

一维非线性系统 FPK 方程的 TVD Runge-Kutta WENO 型差分解

王文杰[†] 封建湖

(长安大学理学院数学系, 西安 710064)

摘要 首先研究了非线性随机动力系统所对应的 Fokker-Planck-Kolmogorov (FPK) 方程. 其次, 讨论了微分方程的三阶 TVD Runge-Kutta 关于时间的离散差分格式以及关于空间离散的五阶 Weighted Essentially non-Oscillatory (WENO) 差分格式, 并将其相结合, 得到 FPK 方程的 TVD Runge-Kutta WENO 差分解, 并与 FPK 方程的精确解进行了比较. 数值结果表明, 该方法具有良好的稳定性, 且可以解决其他方法在概率密度峰值处偏小, 而在尾部处较大等缺点.

关键词 非线性系统, FPK 方程, 有限差分法, TVD 龙格-库塔格式, ENO 格式, WENO 格式

DOI: 10.6052/1672-6553-2017-069

引言

FPK 方程于 20 世纪初由 Fokker 与 Planck 首先提出, 并应用于研究量子物理问题. 20 世纪 30 年代初 Kolmogorov 将它一般化与抽象化. 不久, Andronov 等将它应用于研究一般动态系统. 50 年代 Stratonovich 将它应用于研究电子工程问题. 50 年代末 Chuang 与 Kazda 将它应用于研究非线性控制系统. 60 年代初 Ariaratnam、Lyon、Smith、Caughey 与 Dienes、Crandall 等将它应用于研究非线性随机振动问题.

利用转移概率密度求解系统的各种响应统计量, 可对该系统的响应和可靠性等做定性分析. 但是, 目前只对一些特殊的非线性随机动力系统, 才能得到其 FPK 方程的精确解^[1-3]. 基于此, 许多学者致力于 FPK 方程数值解法的研究, 其中有代表性的主要有: 有限元法, 有限差分法, 路径积分法, 等价线性化方法, 高斯闭合法, 摄动法, Gram-Charlier 展开法, 等价非线性系统法, 随机平均法等.

但这些方法各有其局限性, 例如: 有限元法一般都很大, 而且计算得到的尾部概率密度不太准确. 等价线性化方法和高斯闭合法对强非线性^[4-8]

或具有随机参激的系统就不适用, 因为此时系统响应的稳态概率密度往往是非高斯型的. 摄动法只适用于弱非线性系统. Gram-Charlier 展开法可能导致概率密度为负值的情形. 等价非线性系统法要求两个非线性系统性质很接近. 随机平均法只适用于弱阻尼和弱激励的情形.

而加权本质无振荡 WENO 方法, 是近年来广泛流行的一种高分辨率数值方法, 用于解决以对流为主的对流扩散方程, 特别是双曲守恒律方程. WENO 方法是在 ENO 方法的基础上采用加权思想构造的, 用于求解包含激波、稀疏波以及接触间断等复杂结构的流体问题. WENO 方法性能更稳定, 对定常问题收敛性更好, 它能够保证在解的光滑区精度更高, 在解的间断去保持陡峭的间断过度和本质无振荡性质. WENO 格式最初是在 1994 年由 Liu, Osher 和 Chan 提出, 不同于 ENO 格式单一的模板选取, 使用所有候选模板的凸组合, 构造了一个三阶有限体积 WENO 格式, 系统地讨论了 WENO 方法的构造过程和理论分析. 随后在 1996 年 Jiang 和 Shu 在多维空间上给出了一个可以构造任意精度的有限差分 WENO^[9] 格式的框架, 并在其中设计了一个五阶精度的 WENO 格式, 提出了光滑

因子和非线性项构造的基本框架.至今,五阶精度的 WENO 格式是使用最广泛的,用来求解双曲守恒律方程 WENO 重构过程的标准格式.

本文针对上述问题,以及结合三阶 TVD Runge-Kutta 方法,提出了 FPK 方程的一种新的 TVD Runge-Kutta Weno 型差分方法,可以较好地解决其他方法所具有的不足,得到比较准确的概率密度函数.

1 具有随机外激非线性动力系统地 FPK 方程

对于非线性随机动力系统,其对应的 FPK 方程一般具有如下的形式:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x_i}(a_i p) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}(b_{ij} p) \quad (1)$$

FPK 方程(1)是一个抛物型变系数偏微分方程,其描述了扩散过程的转移概率密度 $p(x, t | x_0, t_0)$ 的进化或流动,其中 a_i, b_{ij} 为对应的漂移和扩散系数.

当 a_i, b_{ij} 均不显含时间 t 时,则 FPK 方程(1)可转化为:

$$0 = -\frac{\partial}{\partial x_i}(a_i p) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}(b_{ij} p) \quad (2)$$

FPK 方程(2)是一个椭圆型变系数偏微分方程,常称为简化或平稳 FPK 方程.其解将是平稳概率密度 $p(x)$.要唯一确定 FPK 方程(1)的解,还需要初始条件和边界条件.

在本文中,采用初始条件:

$$p(x, t | x_0, t_0) = \delta(x - x_0), t = t_0 \quad (3)$$

其表示在 $t = t_0$ 时刻,系统以概率 1 处于初始状态 x_0 .

无穷边界条件:

$$\lim_{x_j \rightarrow \pm\infty} p(x, t | x_0, t_0) = 0 \quad (4)$$

或者,它必须至少以 $|x_j|^{-\alpha} (\alpha > 1)$ 趋近于零.

在随机振动理论中,FPK 方程(1)与(2)常用来预测非线性随机动力系统的响应.因而,FPK 方程解的精确程度对于可靠性分析起着至关重要的作用.

2 FPK 方程的有限差分法

2.1 TVD Runge-Kutta 格式

设 $\frac{du}{dt} - f(u)_x = 0$ 为一般形式的双曲型偏微分方程,其关于空间的半离散格式为:

$$\frac{du}{dt} = L(u) \quad (5)$$

其中 $L(u)$ 为 $-f(u)_x$ 的逼近.对于半离散格式方程(5),标准 Runge-Kutta 时间离散是基于线性稳定性条件来实现格式的稳定性,此时 CFL 可以取较大的值.但是对于非线性方程, CFL 必须很小才能保证格式的稳定性,由于高阶空间离散和低阶 Runge-Kutta 时间离散相互耦合, CFL 必须大大低于线性稳定性要求,才会保证整个离散格式具有高阶精度和无振荡.本文中采用了具有 TVD 性质的三阶 Runge-Kutta 时间离散格式^[7]:

$$\begin{aligned} u^{(1)} &= u^n + \Delta t L(u^n) \\ u^{(2)} &= \frac{3}{4} u^n + \frac{1}{4} u^{(1)} + \frac{1}{4} \Delta t L(u^{(1)}) \\ u^{n+1} &= \frac{1}{3} u^n + \frac{2}{3} u^{(2)} + \frac{2}{3} \Delta t L(u^{(2)}) \end{aligned}$$

其中 u^n 是第 n 时间层的守恒量, $L(u)$ 是空间离散后的差分算子.

2.2 五阶 WENO 格式

设 $f(x)$ 为一函数,则 $f'(x_i)$ 可以利用五阶 WENO 格式表示为:

$$\frac{df}{dx_i} \approx \frac{f_{x,i}^- + f_{x,i}^+}{2\Delta x_i} \quad (6)$$

其中:

$$f_{x,i}^- = \frac{1}{12} \left[-\frac{\Delta^+ f_{i-2}}{\Delta x} + 7 \frac{\Delta^+ f_{i-1}}{\Delta x} + 7 \frac{\Delta^+ f_i}{\Delta x} - \frac{\Delta^+ f_{i+1}}{\Delta x} \right] -$$

$$f^{WENO} \left(\frac{\Delta^- \Delta^+ f_{i-2}}{\Delta x}, \frac{\Delta^- \Delta^+ f_{i-1}}{\Delta x}, \frac{\Delta^- \Delta^+ f_i}{\Delta x}, \frac{\Delta^- \Delta^+ f_{i+1}}{\Delta x} \right),$$

$$\begin{aligned} f^{WENO}(a, b, c, d) &= \frac{1}{3} \omega_0 (a - 2b + c) + \\ &\quad \frac{1}{6} \left(\omega_2 - \frac{1}{2} \right) (b - 2c + d), \end{aligned}$$

$$\omega_0 = \frac{\alpha_0}{\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2}, \omega_2 = \frac{\alpha_2}{\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2},$$

$$\alpha_0 = \frac{1}{(\varepsilon + IS_0)^2}, \alpha_1 = \frac{6}{(\varepsilon + IS_1)^2},$$

$$\alpha_2 = \frac{3}{(\varepsilon + IS_2)^2},$$

$$IS_0 = 13(a-b)^2 + 3(a-3b)^2,$$

$$IS_1 = 13(b-c)^2 + 3(b+c)^2,$$

$$IS_2 = 13(c-d)^2 + 3(3c-d)^2,$$

$$\Delta^+ f_k = f_{k+1} - f_k, \Delta^- f_k = f_k - f_{k-1}$$

其中, ε 为小量.

同样,

$$f_{x,i}^+ = \frac{1}{12} \left[-\frac{\Delta^+ f_{i-2}}{\Delta x} + 7 \frac{\Delta^+ f_{i-1}}{\Delta x} + 7 \frac{\Delta^+ f_i}{\Delta x} - \frac{\Delta^+ f_{i+1}}{\Delta x} \right] + f^{WENO} \left(\frac{\Delta^- \Delta^+ f_{i+2}}{\Delta x}, \frac{\Delta^- \Delta^+ f_{i+1}}{\Delta x}, \frac{\Delta^- \Delta^+ f_i}{\Delta x}, \frac{\Delta^- \Delta^+ f_{i-1}}{\Delta x} \right).$$

而对于 $f''(x_i)$ 利用四阶中心差分格式:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} \approx \frac{16(f_{i+1} - f_{i-1}) - (f_{i+2} - f_{i-2}) - 30f_i}{12(\Delta x_i)^2} \quad (7)$$

其中 f_i 表示函数 $f(x)$ 在点 x_i 处的值, $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$.

2.3 FPK 方程的 TVD Runge-Kutta Weno 型差分格式

对于一维 FPK 方程 (1), 将微分的三阶 TVD Runge-Kutta 格式和微分方程的五阶 WENO 格式相结合, 即可得到一维 FPK 方程的 TVD Runge-Kutta Weno 型差分格式.

一维问题的 TVD Runge-Kutta Weno 型差分格式:

$$\frac{p_j^{n+1} - p_j^n}{\tau} = -\frac{1}{2h} (a_j p_{x,j}^- + a_j p_{x,j}^+) + \frac{1}{24h^2} (b_{j-2} p_{j-2}^n - 16b_{j-1} p_{j-1}^n - 30b_j p_j^n + 16b_{j+1} p_{j+1}^n - b_{j+2} p_{j+2}^n) \quad (8)$$

其中:

$$p_{x,j}^- = \frac{1}{12} \left[-\frac{\Delta^+ p_{j-2}^n}{h} + 7 \frac{\Delta^+ p_{j-1}^n}{h} + 7 \frac{\Delta^+ p_j^n}{h} - \frac{\Delta^+ p_{j+1}^n}{h} \right] - f^{WENO} \left(\frac{\Delta^- \Delta^+ p_{j-2}^n}{h}, \frac{\Delta^- \Delta^+ p_{j-1}^n}{h}, \frac{\Delta^- \Delta^+ p_j^n}{h}, \frac{\Delta^- \Delta^+ p_{j+1}^n}{h} \right),$$

$$f^{WENO}(a, b, c, d) = \frac{1}{3} \omega_0 (a - 2b + c) + \frac{1}{6} \left(\omega_2 - \frac{1}{2} \right) (b - 2c + d),$$

$$\omega_0 = \frac{\alpha_0}{\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2}, \omega_2 = \frac{\alpha_2}{\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2},$$

$$\alpha_0 = \frac{1}{(\varepsilon + IS_0)^2}, \alpha_1 = \frac{6}{(\varepsilon + IS_1)^2},$$

$$\alpha_2 = \frac{3}{(\varepsilon + IS_2)^2},$$

$$IS_0 = 13(a-b)^2 + 3(a-3b)^2,$$

$$IS_1 = 13(b-c)^2 + 3(b+c)^2,$$

$$IS_2 = 13(c-d)^2 + 3(3c-d)^2,$$

$$\Delta^+ f_k^n = f_{k+1}^n - f_k^n, \Delta^- f_k^n = f_k^n - f_{k-1}^n$$

其中, ε 为小量.

$$\text{而 } p_{x,j}^{n+} = \frac{1}{12} \left[-\frac{\Delta^+ p_{j-2}^n}{h} + 7 \frac{\Delta^+ p_{j-1}^n}{h} + 7 \frac{\Delta^+ p_j^n}{h} - \frac{\Delta^+ p_{j+1}^n}{h} \right] + f^{WENO} \left(\frac{\Delta^- \Delta^+ p_{j+2}^n}{h}, \frac{\Delta^- \Delta^+ p_{j+1}^n}{h}, \frac{\Delta^- \Delta^+ p_j^n}{h}, \frac{\Delta^- \Delta^+ p_{j-1}^n}{h} \right).$$

其中, p_j^n 为函数 $p(x, t)$ 在点 (x_j, t_n) 处对应的数值, h 为空间步长, τ 为时间步长.

3 数值算例

算例 1 考虑如下受随机外激的单自由度非线性系统:

$$X' = \frac{1}{2}(X - X^3 - \varepsilon X^5) + W(t) \quad (9)$$

其中 $\varepsilon=0.1$ 为常数, 标识系统的非线性强度, $W(t)$ 是一零均值高斯白噪声, 其相关系数为: $E(W(t)W(t+\tau)) = 2\pi S_0 \delta(\tau)$, S_0 为 $W(t)$ 的谱密度, $\delta(\tau)$ 为 Dirac 函数.

当 $S_0 = \frac{1}{\pi}$ 时, 对应于系统 (9) 响应的稳态概率

密度 $p(x)$ 的 FPK 方程为:

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{1}{2}(x - x^3 - \varepsilon x^5) p(x) \right] - \frac{d^2 p(x)}{dx^2} = 0 \quad (10)$$

容易解得:

$$p(x) = C \exp\left(\frac{x^2}{4} - \frac{x^4}{8} - \frac{\varepsilon x^6}{12}\right) \quad (11)$$

其中 C 为归一化常数. 其精确解与本文方法的数值解对比如图 1.

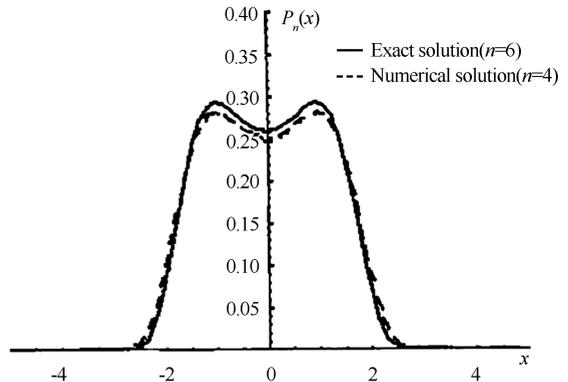


图 1 精确解与本文数值解

Fig.1 Exact solution and numerical solution in this paper

算例 2 考虑如下高斯白噪声参激和外激联合作用下的非线性振子:

$$X'' + 2\alpha X'(1 + \gamma_1 W_1(t)) + \beta X'(X^2 + X'^2/\omega^2) + \omega^2 X(1 + \gamma_2 W_2(t)) = \gamma_3 W_3(t) \quad (12)$$

其中 α, β 为常数, ω 为正常数, $W_i(t)$ ($i=1, 2, 3$) 为零均值的物理高斯白噪声, 且相互独立满足 $E[W_i(t)W_i(t+\tau)] = \delta_i(\tau)$ ($i=1, 2, 3$), δ 为 Dirac 函数, γ_i ($i=1, 2, 3$) 表示各噪声强度.

当 $\omega^2 \gamma_2^2 = 4\alpha^2 \gamma_1^2$ 时, 系统 (2) 对应的 FPK 方程有精确稳态解. 即 $p(y_1, y_2) = C (k + y_1^2 + y_2^2 / \omega^2)^{k-\delta} \exp\{-\mu(y_1^2 + y_2^2 / \omega^2)\}$. 其中 y_1, y_2 表示响应的位移

和速度, C 为归一化常数, 且 $k = \frac{\gamma_3^2}{\gamma_2^2 \omega^4}, \delta = \frac{2\alpha}{\gamma_2^2 \omega^2} + \frac{1}{2}$,

$\mu = \frac{\beta}{\gamma_2^2 \omega^2}$. 其中参数 α, β 取值均为 0.1, $\omega = 1.0$. 其位

移 y_1 和速度 y_2 的边缘概率密度的精确解与本文方法的数值解对比如图 2.

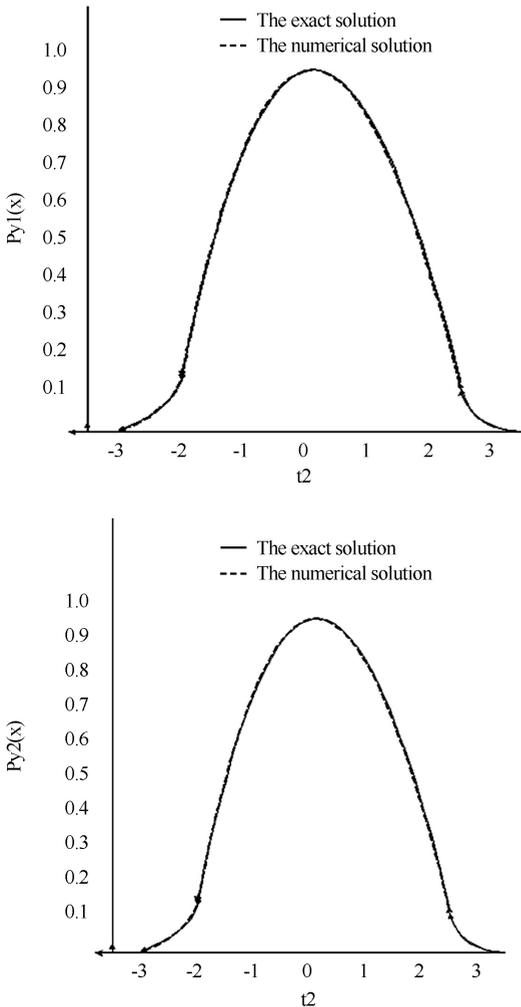


图 2 位移 y_1 和速度 y_2 的边缘概率密度

Fig.2 Marginal probability density of the displacement y_1 and the velocity y_2

4 结论

本文将三阶 TVD Runge-Kutta 方法和五阶

WENO 格式相结合, 得到 TVD Runge-Kutta WENO 型差分格式, 并将其成功地应用到随机外激作用下的非线性动力系统, 获得了 FPK 方程的有限差分数值解, 并与其解析解进行了比较. 表明该方法的有效性以及可行性, 并克服一般有限差分法的缺点, 可以准确地获得更小的尾部概率密度, 且无振荡, 这对于可靠性分析至关重要.

参 考 文 献

- 1 Lin Y K, Cai G Q. Probabilistic structural dynamics: advanced theory and applications. New York: McGraw-Hill, 1995
- 2 朱位秋. 非线性随机动力学与控制——Hamilton 理论体系框架. 北京: 科学出版社, 2003 (Zhu W Q. Nonlinear stochastic dynamics and controls——frame of Hamilton theory. Beijing: Science Press, 2003 (in Chinese))
- 3 赵超樱, 谭维翰, 郭志奇. 由菲简并光学参量放大系统获得压缩态光所满足的 Fokker-Planck 方程及其解. 物理学报, 2003, 52: 2694 (Zhao C Y, Tan W H, Guo Z Q. The solution of the Fokker-Planck equation of non-degenerate parametric amplification system for generation of squeezed light. *Acta Physica Sinica*, 2003, 52: 2694 (in Chinese))
- 4 王平, 杨新娥, 宋小会. 具有含时平方反比项的谐振子的路径积分求解. 物理学报, 2003, 52: 2957 (Wang P, Yang X E, Song X H. Exact solution for a harmonic oscillator with a time-dependent inverse square potential by path-integral. *Acta Physica Sinica*, 2003, 52: 2957 (in Chinese))
- 5 徐伟, 贺群, 戎海武等. Duffing-Van der Pol 振子随机分叉的全局分析. 物理学报, 2003, 52: 1365 (Xu W, He Q, Rong H W, et al. Global analysis of stochastic bifurcation in a Duffing-van der Pol system. *Acta Physica Sinica*, 2003, 52: 1365 (in Chinese))
- 6 孙中奎, 徐伟, 杨晓丽. 求解强非线性动力系统响应的一种新方法. 动力学与控制学报, 2005(2): 29~35 (Sun Z K, Xu W, Yang X L. A new analytic approximate technique for strongly nonlinear dynamic systems. *Journal of Dynamics and Control*, 2005, 2(3): 29~35 (in Chinese))
- 7 Wojtkiewicz S F, Bergman L A, Asce M. Numerical solution of high dimensional Fokker-Planck equations. 8th ASCE Specialty Conference on Probabilistic Mechanics and Structural Reliability, 2000
- 8 Sun Y, Kumar M. Numerical solution of high dimensional

stationary Fokker-Planck equations via tensor decomposition and Chebyshev spectral differentiation. *Computers & Mathematics with Applications*, 2014, 67(10):1960~1977

学出版社, 2003:42~106 (Liu R X, Shu Q W. Some new methods for computational fluid dynamics. Beijing: Science Press, 2003:42~106 (in Chinese))

9 刘儒勋, 舒其望. 计算流体力学的若干新方法. 北京: 科

SOLUTION OF TVD RUNGE-KUTTA AND WENO SCHEME TO THE FPK EQUATIONS OF ONE-DIMENSION NONLINEAR SYSTEM

Wang Wenjie[†] Feng Jianhu

(School of Science of Chang'an University, Xi'an 710064, China)

Abstract Firstly, the Fokker-Planck-Kolmogorov equations for nonlinear stochastic dynamic system was studied. Secondly, the third-order TVD Runge-Kutta time difference scheme for differential equations and the fifth-order WENO scheme for differential operators were discussed. Moreover, the third-order TVD Runge-Kutta difference scheme was combined with the fifth-order WENO scheme, and the numerical solution for FPK equations using the TVD Runge-Kutta WENO scheme was obtained. Finally, the numerical solution was compared with the analytic solution for FPK equations. The numerical method was shown to give accurate results and overcome the difficulties of other methods, i. e., the probability density function is too small for the peak while too large for the tailed value.

Key words nonlinear system, FPK equations, finite difference method, TVD Runge-Kutta scheme, ENO scheme, WENO scheme