条件, 证明了两条周期轨的存在性, 并且给出了它们的稳定性条件. 除此之外, 借助数值模拟, 发现该系统在某些特定参数下存在不同吸引子之间的共存现象, 比如超混沌吸引子与周期吸引子共存, 不同周期吸引子之间的共存.

**关键词** Lorenz 型系统, 超混沌, Zero-Zero-Hopf 分岔, 吸引子共存

DOI: 10.6052/1672-6553-2017-064

## 引言

在 1963 年, Lorenz 提出了首个混沌数理模型, 即 Lorenz 系统<sup>[1]</sup>, 这个系统起源于大气模型之中. 自此以后, 来至不同领域的数学家, 物理学家及工程师们对混沌的产生, 混沌系统的特征, 分岔及通向混沌的路径等方面进行了深入的研究<sup>[2-5]</sup>.

超混沌, 作为另一种复杂动力学行为, 它比混沌行为具有更强的复杂性, 并且在非传统工业及技术领域具有更强的应用潜力. 由于在自治常微分方程系统中要产生超混沌行为, 必须要求系统维数至少为四维, 因此, 对四维超混沌系统的研究, 尤其是对四维 Lorenz 型超混沌系统的研究<sup>[6,7]</sup>, 将显得尤为重要.

在三维混沌系统的研究中, 有很多研究者研究了系统平衡点的 Zero-Hopf 分岔现象, 例如 Guckenheimer<sup>[8]</sup>, Han<sup>[9]</sup>, Kuznetsov<sup>[10]</sup> 及 Llibre<sup>[11]</sup> 等等. 从这些文献的研究可以看出, 在一定的条件下, 从局部的 Zero-Hopf 平衡点处可以分岔出一些复杂的不变集, 也就是说, 在某些情况下, Zero-Hopf 平衡点的出现便意味着“混沌”的产生. 在四

维超混沌系统的研究中, 最近 Cid-Montiel 及 Llibre 等研究了一类超混沌 Lorenz 系统的 Zero-Hopf 分岔行为<sup>[12]</sup>, 这是在中心流形维数大于等于 4 的系统中关于 Zero-Hopf 平衡点及分岔的首个工作. 即便到现在, 这类研究工作在四维及四维以上的系统中依然属于非常罕见.

混沌及超混沌系统的复杂性主要来源于混沌及超混沌吸引子的存在. 一般情形下, 相空间中只存在一个稳定的吸引子, 除了其它吸引子(都为不稳定)本身外, 从相空间中其它点出发的轨线都将趋向于那唯一的一个稳定的吸引子. 然而一些研究者最近发现了很多特殊的系统<sup>[14,15]</sup>, 在这些系统中存在着各种不同稳定吸引子的共存现象, 这使得系统的相空间变得异常复杂, 尤其是这些不同稳定吸引子的吸引盆的边界.

通过对经典的 Lorenz 系统添加反馈控制, 本文得到如下的四维 Lorenz 型系统:

$$\begin{cases} \dot{x} = a(y-x) \\ \dot{y} = cx + dy - xz + w \\ \dot{z} = -bz + xy \\ \dot{w} = rw + exz \end{cases} \quad (1)$$

2016-11-01 收到第 1 稿, 2017-06-03 收到修改稿.

\* 国家自然科学基金(11626068, 11701104), 广东省自然科学基金(2015A030310424), 广东省普通高校特色创新项目(2016KTSCX076).

† 通讯作者 E-mail: blkhpz@126.com

其中参数满足  $a > 0, b > 0, cder \neq 0$ . 当系统参数选取  $a = 27.7, b = 3.8, c = 29.2, d = -1.5, e = -1.6$  及  $r = 1.4$  时, 系统(1)具有超混沌吸引子, 该吸引子所对应的 Lyapunov 指数为:

$$\lambda_{LE_1} = 0.4157, \lambda_{LE_2} = 0.2479, \lambda_{LE_3} = -0.0002, \\ \lambda_{LE_4} = -32.2601.$$

该超混沌吸引子在  $x-y-z$  空间的投影相图如图 1 所示.

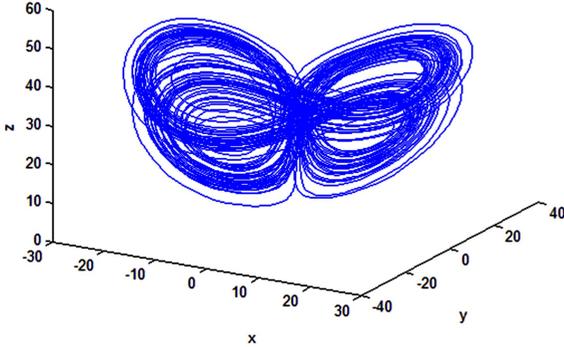


图 1 系统(1)的超混沌吸引子在  $x-y-z$  空间的投影相图  
 $a = 27.7, b = 3.8, c = 29.2, d = -1.5, e = -1.6$  及  $r = 1.4$

Fig.1 Phase portrait of system (1) in the projection space of  $x-y-z$ , where  $a = 27.7, b = 3.8, c = 29.2, d = -1.5, e = -1.6$  and  $r = 1.4$

当系统参数满足  $br(c+d)(e+r) \leq 0$  时, 系统(1)只具有唯一平衡点  $E_0(0, 0, 0, 0)$ . 而当  $br(c+d)(e+r) > 0$  时, 系统(1)除了具有原点平衡点  $E_0$  之外, 还将具有另外两个关于  $z$  轴对称的非原点平衡点.

$$E_{\pm} = \left( x_{\pm}, x_{\pm}, \frac{x_{\pm}^2}{b}, -\frac{e(c+d)}{e+r} x_{\pm} \right)$$

其中  $x_{\pm} = \pm \sqrt{\frac{br(c+d)}{e+r}}$ . 另外, 当系统参数满足  $c+d = 0$  及  $r+e = 0$  时, 系统(1)则存在一条平衡点直线, 即:

$$\left\{ (x, y, z, w) \mid y = x, z = \frac{x^2}{b}, w = \frac{x^3}{b} \right\}$$

针对四维 Lorenz 型超混沌系统(1), 本文将研究该系统原点平衡点  $E_0$  处发生的 Zero-Zero-Hopf 分岔行为(所谓 Zero-Zer-Hopf 平衡点, 是指具有两个零特征值以及一对纯虚特征值的孤立平衡点), 以及在某些特定参数下, 研究系统不同吸引子之间的共存现象.

## 1 Zero-Zero-Hopf 分岔分析

考虑如下形式的微分方程系统:

$$\dot{X} = F_0(t, X) + \varepsilon F_1(t, X) + \varepsilon^2 F_2(t, X, \varepsilon) \quad (2)$$

其中  $\varepsilon \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$ ,  $\varepsilon_0$  是充分小的正数, 函数  $F_0, F_1: R \times \Omega \rightarrow R^n$  以及  $F_2: R \times \Omega \times (-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \rightarrow R^n$  都是  $C^2$  类函数, 并且关于它们的第一个变量  $t$  都是周期  $T$  函数, 其中  $\Omega$  是  $R^n$  中的一个子集. 在平均化理论的帮助下, 我们研究系统(1)中周期解的分岔问题, 其中主要的假设是未扰动系统:

$$\dot{X} = F_0(t, X) \quad (3)$$

具有一个周期解流形.

假设  $X(t, X_0)$  是系统(3)满足条件  $X(0, X_0) = X_0 = X(T, X_0)$  的周期解, 于是系统(3)沿着周期解  $X(t, X_0)$  的线性化系统可以写成:

$$\dot{Y} = D_X F_0(t, X(t, X_0)) Y \quad (4)$$

并且记  $M_{X_0}(t)$  为线性微分方程(4)的基解矩阵.

假设存在开集  $V$  满足  $Cl(V) \subset \Omega$ , 使得对于任意  $X_0 \in Cl(V)$ , 都有  $X(t, X_0)$  为系统(3)中的一个周期为  $T$  的周期解. 其中集合  $Cl(V)$  被称为系统(3)的同步集, 这个集合完全是由周期解所构成. 包含在同步集  $Cl(V)$  中的周期解的分岔问题, 将由如下定理给出.

**定理 1:** (同步集的扰动) 假设存在一个有界开集  $V$  满足  $Cl(V) \subset \Omega$ , 使得对任意  $X_0 \in Cl(V)$ , 都有解  $X(t, X_0)$  为  $T$  周期解. 考虑函数  $\tilde{F}: Cl(V) \rightarrow R^n$

$$\tilde{F}(X_0) = \frac{1}{T} \int_0^T M_{X_0}^{-1}(t, X_0) F_1(t, X(t, X_0)) dt,$$

于是有如下结论成立:

(1) 如果存在  $X^*$  使得  $\tilde{F}(X^*) = 0$  及  $\|\partial \tilde{F} / \partial X_0\|_{X_0=X^*} \neq 0$  成立, 则存在一个系统(2)的  $T$  周期解  $X(t, \varepsilon)$ , 使得当  $\varepsilon \rightarrow 0$  时, 有  $X(0, \varepsilon) \rightarrow X^*$ .

(2) 周期解  $X(t, \varepsilon)$  的稳定性类型由雅可比矩阵  $(\partial \tilde{F} / \partial X_0)|_{X_0=X^*}$  的特征值所决定.

**定理 2:** 当满足条件  $d = a, b = 0, r = 0$  及  $a^2 + ac < 0$  时, 四维 Lorenz 型超混沌系统(1)的原点平衡点  $E_0$  为 Zero-Zero-Hopf 平衡点.

**证明:** 容易计算得平衡点  $E_0$  处的特征方程为:

$$P(\lambda) = (\lambda + b)(\lambda - r)(\lambda^2 + a\lambda - d\lambda - ac - ad) \quad (5)$$

当满足条件  $d = a, b = 0, r = 0$  及  $a^2 + ac < 0$  时, 方程(5)的根为  $0, 0, \pm i\sqrt{-a(a+c)}$ .

**定理 3:** 令  $D = c(a-d)^2 e^2 - 2(a+c)(a-d)e(a+e)r - (a+c)(a(a+c) - e^2)r^2 \neq 0$ , 则四维 Lorenz 型超混沌系统(1)在原点平衡点  $E_0$  处存在 Zero-Zero-Hopf

分岔. 在条件  $D_1 > 0, D_2 > 0, D_3 > 0$  及  $D_4 > 0$  下, 当原点经历 Zero-Zero-Hopf 分岔时, 在原点附近将会分岔出两条稳定的周期轨, 其中  $D_1, D_2, D_3$  及  $D_4$  如公式 (10) 所示.

**证明:** 令  $\varepsilon$  为充分小的正参数,  $b_1, d_1$  及  $r_1$  为非零实数. 在变换  $(b, d, r) \rightarrow (\varepsilon b_1, a + \varepsilon d_1, \varepsilon r_1)$  的作用下, 四维 Lorenz 型超混沌系统 (1) 将变形为:

$$\begin{cases} \dot{x} = a(y-x) \\ \dot{y} = cx + ay + w + \varepsilon d_1 y - xz \\ \dot{z} = -\varepsilon b_1 z + xy \\ \dot{w} = \varepsilon r_1 w + exz \end{cases} \quad (6)$$

进一步对变量进行重新标度, 令  $(x, y, z, w)^T = (\varepsilon u, \varepsilon v, \varepsilon p, \varepsilon q)^T$ , 并且将向量  $(u, v, p, q)^T$  重新记为向量  $X = (x, y, z, w)^T$ , 于是系统 (6) 可变为:

$$\dot{X} = F_0(t, X) + \varepsilon F_1(t, X) = \begin{pmatrix} a(y-x) \\ cx+ay+w \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix} 0 \\ d_1 y - xz \\ -b_1 z + xy \\ r_1 w + exz \end{pmatrix} \quad (7)$$

$$M_{X_0}(t) = \begin{pmatrix} \cos(mt) - \frac{a \sin(mt)}{m} & \frac{a \sin(mt)}{m} & 0 & \frac{\cos(mt) - 1}{a+c} \\ \frac{c \sin(mt)}{m} & \cos(mt) + \frac{a \sin(mt)}{m} & 0 & \frac{-a + a \cos(mt) - m \sin(mt)}{a(a+c)} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

以及它的逆矩阵为:

$$M_{X_0}^{-1}(t) = \begin{pmatrix} \cos(mt) + \frac{a \sin(mt)}{m} & -\frac{a \sin(mt)}{m} & 0 & \frac{\cos(mt) - 1}{a+c} \\ -\frac{c \sin(mt)}{m} & \cos(mt) - \frac{a \sin(mt)}{m} & 0 & \frac{-a + a \cos(mt) + m \sin(mt)}{a(a+c)} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

基于上述矩阵, 计算定理 1 中的积分, 可得:

$$\begin{aligned} \tilde{F}(X_0) &= \frac{1}{T} \int_0^T M_{X_0}^{-1}(t, X_0) F_1(t, X(t, X_0)) dt \\ &= (\tilde{F}_1(X_0), \tilde{F}_2(X_0), \tilde{F}_3(X_0), \tilde{F}_4(X_0)) \end{aligned}$$

其中:

$$\begin{aligned} \tilde{F}_1(X_0) &= \frac{1}{2(a+c)^2} [ (e(3w_0 + (a+c)x_0) + \\ & a(a+c)(x_0 - y_0))z_0 + (a+c) \cdot \\ & (w_0 + cx_0 + ay_0)d_1 - 2(a+c)w_0r_1 ], \end{aligned}$$

在定理 1 所描述的平均化理论的帮助下, 系统 (7) 的相关动力学行为将可以被研究. 考虑如下未扰动系统的初值问题:

$$\dot{X} = F_0(t, X), X_0 = (x_0, y_0, z_0, w_0) \quad (8)$$

未扰动系统 (8) 的解为  $X(t, X_0) = (x(t), y(t), z(t), w(t))$ , 其中:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{w_0(\cos(mt) - 1)}{a+c} + \frac{ay_0 \sin(mt)}{m} + \\ & x_0 \left( \cos(mt) - \frac{a \sin(mt)}{m} \right), \\ y(t) &= \frac{cx_0 \sin(mt)}{m} + y_0 \left( \cos(mt) + \frac{a \sin(mt)}{m} \right) - \\ & \frac{w_0(a - a \cos(mt) + m \sin(mt))}{a(a+c)}, \end{aligned}$$

$$z(t) = z_0, w(t) = w_0, m = \sqrt{-a(a+c)}.$$

值得注意的是, 当  $X_0 \neq 0$  时, 系统 (8) 的解  $X(t, X_0)$  都是周期解, 并且还具有相同的周期  $T = 2\pi/m$ . 沿着系统 (8) 的一个周期解  $X(t, X_0)$ , 可计算线性化系统  $\dot{Y} = D_X F_0(t, X(t, X_0)) Y$  的基解矩阵为:

$$\begin{aligned} \tilde{F}_2(X_0) &= \frac{1}{2(a+c)^2} [ -(cw_0 - 3ew_0 + c^2x_0 + a^2y_0 - \\ & cey_0 + a(w_0 - ey_0 + c(x_0 + y_0)))z_0 + \\ & (a+c)(2w_0 + 2ay_0 + c(x_0 + y_0))d_1 - \\ & 2(a+c)w_0r_1 ], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{F}_3(X_0) &= \frac{1}{2(a+c)^2} [ 3w_0^2 + 2(a+c)w_0x_0 + acx_0^2 + \\ & c^2x_0^2 + 2a^2x_0y_0 + 2acx_0y_0 - a^2y_0^2 - acy_0^2 - \\ & 2(a+c)^2z_0b_1 ], \end{aligned}$$

$$\tilde{F}_4(X_0) = \frac{w_0(-ez_0 + (a+c)r_1)}{a+c}.$$

求解非线性方程  $\tilde{F}(X_0) = 0$ , 可得如下形式的三个解:

$$S_0 = (0, 0, 0, 0),$$

$$S_{\pm} = \left( \pm \sqrt{\frac{(a+c)b_1r_1}{e}}, \pm \sqrt{\frac{(a+c)b_1r_1}{e}}, \frac{(a+c)r_1}{e}, \mp (a+c) \sqrt{\frac{(a+c)b_1r_1}{e}} \right).$$

其中解  $S_0$  对应于原点平衡点  $E_0$ . 针对另外两个解  $S_{\pm}$ , 有如下关系式成立:

$$\tilde{F}(S_+) = \tilde{F}(S_-) = 0,$$

$$\det((\partial\tilde{F}/\partial X_0)(S_+)) = \det((\partial\tilde{F}/\partial X_0)(S_-))$$

$$= \frac{brD}{2(a+c)e^2\varepsilon^4} \neq 0.$$

$$c_3 = -\frac{b(-c(a-d)^2e^2 + 2(a+c)(a-d)(a-3e)er + (a+c)(a(a+c)+7e^2)r^2)}{4(a+c)e^2\varepsilon^3},$$

$$c_4 = \frac{br(c(a-d)^2e^2 - 2(a+c)(a-d)e(a+e)r - (a+c)(a(a+c)-e^2)r^2)}{2(a+c)e^2\varepsilon^4}.$$

令:

$$D_1 = c_1, D_2 = \begin{vmatrix} c_1 & 1 \\ c_3 & c_2 \end{vmatrix}, D_3 = \begin{vmatrix} c_1 & 1 & 0 \\ c_3 & c_2 & c_1 \\ 0 & c_4 & c_3 \end{vmatrix},$$

$$D_4 = c_4 D_3 \quad (10)$$

根据 Routh-Hurwitz 准则, 在条件  $D_1 > 0, D_2 > 0, D_3 > 0$  及  $D_4 > 0$  下, 特征多项式(9)的所有根都具有负实部, 也就是说, 在原点  $E_0$  处由 Zero-Zero-Hopf 分岔所产生的两个周期解  $X_+(0, \varepsilon) \rightarrow S_+$  及  $X_-(0, \varepsilon) \rightarrow S_-$  都是稳定周期解.

## 2 共存吸引子研究

选取恰当的系统参数, 通过详细的数值分析, 可发现系统(1)存在多种吸引子共存的现象, 即同组参数条件下, 系统(1)满足不同初始条件的解有可能呈现出完全不同的动力学行为. 具体可包括超混沌吸引子与周期吸引子的共存, 不同周期吸引子之间的共存等.

固定参数  $a=23.96, b=4.39, c=26.82, d=-1.38, e=-0.99$  及  $r=1.43$ , 对初始条件(61, 68, 58, -40), 系统(1)的解将会收敛于一个周期解, 其在  $y-z-w$  空间的投影如图 2(a) 所示, 该周期吸引子所对应

因此, 根据定理 1, 存在系统(7)的两个周期为  $2\pi/m$  的周期解  $X_+(t, \varepsilon)$  及  $X_-(t, \varepsilon)$ , 使得当  $\varepsilon \rightarrow 0$  时有  $X_+(0, \varepsilon) \rightarrow S_+$  及  $X_-(0, \varepsilon) \rightarrow S_-$  成立. 考虑到系统(6)与系统(7)的关系, 系统(7)的周期解  $X_{\pm}(t, \varepsilon)$  分别对应着系统(6)的周期解  $\varepsilon X_{\pm}(t, \varepsilon)$ .

最后, 为了判断这两个周期解的稳定性类型, 需要计算雅可比矩阵  $(\partial\tilde{F}/\partial X_0)(S_{\pm})$  的特征值. 容易写出雅可比矩阵  $(\partial\tilde{F}/\partial X_0)(S_{\pm})$  的特征多项式为

$$P(S_{\pm}) = \lambda^4 + c_1\lambda^3 + c_2\lambda^2 + c_3\lambda + c_4 \quad (9)$$

其中:

$$c_1 = \frac{a+b-d-r}{\varepsilon},$$

$$c_2 = \frac{1}{4(a+c)e^2\varepsilon^2} [(a-d)(4ab+ac+4bc-cd)e^2 - 2(a+c)e(a^2 - (2b+d)e + a(e-d))r - (a+c)(a(a+c)-e^2)r^2],$$

的 Lyapunov 指数为:  $\lambda_{LE_1} = 0.0000, \lambda_{LE_2} = -0.0015, \lambda_{LE_3} = -0.0015, \lambda_{LE_4} = -28.2961$ .

在同一组参数下, 对于初始条件(58, 55, 33, -52), 系统(1)的解则收敛于一个超混沌吸引子, 在  $y-z-w$  空间的投影相图如图 2(b) 所示, 该超混沌吸引子所对应的 Lyapunov 指数为:  $\lambda_{LE_1} = 0.2521, \lambda_{LE_2} = 0.0708, \lambda_{LE_3} = 0.0000, \lambda_{LE_4} = -28.6218$ .

因此, 当参数满足  $a=23.96, b=4.39, c=26.82, d=-1.38, e=-0.99$  及  $r=1.43$  时, 系统(1)的相空间中存在着超混沌吸引子与周期吸引子的共存, 其在  $y-z-w$  空间的投影如图 2(c) 所示.

类似的, 当固定参数  $a=28.67, b=3.52, c=25.16, d=-1.86, e=-1.15$  及  $r=1.15$  时, 也存在吸引子的共存现象. 对初始条件(73, -97, 3, -73), 系统(1)的解将会收敛于一个周期解, 其在  $y-z-w$  空间的投影如图 3(a) 所示, 该周期吸引子所对应的 Lyapunov 指数为:  $\lambda_{LE_1} = 0.0000, \lambda_{LE_2} = -0.0817, \lambda_{LE_3} = -0.4814, \lambda_{LE_4} = -32.3287$ .

在同一组参数下, 对于初始条件(-57, -82, 8, 80), 系统(1)的解则收敛于另一个周期吸引子, 在  $y-z-w$  空间的投影相图如图 3(b) 所示, 该周期吸引子所对应的 Lyapunov 指数为:  $\lambda_{LE_1} = -0.0003, \lambda_{LE_2} = -0.0535, \lambda_{LE_3} = -0.0535, \lambda_{LE_4} = -32.7843$ .

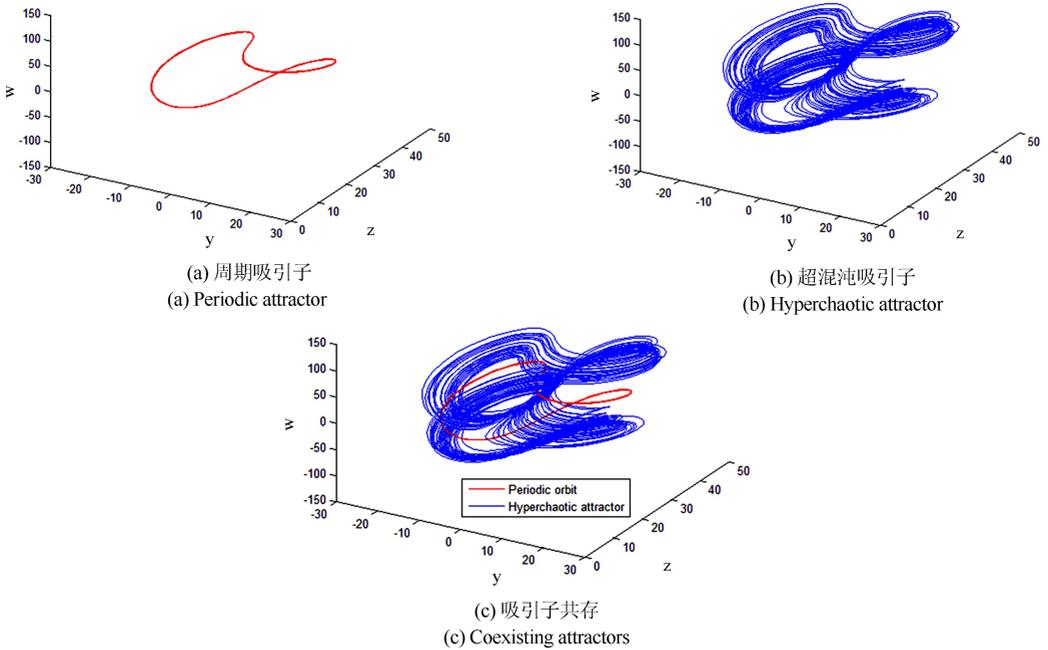


图 2 系统(1)共存吸引子的  $y-z-w$  空间投影,  $a = 23.96, b = 4.39, c = 26.82, d = -1.38, e = -0.99, r = 1.43$

Fig.2 Projections of coexisting attractors in  $y-z-w$  space for system(1), where  $a = 23.96, b = 4.39, c = 26.82, d = -1.38, e = -0.99, r = 1.43$

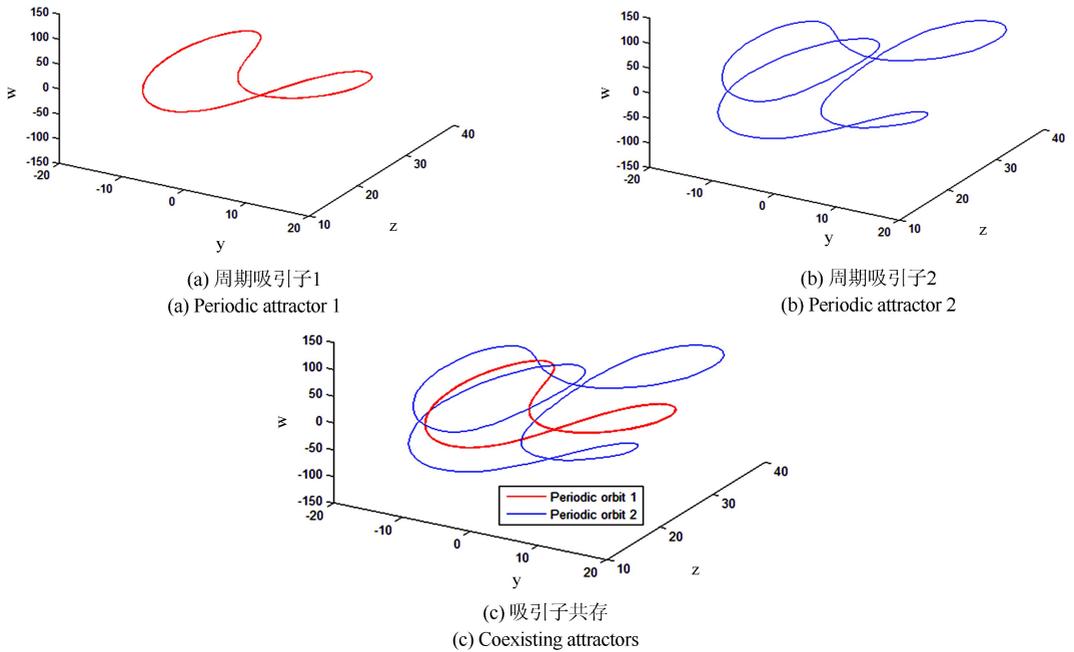


图 3 系统(1)共存吸引子的  $y-z-w$  空间投影,  $a = 28.67, b = 3.52, c = 25.16, d = -1.86, e = -1.15, r = 1.15$

Fig.3 Projections of coexisting attractors in  $y-z-w$  space for system(1), where  $a = 28.67, b = 3.52, c = 25.16, d = -1.86, e = -1.15, r = 1.15$

因此, 当参数满足  $a = 28.67, b = 3.52, c = 25.16, d = -1.86, e = -1.15$  及  $r = 1.15$  时, 系统(1)的相空间中则存在着两个不同的周期吸引子的共存, 其在  $y-z-w$  空间的投影如图 3(c) 所示.

### 3 结论

通过对经典的 Lorenz 混沌系统施加反馈控制

方法, 本文得到了一类四维 Lorenz 型超混沌系统, 并从局部和全局两个方面对该新超混沌系统的动力学行为进行了研究. 首先, 在局部动力学方面, 基于平均化理论方法, 研究了该系统在原点平衡点处发生的 Zero-Zero-Hopf 分岔行为, 得到了系统在原点发生 Zero-Zero-Hopf 分岔的参数条件, 证明了两条周期轨的存在性, 并且给出了它们的稳定

性条件. 其次, 在全局动力学方面, 借助数值模拟方法, 发现该系统在某些特定参数条件下存在着除了平衡点以外的不同吸引子之间的共存现象, 比如超混沌吸引子与周期吸引子共存, 不同周期吸引子之间的共存, 等等.

## 参 考 文 献

- 1 Lorenz E N. Deterministic non-periodic flow. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 1963,20:130~141
- 2 Hirsh M W, Smale S, Devaney R L. *Differential equations, dynamical systems, and an introduction to chaos*. New York:Elsevier Academic Press, 2007
- 3 Shilnikov L P, Shilnikov A L, Turaev D V, et al. *Methods of qualitative theory in nonlinear dynamics*. Singapore: World Scientific, 2001
- 4 Wiggins S. *Introduction to applied nonlinear dynamical systems and chaos*(2nd edition). New York:Springer-Verlag, 1990
- 5 Hastings S, Troy W. A shooting approach to chaos in the Lorenz equations. *Journal of differential Equations*, 1996, 127:41~53
- 6 Stenflo L. Generalized Lorenz equations for acoustic-gravity waves in the atmosphere. *Physica Scripta*, 1996,53:83~84
- 7 Chen Y, Yang Q. Dynamics of a hyperchaotic Lorenz-type system. *Nonlinear Dynamics*, 2014,77:569~581
- 8 Guckenheimer J. On a codimension two bifurcation. In: *Lecture Notes in Math*, 1980,898:99~142
- 9 Han M. Existence of periodic orbits and invariant tori in codimension two bifurcations of three dimensional systems. *Journal of Systems Science and Mathematical Sciences*, 1998,18:403~409
- 10 Kuznetsov Y A. *Elements of applied bifurcation theory* (3rd edition). Berlin:Spring, 2004
- 11 Llibre J, Chavala E P. Zero-Hopf bifurcation for a class of Lorenz-type systems. *Discrete & Continuous Dynamical Systems-Series B*, 2014,19:1731~1736
- 12 Montiel L C, Llibre J, Stoica C. Zero-Hopf bifurcation in a hyperchaotic Lorenz system. *Nonlinear Dynamics*, 2014, 75:561~566
- 13 周艳, 张伟. 复合材料层合板的双Hopf分叉分析. *动力学与控制学报*, 2015,13(3):161~164 (Zhou Y, Zhang W. Double Hopf bifurcation of composite laminated thin plate. *Journal of Dynamics and Control*, 2015,13(3):161~164(In Chinese))
- 14 Chen Y, Yang Q. A new Lorenz-type hyperchaotic system with a curve of equilibria. *Mathematics and Computers in Simulation*, 2015,112:40~55
- 15 Wei Z. Dynamical behaviors of a chaotic system with no equilibria. *Physics Letters A*, 2011,376:102~108

# RESEARCH ON ZERO-ZERO-HOPF BIFURCATION AND COEXISTING ATTRACTORS OF A LORENZ-TYPE HYPERCHAOTIC SYSTEM\*

Chen Yuming<sup>1†</sup> Chen Chuntao<sup>2</sup>

(1.School of Mathematics and Systems Science,Guangdong Polytechnic Normal University, Guangzhou 510665, China)

(2.College of Mathematics and Information Science,Guangxi University, Nanning 530004, China)

**Abstract** This paper examines the behavior of a 4D Lorenz-type hyperchaotic system. First, on the aspect of local dynamics, based on the averaging theory, the Zero-Zero-Hopf bifurcation at the origin of this system is investigated. The parameter conditions of Zero-Zero-Hopf bifurcation are obtained, the existence of two periodic orbits is proved, and their stability is given. Furthermore, on the aspect of global dynamics, by choosing proper parameters and, with the help of numerical simulation, several alternative coexisting attractors of this new hyperchaotic system can be observed, such as hyperchaotic and periodic attractors, different periodic attractors, et al.

**Key words** Lorenz-type system, hyperchaos, Zero-Zero-Hopf bifurcation, coexisting attractors

Received 1 November 2016, revised 3 June 2017.

\* The project supported by the National Natural Science Foundation of China(11626068,11701104), the Natural Science Foundation of Guangdong Province, China(2015A030310424), the Higher School Characteristic Innovation Fund of Guangdong Province, China(2016KTSCX076).

† Corresponding author E-mail: blkhpz@126.com